

# Метрико-топологические вычисления в конструктивном мире кубических структур.

Г.Г.Рябов, В.А.Серов, И.А.Толстошеев  
(НИВЦ МГУ)

Работа поддержана грантом РФФИ 09-07-12135 офи\_м

# Введение.

- Парадигма «физика-топология-логика-компьютерные вычисления-Розеттский камень». Формально-языковые связки «физика-топология», «топология-логика-компьютерные вычисления».
- Построение конструктивного мира для решения задач синтеза геометрико-топологических структур компьютерными методами.
- Роль кубических структур как удобного материала для алгебраических представлений и для машинных параллельных реализаций .
- Влияние на архитектуру компьютеров новых поколений.

# Математика и компьютер.

- Первая сторона ответственности математиков состоит в том, чтобы, используя опыт и достижения математики, особенно математики XX века, значительно расширить возможность создания адекватных языков в других разделах науки...  
Многое будет сделано, в особенности в век компьютеров, которые медленно, но неизбежно будут менять психологию математиков...

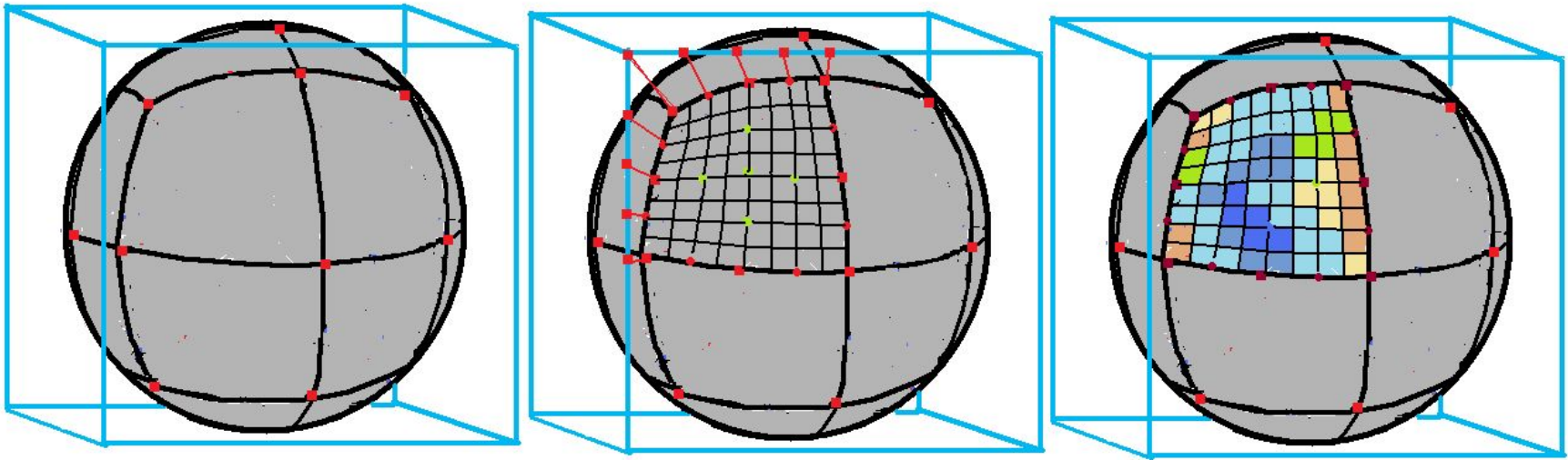
- И.М.Гельфанд.



# О конструкции многообразия 2-сферы. MITgcm.

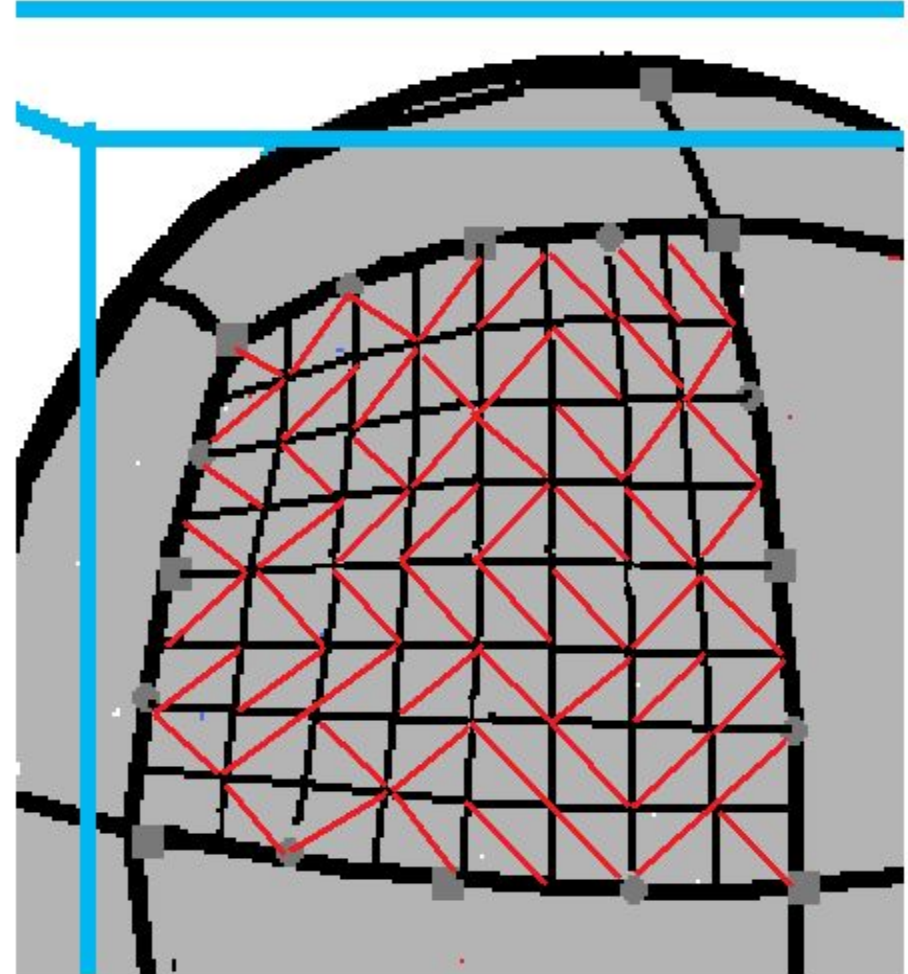
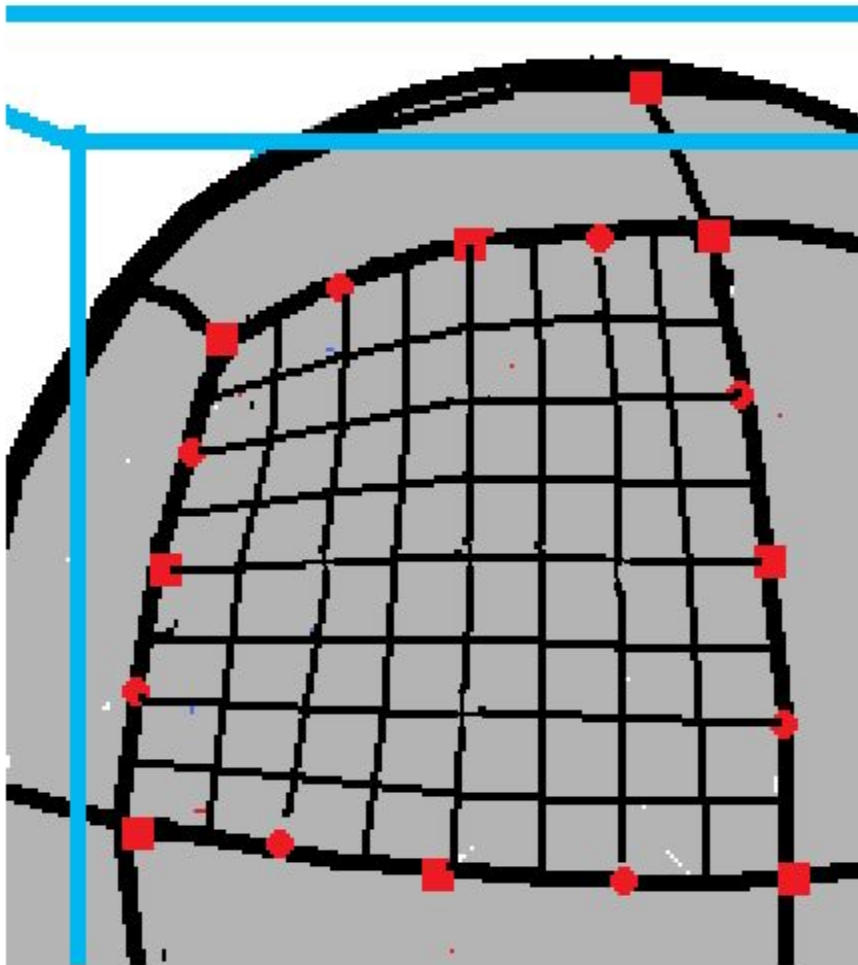
- MITgcm-модель глобальной циркуляции океан-атмосфера.
- Общая схема основана на представлении моделируемого слоя, как мембраны на поверхности планеты в виде 2-сферы.
- Гибкость представления при детализации модели обеспечивается различной дискретизацией псевдоквадратного покрытия 2-сферы.
- Такая конструкция названа кубоидной конформной сферой.

# Проекция куба на 2-сферу

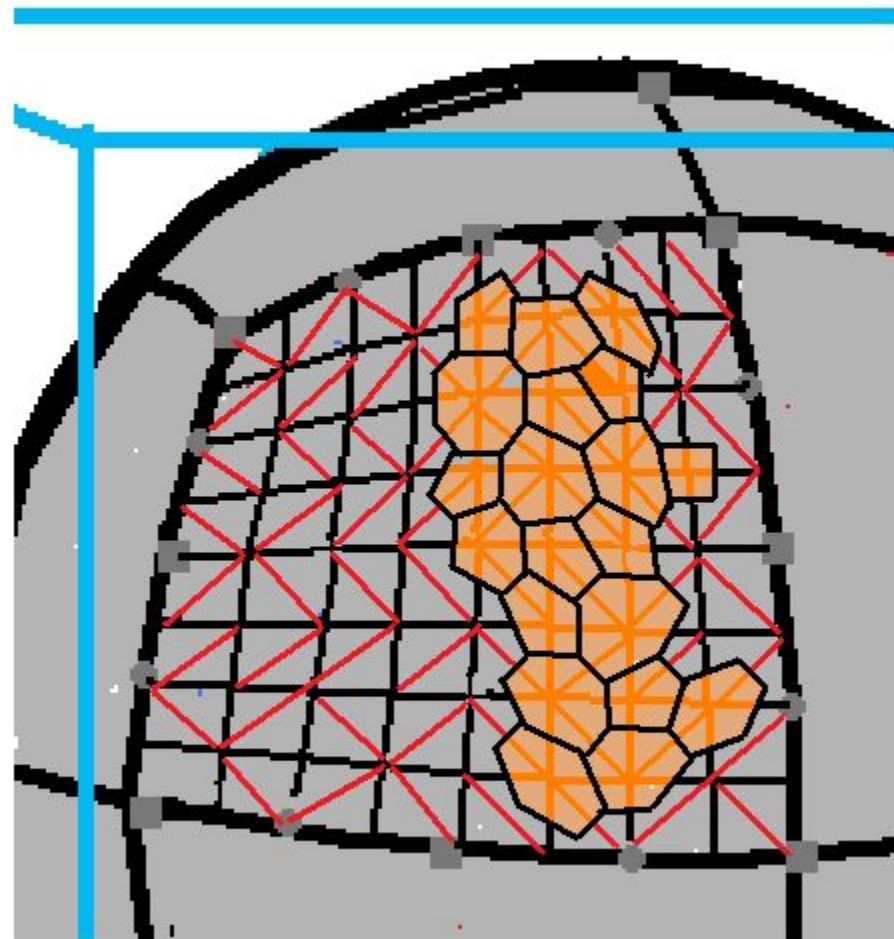
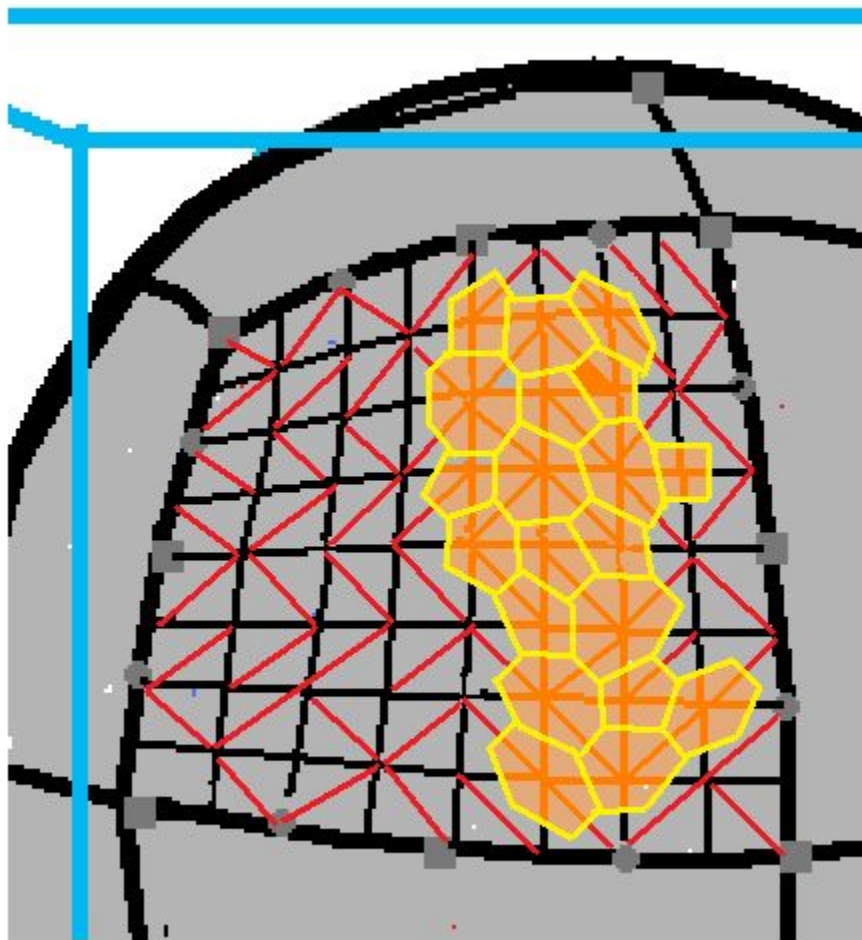


- Проецируются вершины, середины ребер и ребра.
- Ребра на сфере- дуги больших кругов.
- Дискретизация сферы-проекция разбиений ребер.
- Ребра псевдоквадратов-дуги больших кругов.
- В модели глобальной циркуляции MITgcm модификации конформной сферы-  $16^2 \times 6$ ;  $32^2 \times 6$ ;  $64^2 \times 6$ .

# Триангуляция сетки на многообразии (2-сфере).



# Дуальная мозаика 2-сферы (6 типов выпуклых многоугольников).



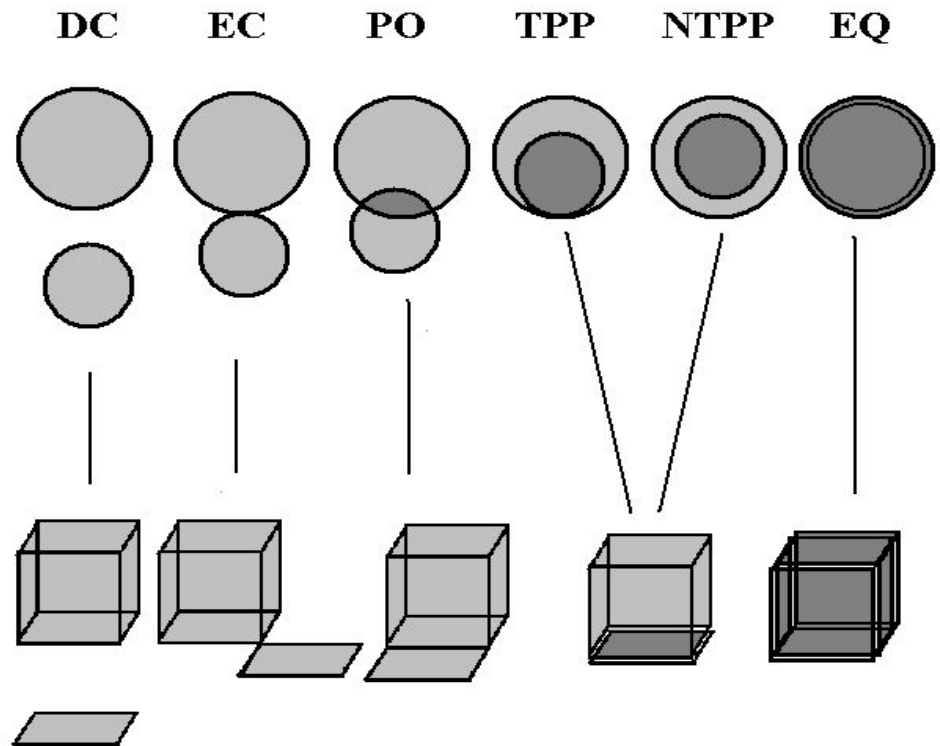
# Общая схема конструктивного подхода к построению $n$ -сферы.

- 1. Выбор алфавита и метода кодирования для граней кубической  $n$ -окрестности.
- 2. Описание множества слов, представляющих внешние и внутренние гиперграни.
- 3. На основании гомеоморфности поверхности  $n+1$ -куба и  $n$ -сферы вычислить все карты смежности для граней  $n$ -сферы.
- Спроецировать все целые точки (вершины)  $n$ -окрестности на геометрическую (заданную уравнением  $\sum x_i^2=1$ ;) сферу.



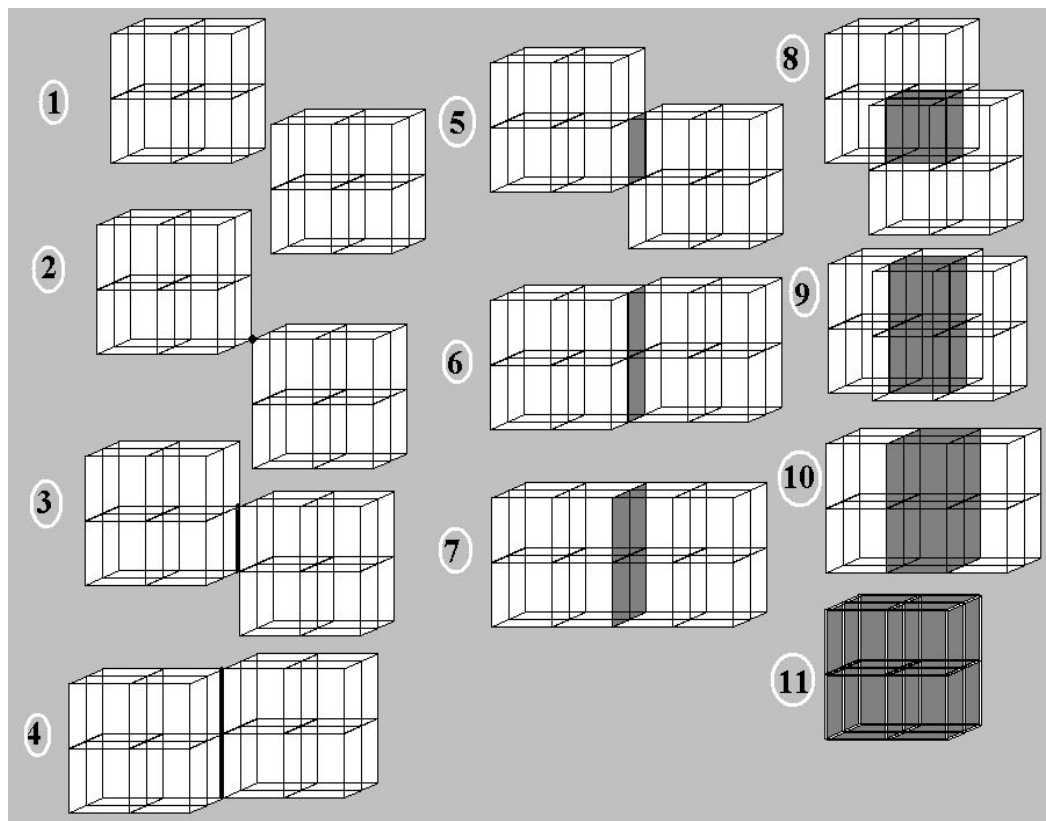
# Пространственная логика областей.

- 6 основных взаимных положений двух областей в пространстве.
- Дескрипторы связности:
- DC- не связаны
- EC- внешнее касание
- PO- пересечение
- TRP-внутр.касание
- NTRP- внутри
- EQ-совпадают



# Сопоставление пространственной логики областей и представления кубических структур.

- Взаимное расположение двух 3-окрестностей может быть задано 11 дескрипторами.
- DC, ECP, ECE, EC2E, ECF, EC2F, EC4F, POC, PO2C, PO4C, EQ



# Связь с рассматриваемой тематикой.

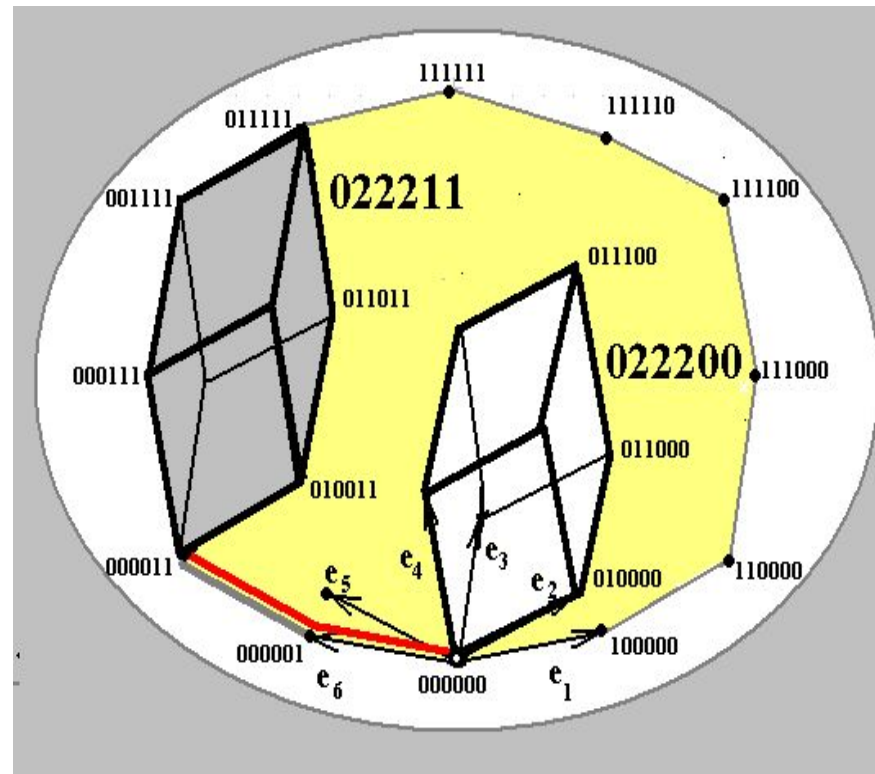


- Основная рассматриваемая тематика помечена жирными овалами в схеме.
- Разделы фундаментальной и прикладной математики помещены в прямоугольные рамки.

# Основы представления кубических структур.

# Биективность $k$ -граней $n$ -куба и $n$ -разрядных слов троичного алфавита.

- $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ ;
- $d_1, d_2, \dots, d_n \in D^n$ ;  $d_i \in \{0, 1, 2\}$ ;
- $f_k(v) \Leftrightarrow \prod I(e_i) + T e_j$ ;
- $e_i: d_i=2$ ;  $e_j: d_j=\{0, 1\}$ ;
- $|d_i|=k$ ;  $|d_j|=n-k$ ;
- $f_k(v)$ - $k$ -мерная грань  $n$ -куба в вершине  $v(T)$ ;
- $\Pi$ -декартово произведение;
- $T$ -трансляция;
- **022211**-трехмерная грань в 6-мерном единичном кубе (рис).

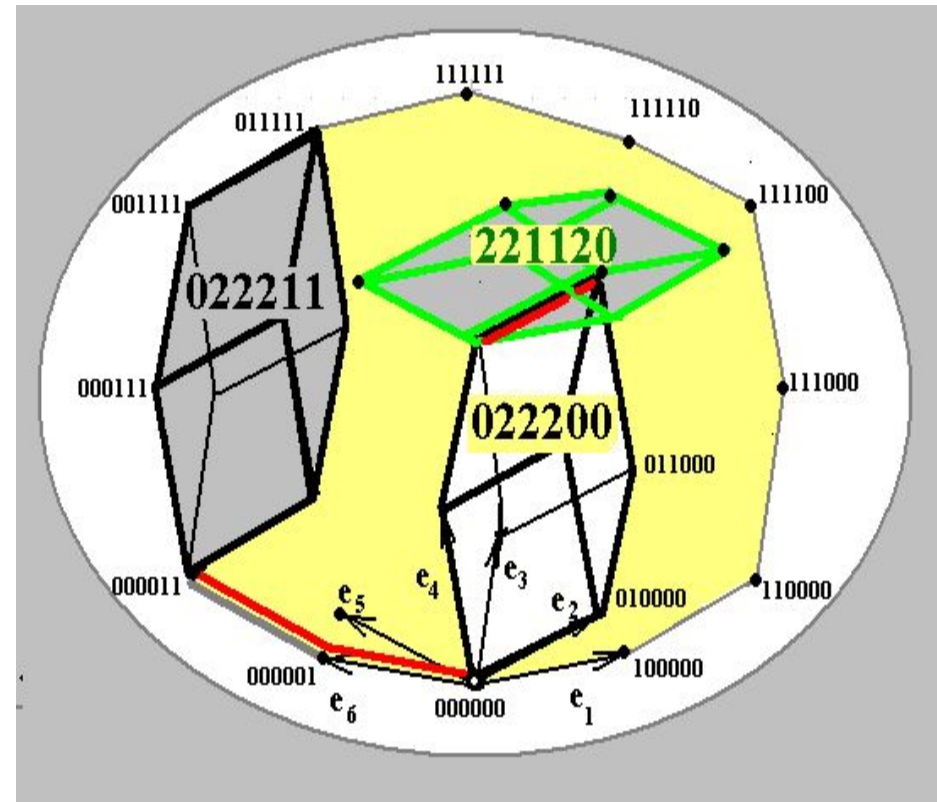


# Определение кубанта и умножения.

- Кубант (**кубический квант**)-  $n$ -разрядное троичное слово, биективное  $k$ -мерной грани ( $k=0-n$ )  $n$ -мерного единичного куба ( $n$ -куба). Алфавит  $\{0;1;2\}$
- На кубантах задана бинарная операция «умножение» с расширением алфавита до  $\{\emptyset;0;1;2\}$ :
- Правила поразрядного коммутативного умножения:
  - $0 \otimes 0 = 0$ ;  $0 \otimes 1 = 1 \otimes 0 = \emptyset$ ;  $0 \otimes 2 = 2 \otimes 0 = 0$ ;  $1 \otimes 2 = 2 \otimes 1 = 1$ ;
  - $2 \otimes 2 = 2$ ;  $\emptyset, 0, 1, 2 \times \emptyset = \emptyset$ ;
- В префиксной форме  $\Pi(201221;211122) = 2\emptyset1121$ ;  
(эти 3-грани в 6-кубе не пересекаются и  $L_{\min} = 1$ );

# Свойства умножения.

- Произведение кубантов равно слову, биективному общей грани соответствующих сомножителям граней, если оно **не содержит  $\emptyset$** .
- Если произведение **содержит** по крайней мере одну  $\emptyset$ , то число разрядов с  $\emptyset$  равно длине мин. пути (по ребрам n-куба) между гранями.
- $P(022200; 221120) = 021100$ ;
- $P(022211; 022200) = 0222\emptyset\emptyset$ ;  
 $L_{\min} = 2$ ; (рис)



# Моноид кубантов и псевдокубантов

- Определение. Псевдокубант  $n$ -разрядное четверичное слово (алфавит  $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$  по крайней мере с одним из разрядов  $\emptyset$ ).
- При заданном умножении множество всех  $n$ -разрядных четверичных слов (алфавит  $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$ ), кубанты и псевдокубанты, образуют моноид с единицей – кубант  $22\dots 2$  (весь  $n$ -куб).
- Общее число мономов  $4^n$ , среди них кубантов  $3^n$ .



# Хаусдорфова метрика на кубантах- обобщение метрики Хэмминга.

$$\rho_{HH}(D1, D2) = \max\{\max L_{\min}(D1 \square D2), \max L_{\min}(D2 \square D1)\};$$

D1=022211; D2=112222;

$L_{\min}(D1 \square D2) \square$  112222

002211

$\Pi = \emptyset \emptyset 2211$

$\max L_{\min}(D1 \square D2) = 2;$

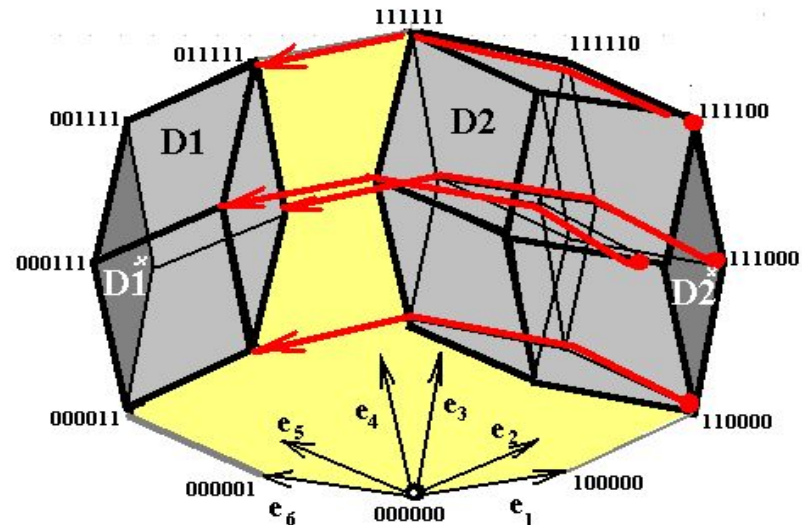
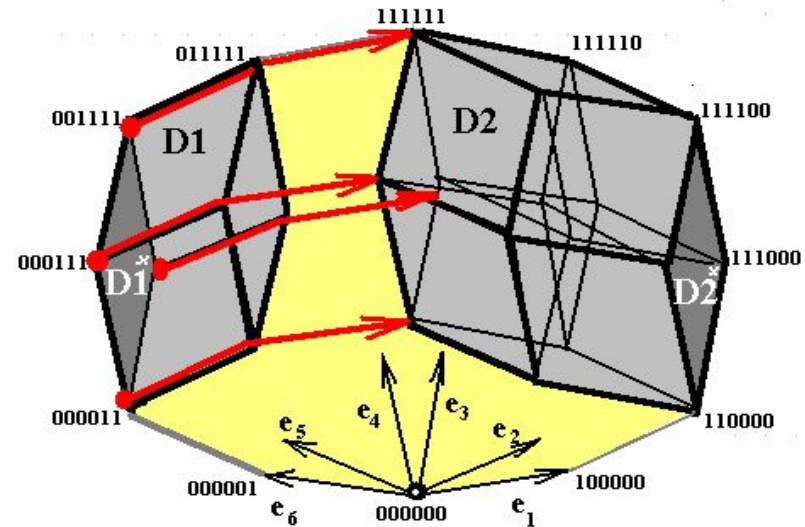
$L_{\min}(D2 \square D1) \square$  022211

112200

$\Pi = \emptyset 122 \emptyset \emptyset$

$\max L_{\min}(D2 \square D1) = 3;$

$$\rho_{HH}(D1, D2) = \max\{2, 3\} = 3;$$



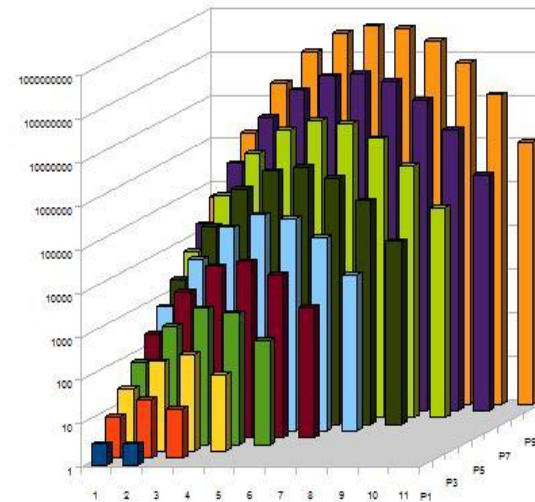
# Дескриптивное описание алгоритма вычисления НН-расстояния между гранями n-куба

- Пусть граням n-куба  $f_1$  и  $f_2$  соответствуют кубанты  $D_1 = d_{11}, \dots, d_{1n}$ ;  $D_2 = d_{21}, \dots, d_{2n}$ ;
- 1. Вычисление  $\max L \min(D_1 \square D_2)$ : рассматриваются все пары разрядов  $d_{1i}$  и  $d_{2i}$  ( $i=1-n$ ). Если  $d_{1i}=2$ , а  $d_{2i}=0$ , то  $d_{1i}$  заменяется на 1; если  $d_{1i}=2$ , а  $d_{2i}=1$ , то замена  $d_{1i}$  на 0. В остальных случаях замен нет.  $D_1$  с заменами обозначим  $D_1^*$ . Затем вычисляется произведение  $\Pi(D_1^*, D_2)$  и в нем подсчитывается число разрядов с  $\emptyset$ , которое и равно  $\max L \min(D_1 \square D_2)$ .
- 2. Вычисление  $\max L \min(D_2 \square D_1)$  происходит идентично пункту 1. с заменой индекса 1 на 2 и 2 на 1.
- 3. Из двух величин  $\max L \min(D_1 \square D_2)$ ,  $\max L \min(D_2 \square D_1)$  (целые, неотрицательные числа) выбирается максимальное, которое и равно  $\rho_{\text{НН}}(D_1, D_2) = \rho_{\text{НН}}(f_1, f_2)$ .

# НН-метрическое пространство.

- Все грани (кубанты)  $n$ -куба образуют Хаусдорфово-Хэммингово (НН) конечное метрическое пространство.
- Расчеты матриц всех парных НН-расстояний проведены на суперкомпьютере МГУ «Чебышев» для размерностей  $n=1-10$ .
- Распределения  $\rho_{\text{НН}}(\cdot, \cdot)$  на рис.

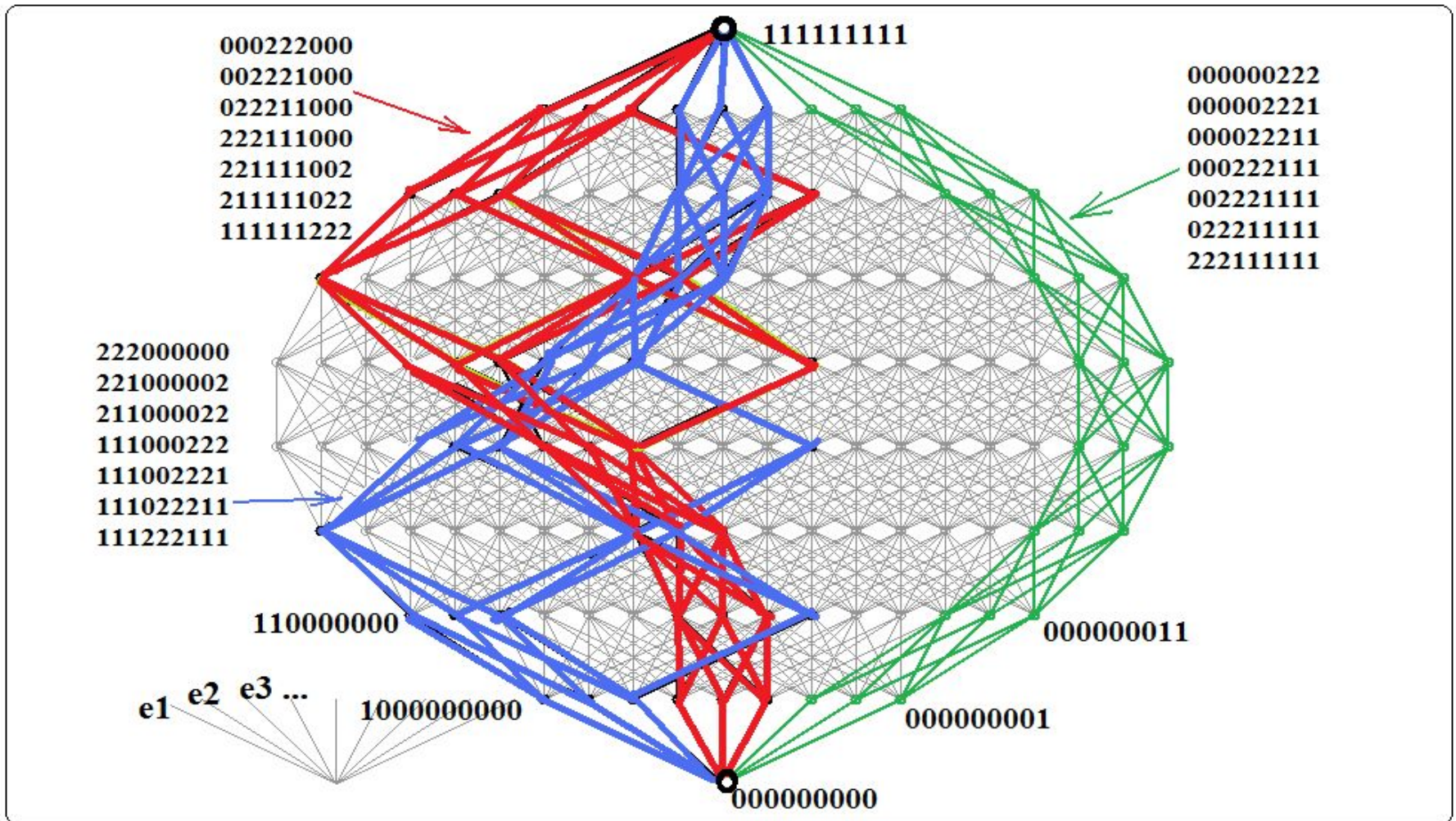
	$r_{\text{НН}}(n)$										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3										
2	9	22									
3	27	117	174								
4	81	540	1380	1072		248					
5	243	2295	8820	11480	5800	1008					
6	729	9234	49410	94960	78600	29088	4064				
7	2187	35721	252882	667380	802200	476784	139104	16320			
8	6561	134136	1211112	4183200	6818000	5794432	2669184	644608	65408		
9	19683	492075	5511240	24068016	50836464	57881376	37591680	14135040	2922624	261888	
10	59049	1771470	24078870	129509280	343148400	501544512	431417280	225876480	71925120	13043200	1048064



# Расширение понятий и операций.

- Путь размерности  $k$  ( $k$ -путь) между  $k$ -гранями  $f_1$  и  $f_2$  - последовательность граней вида  $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1s}$ , где все  $k$ -грани;  $f_{11} = f_1; f_{1s} = f_2$ ; и для  $i=1-s$  выполнено  $f_{1i} \cap f_{1i+1} =$  грани размерности  $k-1$ ;
- Биективно:  $k$ -путь между кубантами  $D_1$  и  $D_2$  последовательность  $D_{11}, D_{12}, \dots, D_{1s}$  такая, что  $D_{11} = D_1, D_{1s} = D_2$ ; все  $D_{1i}$  содержат ровно  $k$  букв «2»; и для  $i=1-s$  выполнено  $D_{1i} \otimes D_{1i+1} =$ кубант с  $k-1$  буквой «2». Кратчайший  $k$ -путь, когда  $s$  минимально.
- Оператор (унарный) взятия границы ( $\partial D$ ) –множество кубантов, биективное гиперграням соответствующего куба.
- Оператор ( $m$ -арный) выпуклой оболочки ( $\text{conv}\{D_1, \dots, D_m\}$ ) – кубант минимальной размерности  $D_0: \{D_1, \dots, D_m\} \subseteq D_0$ ;

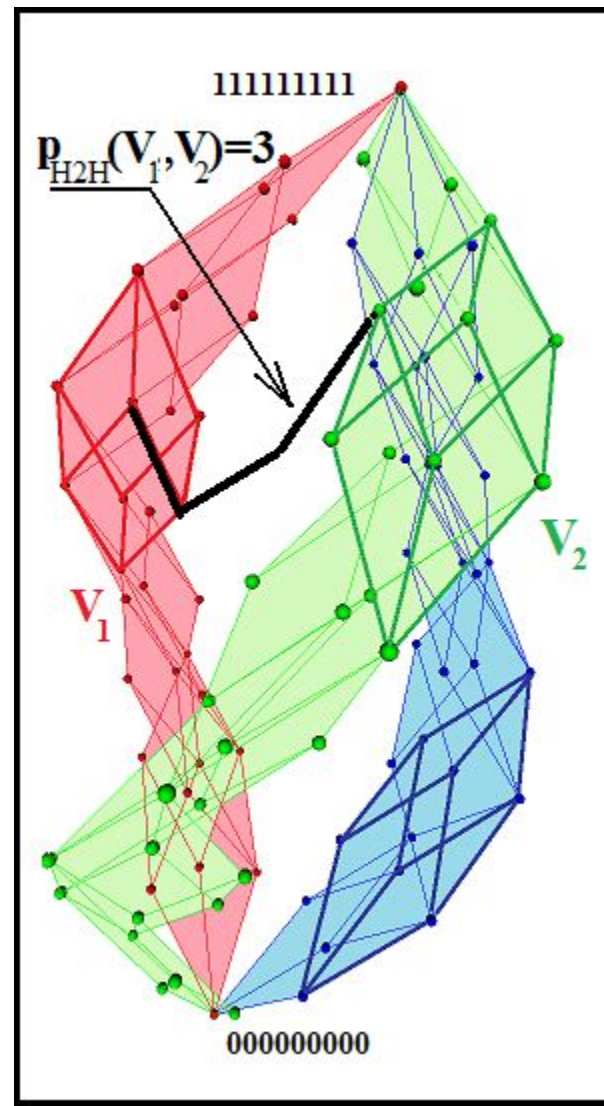
# Задача многомерного «метро».



- Три трехмерных тоннеля в 9-кубе от 00...0 до 11...1
- Три кратчайших 3-пути в 9-кубе от 00...0 до 11...1

# H2H метрика между k-путями-пример метрики между комплексами кубантов.

- Кубанты, описывающие k-пути - точки HH-метрического пространства.
- Каждый путь-множество точек из HH-пространства. Между этими множествами  $V_1$  и  $V_2$  вычисляется хаусдорфово расстояние как:
  - $\max \{ \max \min \rho_{HH}(V_1 \square V_2), \max \min \rho_{HH}(V_2 \square V_1) \} = \rho_{H2H}(V_1, V_2)$
  - Для «тоннелей метро»  $V_1, V_2, V_3$ :  $\rho_{H2H}(V_1, V_2) = \rho_{H2H}(V_1, V_3) = \rho_{H2H}(V_2, V_3) = 3$ ;



# Кубические окрестности.

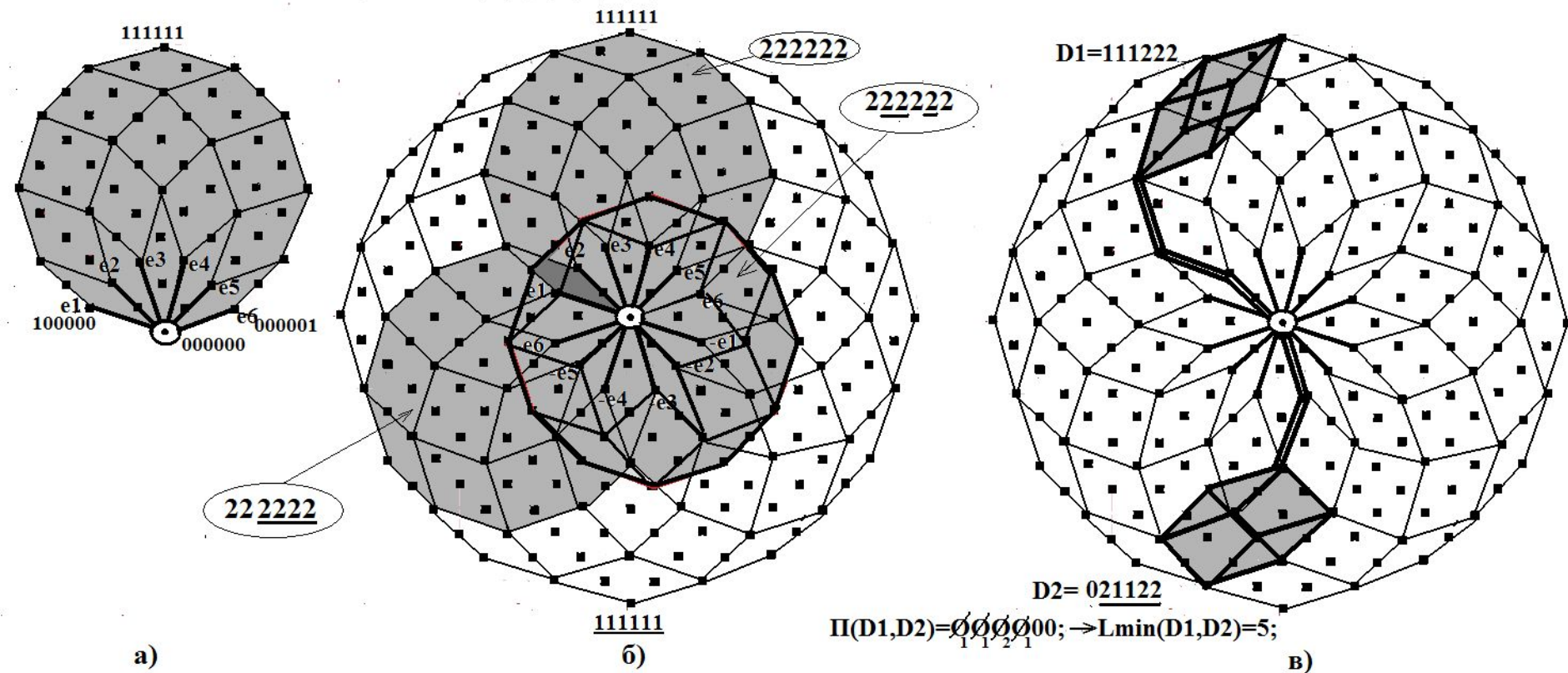
- **Определение.** Множество всех единичных  $n$ -кубов вместе со всеми своими гранями в  $\mathbf{R}_c^n$ , имеющих общую вершину (целую точку), - кубическая  $n$ -окрестность этой точки.
- Число  $n$ -кубов в кубической  $n$ -окрестности (ортантов) равно  $2^n$ .
- Общее число кубических граней всех размерностей в  $n$ -окрестности равно  $5^n$ , что следует из общего принципа кодирования кубических граней. Единичные отрезки (как декартовы сомножители) кодируются двумя буквами 2 и -2 (в положительном и отрицательном направлениях) по каждому измерению, а трансляции тремя буквами -1,0,1; т.е. общий алфавит-пятиричный (-2,-1,0,1,2).

# Общая комбинаторная схема кодирования кубических граней.

- Для **n-куба**:
- (одна буква для обозначения наличия единичного отрезка в декартовом произведении по данному измерению) + (две буквы для обозначения наличия или отсутствия трансляции по данному измерению) □
- $\Sigma F(n,k)=(1+2)^n$ ;  $F(n,k)=C(n,k) 2^{n-k}$ ; число  $k$ -граней в  $n$ -кубе
- Для кубической **n-окрестности** радиуса 1:
- (две буквы для отрезков в положительном и отрицательном направлениях) + (три буквы для трансляций в положительном и отрицательном направлениях и отсутствия трансляции)
- $\Sigma F(n,k)=(2+3)^n$ ;  $F(n,k)=C(n,k)2^k 3^{n-k}$ ; число  $k$ -граней в  $n$ -окр.

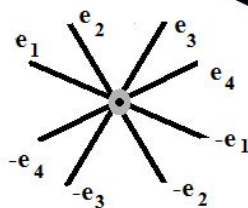
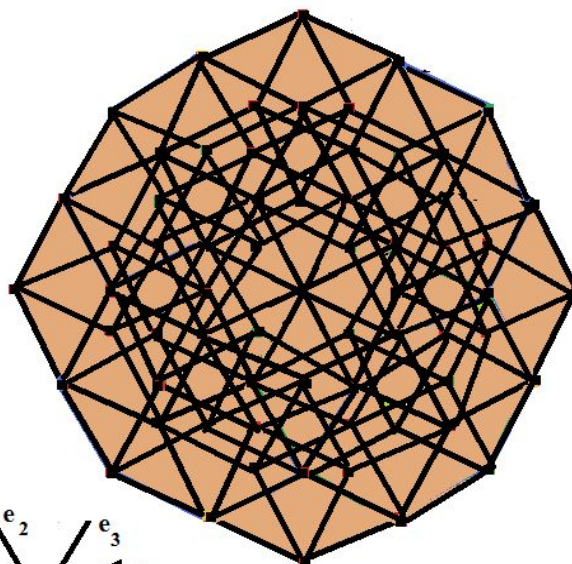
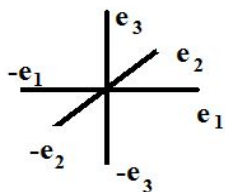
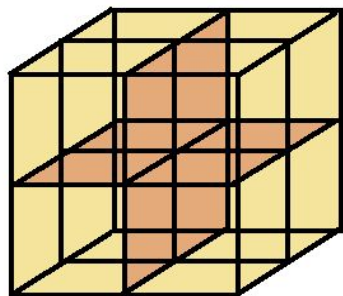


# Отображение 6-окрестности на R2.



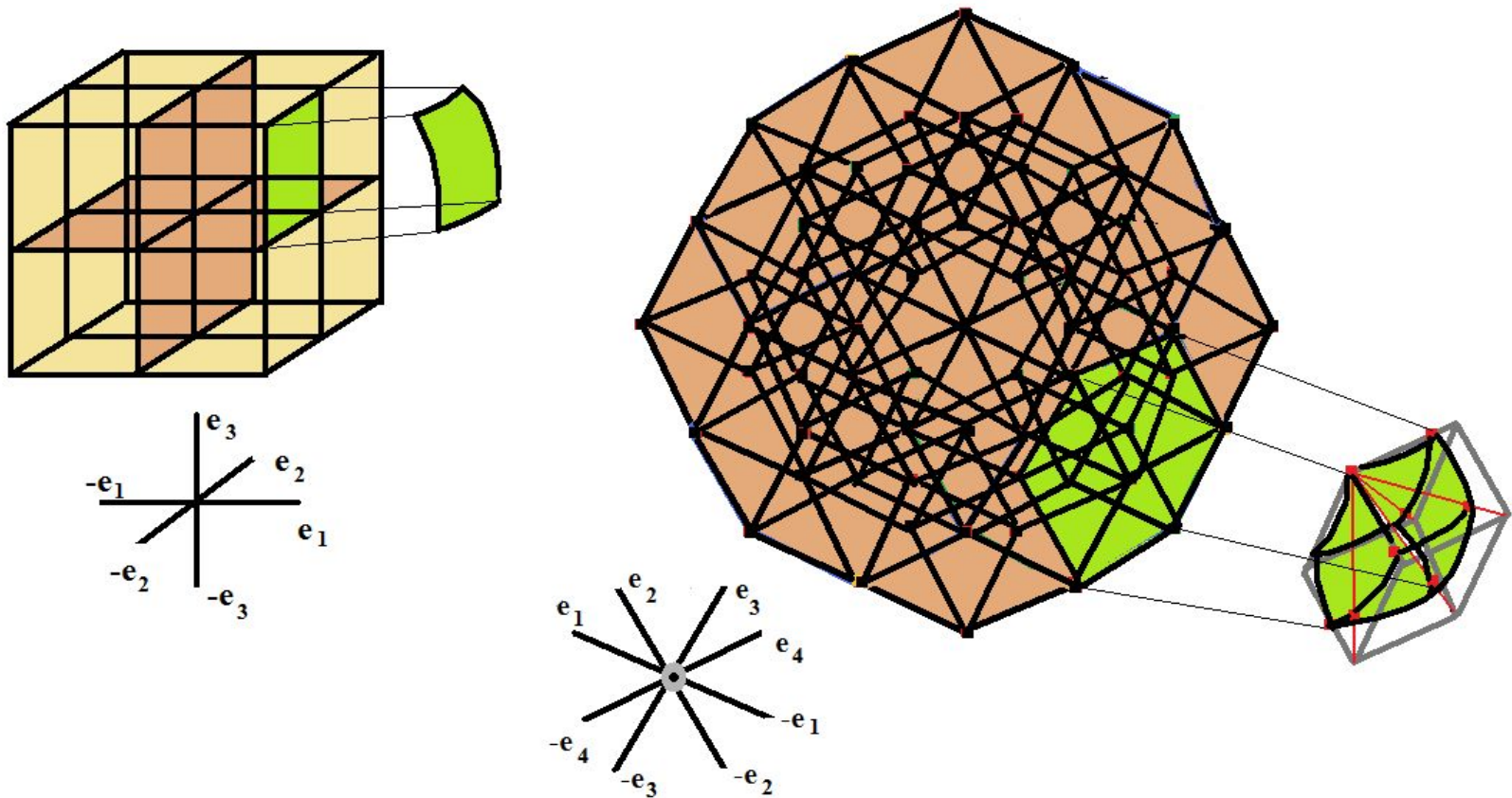
- а)  $I^6$
- б) 6-окрестность с ортантами
- в)  $L_{\min}$  между кросс-кубантами  $D_1$  и  $D_2$ .

# 3-окрестность и 4-окрестность (кубические).



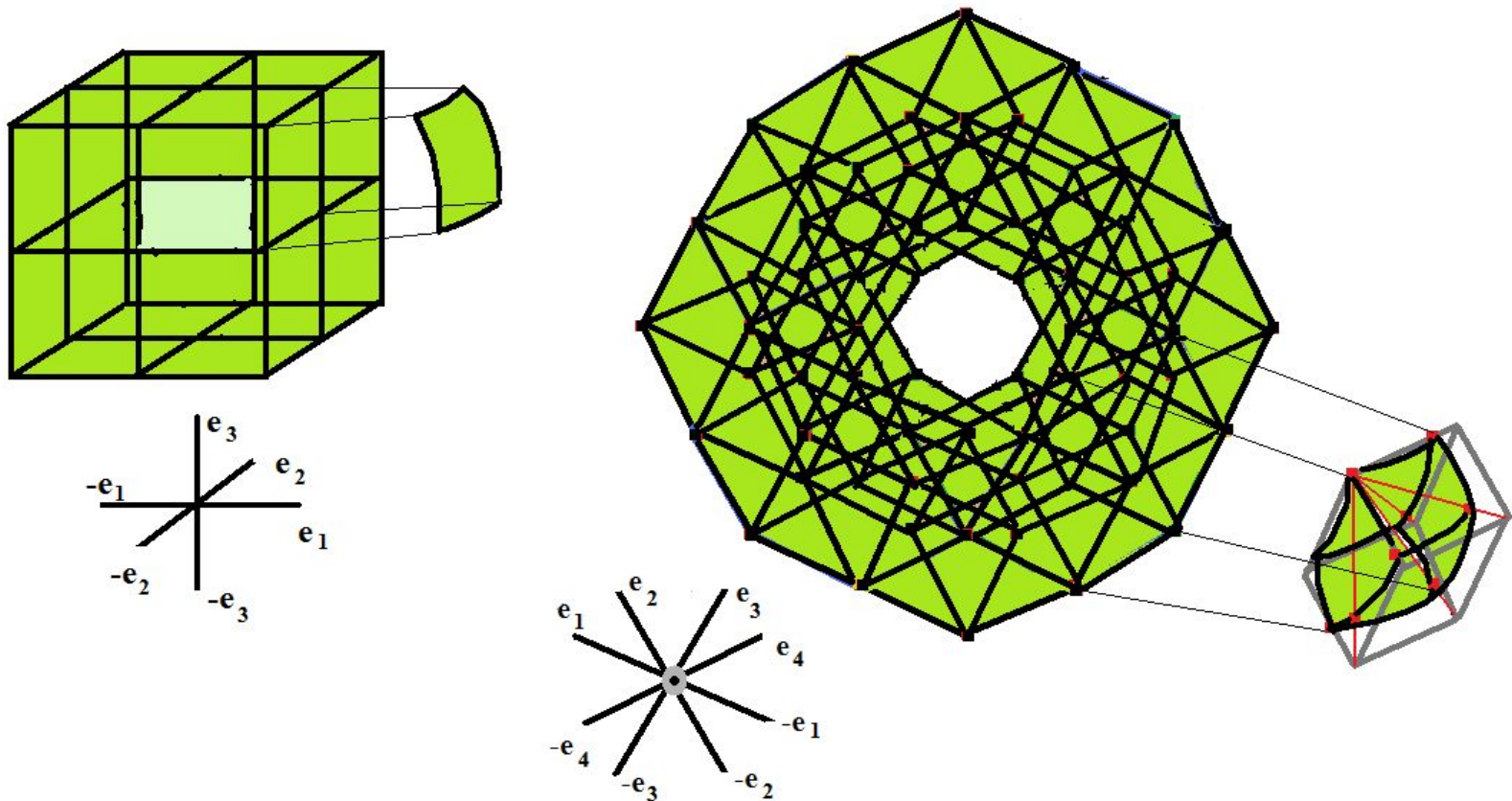
- Все грани 3-окрестности биективны всем трехразрядным, а 4-окрестности всем четырехразрядным словам пятиричного алфавита  $\{-2;-1;0;1;2\}$ . Слова с таким алфавитом-**кросс-кубанты**.

# Проекция граней поверхности кубической окрестности на сферы.



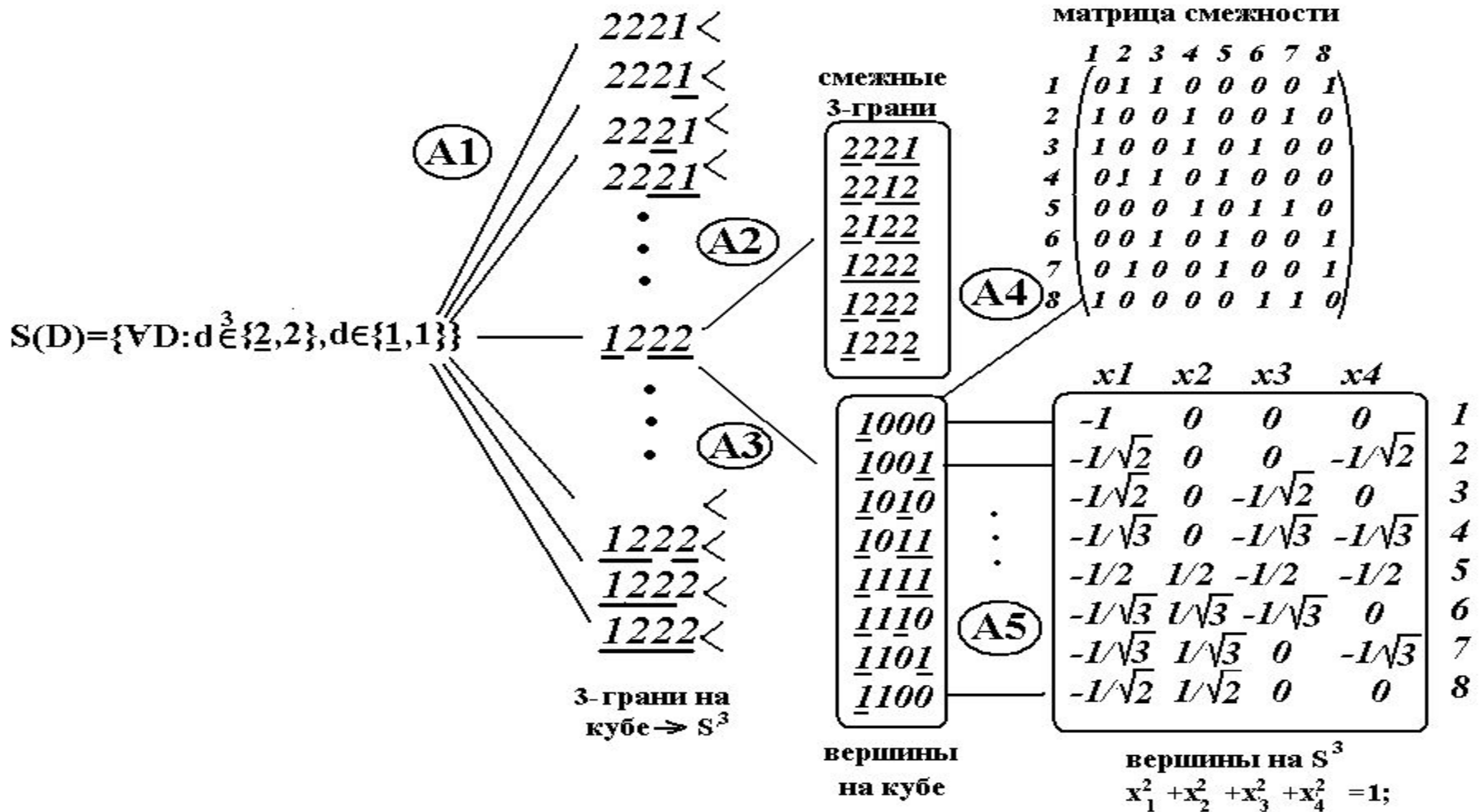
- Внешние грани 4-окрестности проецируются на 3-сферу (ренормировка координат вершин).

# Все поверхностные грани. Кубические 2-сфера и 3-сфера.



- Отсутствуют грани, содержащие  $(0,0,\dots,0)$   $\square$  все четырехразрядные слова, у которых есть разряд 0.

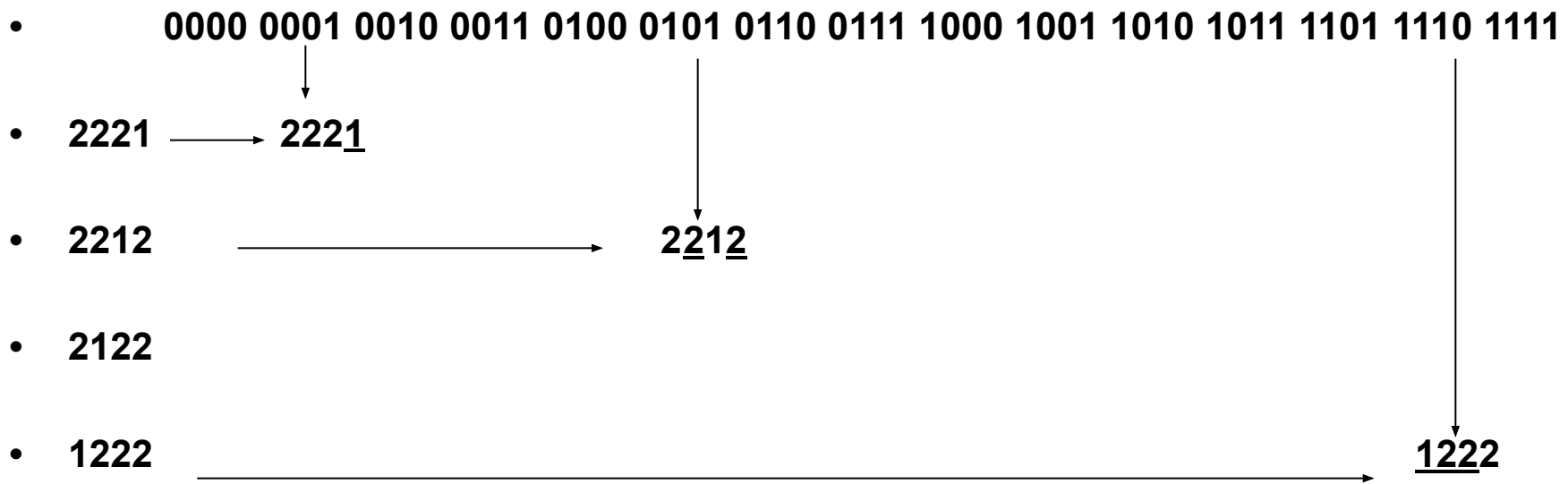
# Этапы вычисления единичной 3-сферы.



- A1 генерирует все кубанты с тремя буквами из  $\{2, \underline{2}\}$  и одной из  $\{1, \underline{1}\}$
- A2  $\square$  смежные грани, A3  $\square$  вершины 3-грани, A4  $\square$  ребра в 3-грани
- A5  $\square$  проецирует вершины на единичную сферу  $S^3$ .

# Вычислимость и эnumератор.

- A1-эnumерация всех кубических 3-граней для проекции на сферу с помощью матрицы (столбцы соотв.знакам):



- Порядок генерации по строкам с 1-ой по 4-ую, т.о. №(2212)= (m-1)16+5=21, где m-номер разряда с 1, 5-номер столбца.
- №=63 □ 63/16=3(15) □ 3+1(строка 4), 15 (столбец 1110)=1222

# Экстраполяция на n-мерный случай.

- Кубическая n-мерная сфера как множество n-мерных кубических граней:
- $S^n(D) = \{ \forall D(n+1): d^n \in \{2, 2\}, d \in \{1, 1\} \};$
- Общее правило проекции на сферу (A5):
- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \square (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n);$
- $\xi_i = x_i / \sqrt{\sum x_k^2};$
- (x)-вершина (целая точка) на кубической грани,  
(ξ)-вершина на сфере
- Алгоритмы A1, A2, A3, A4 без изменения.

# Сравнительная анатомия 4-окрестности и единичной $S^3$ .

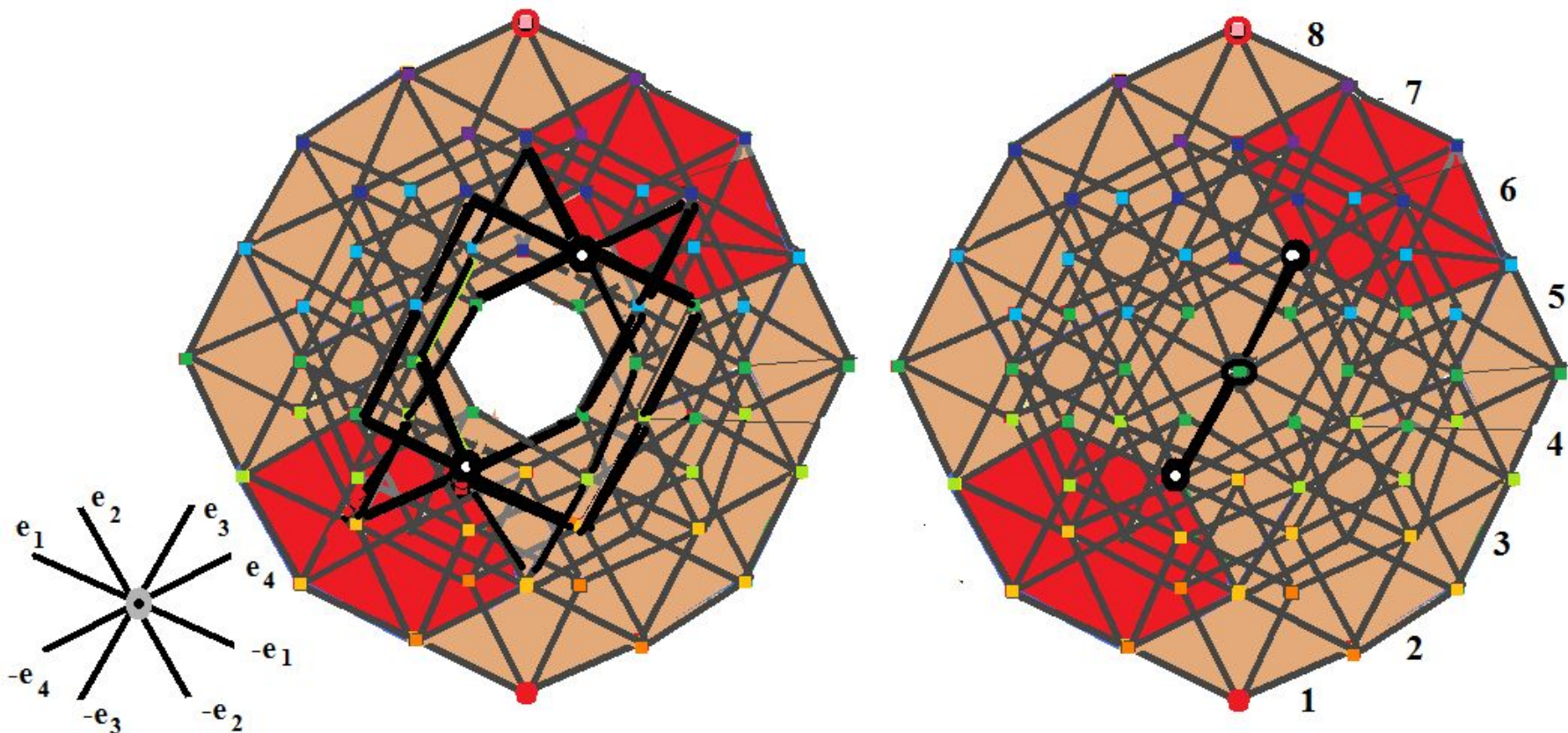
- Вершин 81; 80;
- Ребер 216; 208;
- 2-Граней 216; 192;
- 3-Граней 96; 64;
- 4-Граней 16; 0;



# Матрица смежности для вершин на $S^3$ (проекция вершин кубической 4-окрестности) 80x80

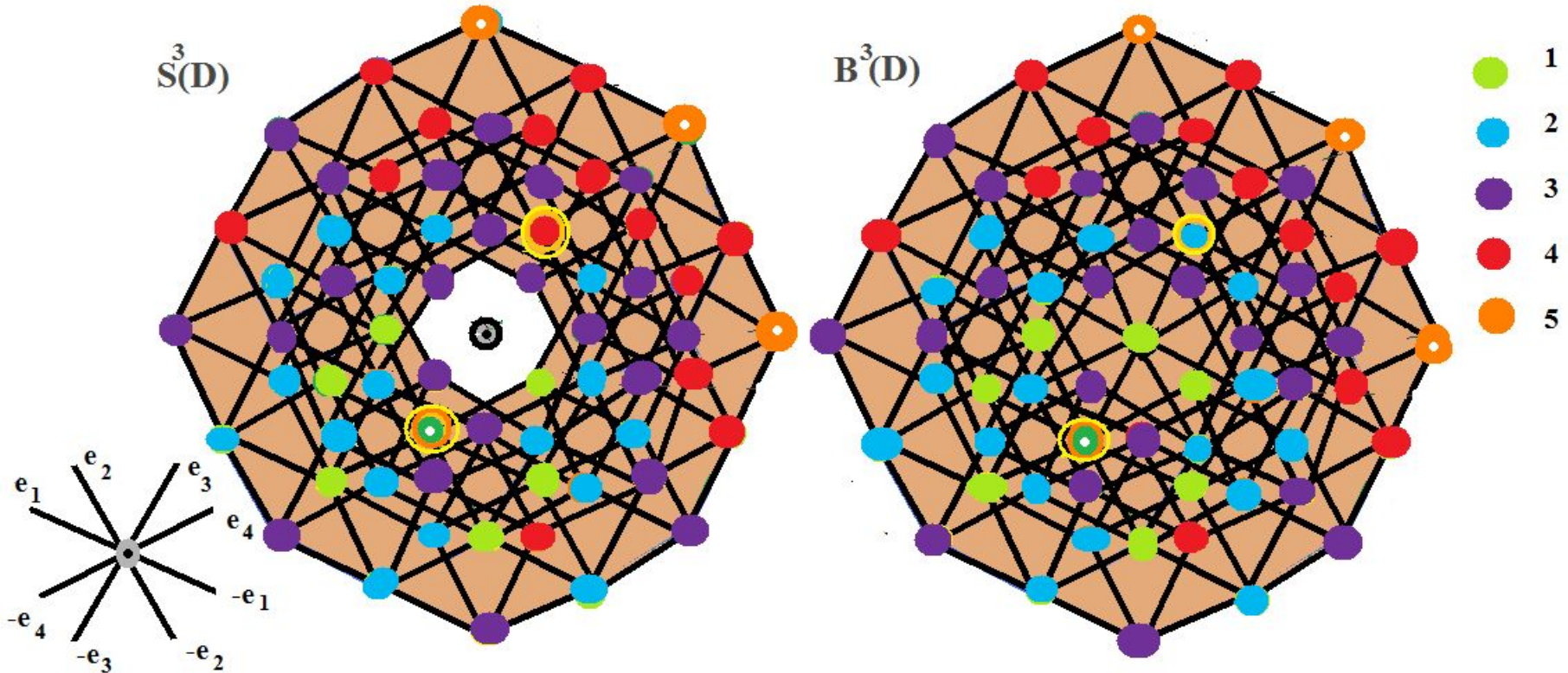
- Обозначения координат:  $1 \square +; 0 \square 0; \underline{1 \square |}$ ; элементов в матрице:  $1 \square x; 0 \square .; (+ + 0 - \square 110 \underline{1})$

# Удлинение НН-расстояний в $S^3(D)$ .



- Удлинение в  $S^3(D)$ , когда в 4-окрестности  $L_{\min}$  проходит через 0000.

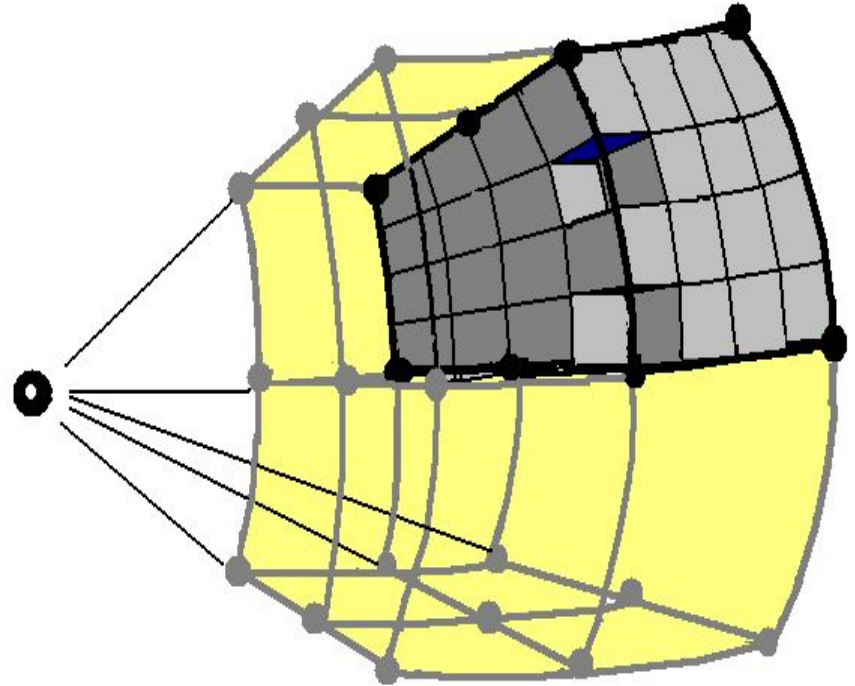
# Фронты волны в $S^3$ и $B^3$ .



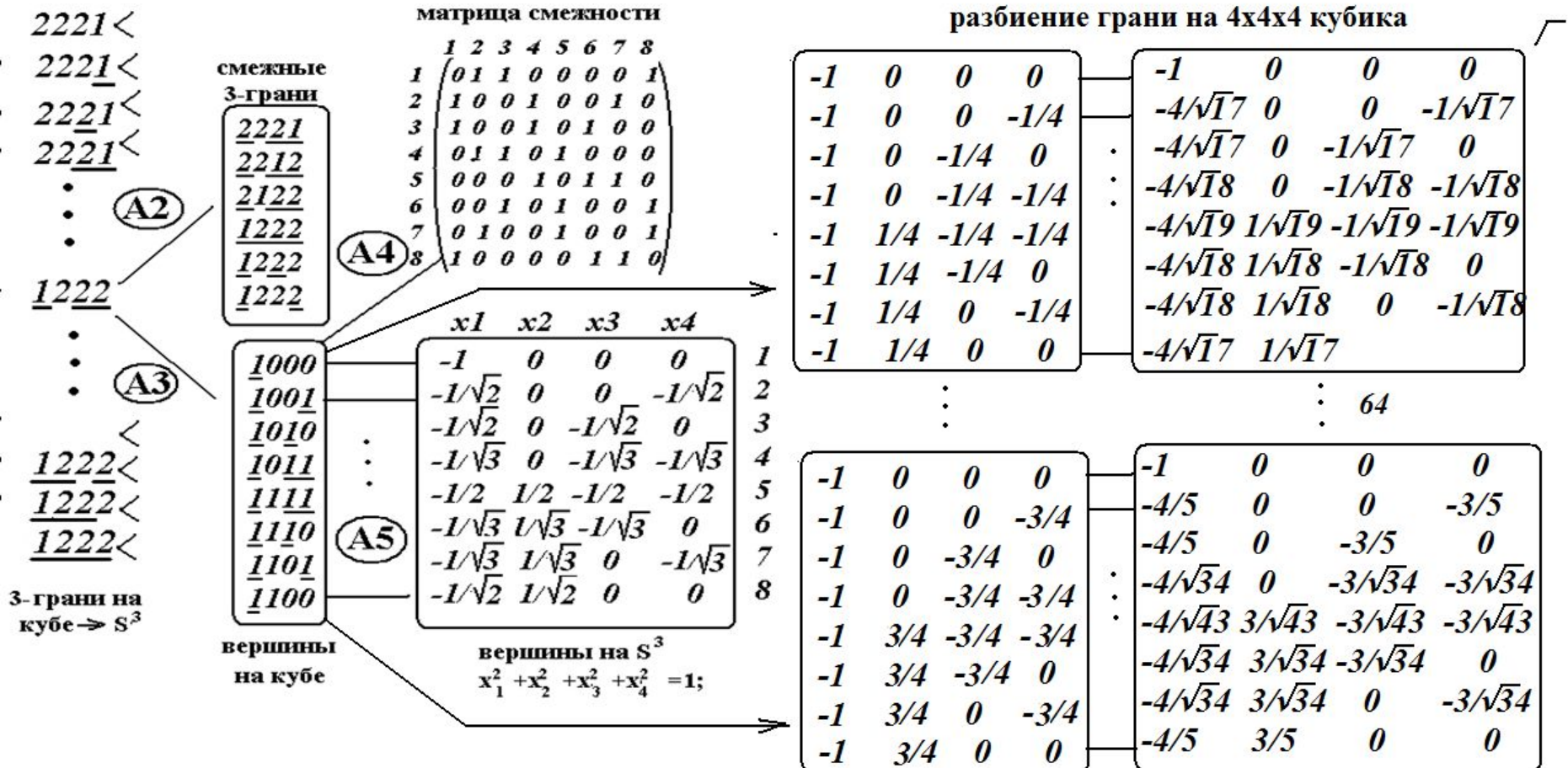
- Фронты волны от зеленой вершины отличаются только в одной вершине, исключая вершину 0000.

# Дальнейшая дискретизация $S^3$ .

- Каждый псевдо 3куб как грань  $S^3$  в  $R^4$  разбивается на  $2^k \times 2^k \times 2^k$  меньших кубов.
- Вычисление координат вершин этих кубов аналогично вычислению координат вершин для граней  $S^3$ .

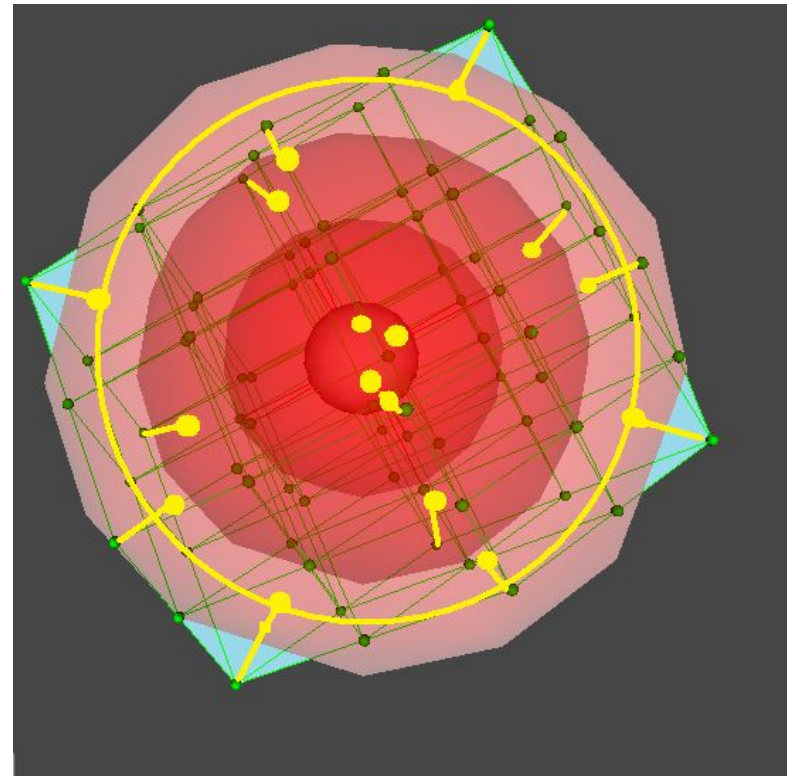
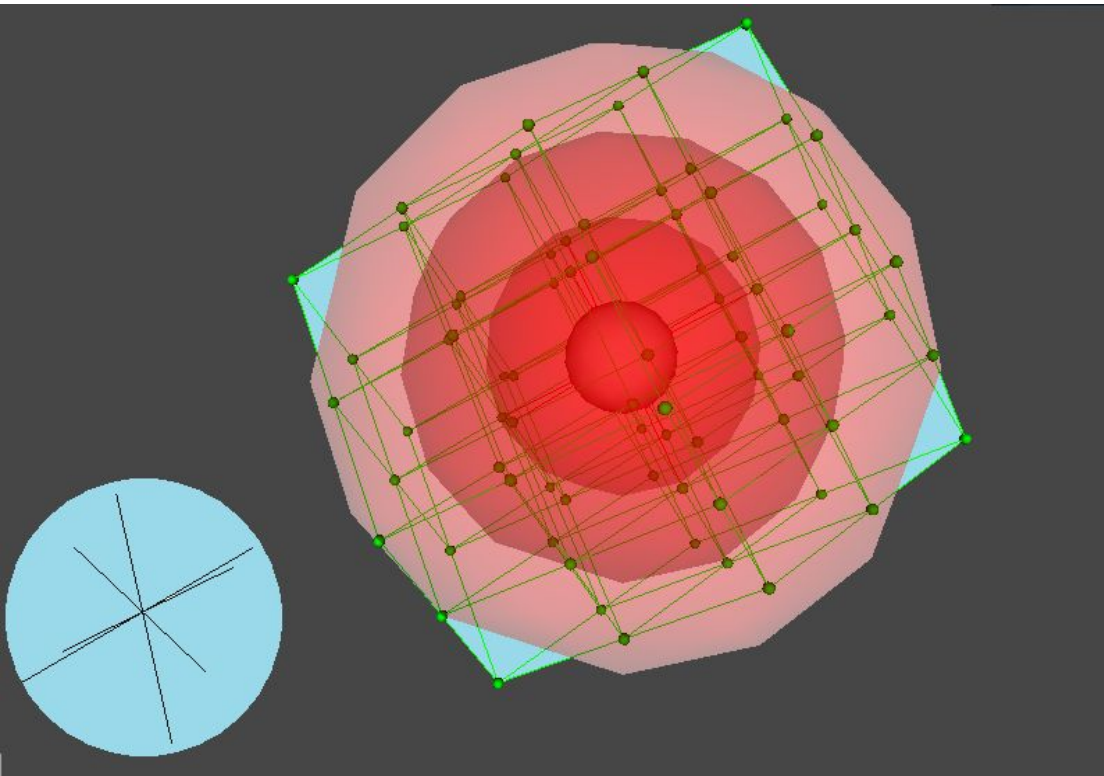


# Дальнейшие вычисления при дискретизации $S^3$ .



- Пример разбиения единичной  $S^3$  на  $64 \times 64 = 4096$  псевдокубических граней. (Продолжение «Этапы вычисления 3-сферы»)

# Графическое приближение $S^3$

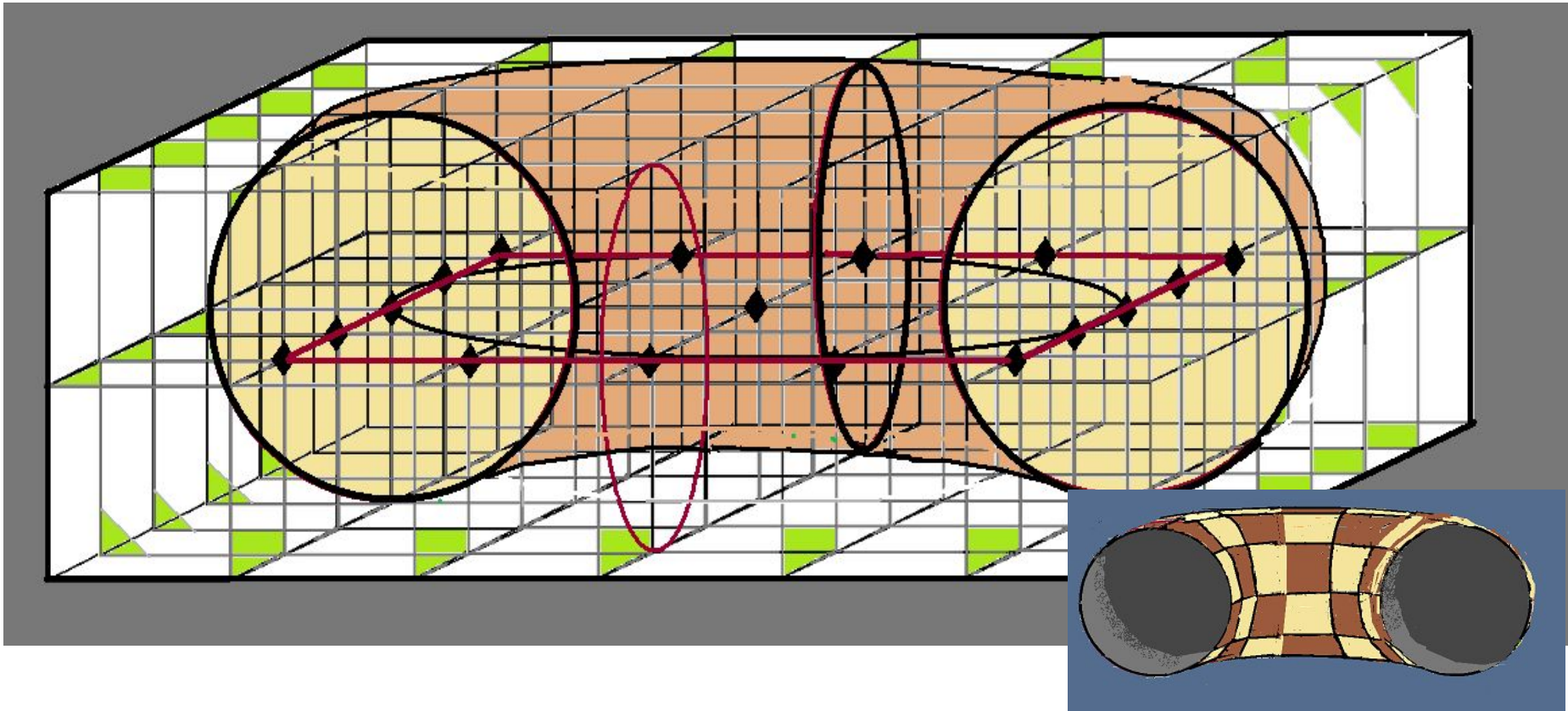


- 4-окрестность без внутренних граней, содержащих (0000)
- Проекция вершин на сферу  $\sum x_i^2=1; i=1-4$ ;

# Дискретизация, триангуляция и мозаичное разбиение 3-сферы по аналогии с 2-сферой. Оценки для суперкомпьютера.

- Сравнительные данные с MITgcm.
- Дискретизация 16,32,64 для  $S^2$  □  
256x6;1024x6;4096x6.(псевдоквадратов).
- Дискретизация 16,32,64 для  $S^3$  □  
 $4K \times 64 = 1/4K^2$ ;  $32K \times 64 = 2K^2$ ;  $256K \times 64 = 16K^2$ ;  $K^2 \sim 10^6$
- Одноразовый проход по всему многообразию  $S^3$  с числом операций  $10^6$  для каждого дискрета возможен на «Чебышеве» за секунды.

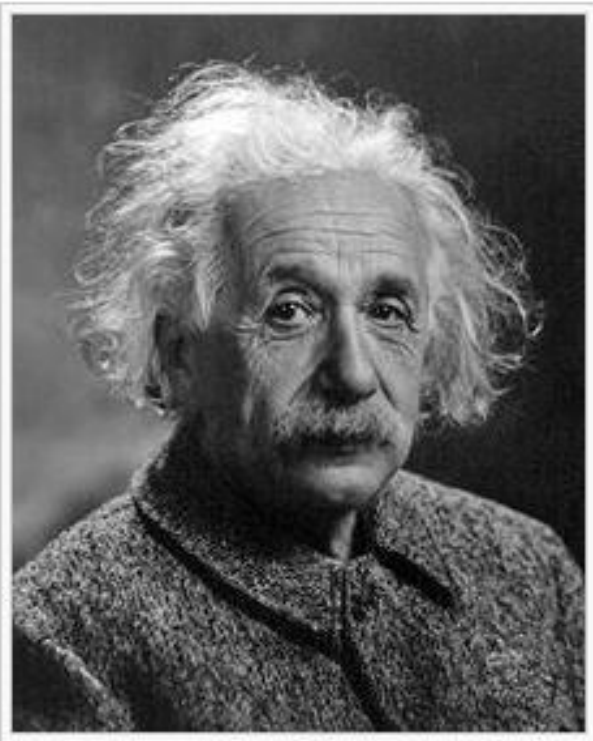
# К построению многообразия 3-тора.



- Схема-аналог для построения 2-тора.Расширение окрестности  $(3 \times 3 \times 1)$  и удаление внутренних 2-граней с вершинами  $\blacklozenge$ . (Углы окрашены зеленым цветом). Затем проекция на поверхность тора.



# О значении визуализации.



- If I can't picture it,  
I can't understand it.
- А.Эйнштейн

# Графическое обеспечение многомерных кубических структур.

- Адекватное представление – алгебраическое, геометрическое- скорее метафорическое. Наиболее эффективно построение графического образа прямо по алгебраической форме.
- 2d и 3d отображения многомерных структур должны комментироваться описанием искажений (аффинных и др.) в графике.
- Особое значение приобретает цвет, как средство выделения подмножеств с определенными свойствами.
- Динамика осмотра и анимация эволюции- важный элемент для графики многомерных объектов.
- Создание специального ПО целесообразно как надстройка над открытыми системами Open GL и VRML.

# Проблема масштабирования.

- Визуализация многомерных структур должна предусматривать элементы масштабирования, прежде всего по размерности пространств  $n$ . Для кубических структур настройку параметров изображения (вершин, ребер и т.д.) для комфортной визуализации.
- Поскольку технические возможности аппаратуры весьма ограничены, специальное ПО должно позволять не только сигнализировать о практической невозможности отображения целиком объекта, но и предлагать воспроизвести допустимый фрагмент объекта.

Программная среда для визуализации и  
расчётов над кубантами.

**Qcubant 1.0**

# Встроенный интерпретатор

- В Qsubant встроен интерпретатор языка javascript, позволяющий быстро, без компиляции, в режиме реального времени производить операции над ними и выводить результат в соответствии с заданным режимом отображения.
- Также поддерживается ряд операций над кубантами и кубическими комплексами – это операции “умножение кубантов”, “выпуклая оболочка”, “наибольший общий кубант”, и другие
- Добавлена поддержка кросскубантов как подкласс кубантов со смещением по осевым направлениям.

# Возможности визуализации

- 2 варианта визуализации – трехмерный и двумерный.
- Настраиваемые параметры отображения – цвет, форма граней и вершин
- Настраиваемый репер (базис) для отображения
- Возможность вывода в VRML
- Возможность создания множественных отображений, соответствующих одной сцене

# Применение на суперкомпьютерах

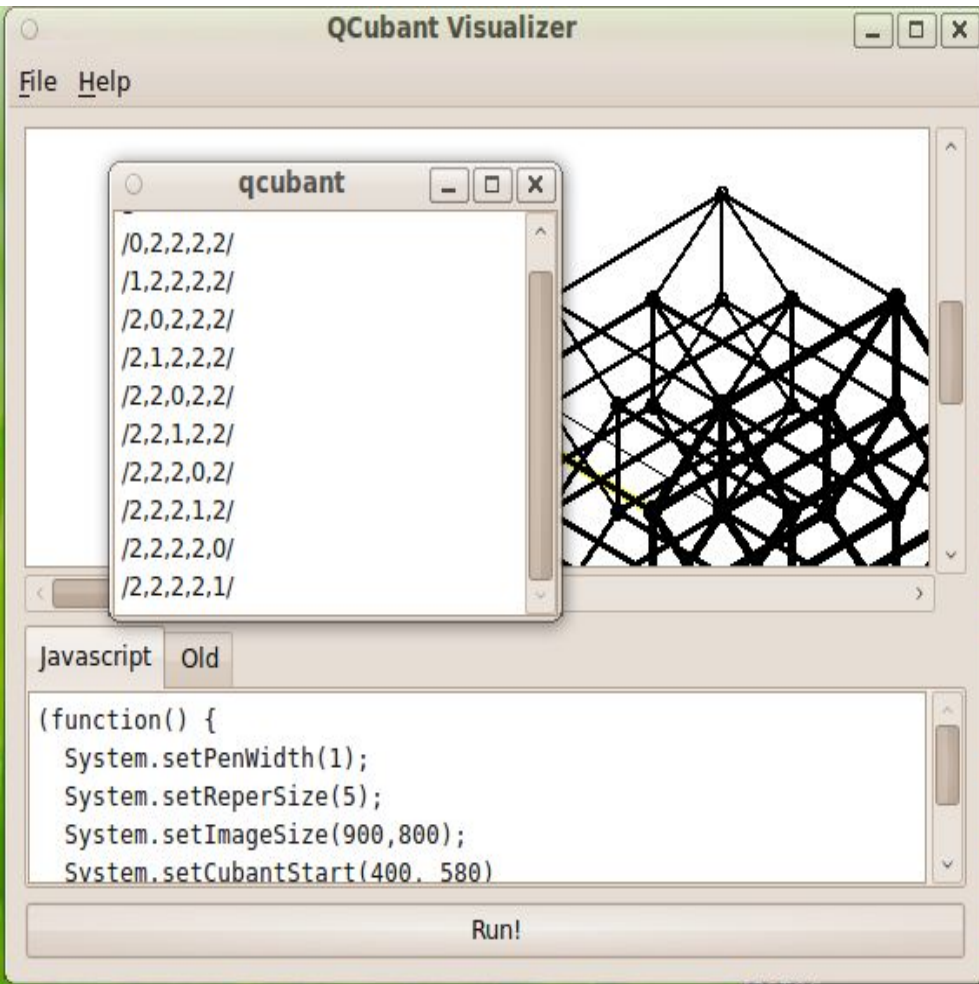
- Структура приложения организована так, что часть программы, которая отвечает за логику отделена, и может использоваться самостоятельно. Эту часть можно использовать на суперкомпьютерах для расчетов, связанных с кубантами.
- С другой стороны, эта часть используется в приложении Qcubant и может быть вынесена оттуда как отдельная программная библиотека.

# Возможности системы

- Отрисовка кубантов
- Простейшие операции
- Отображение в виде двух проекций – 2D и 3D
- Встроенный интерпретатор языка Javascript

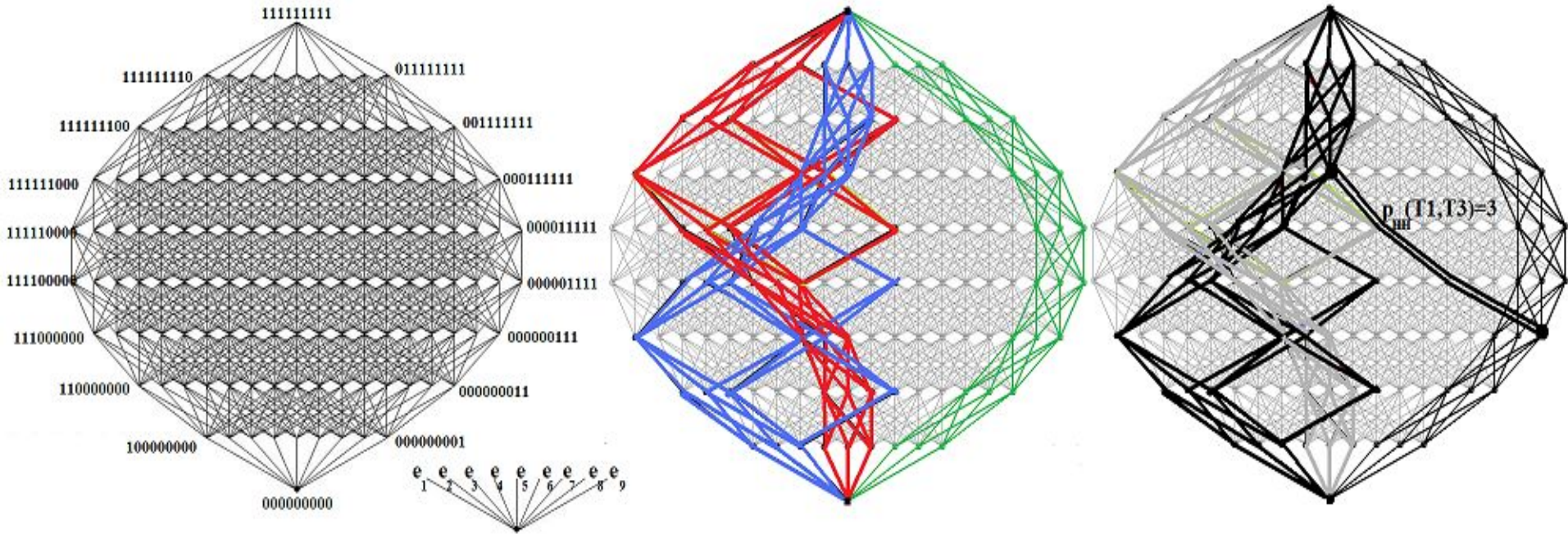


# Вид программы



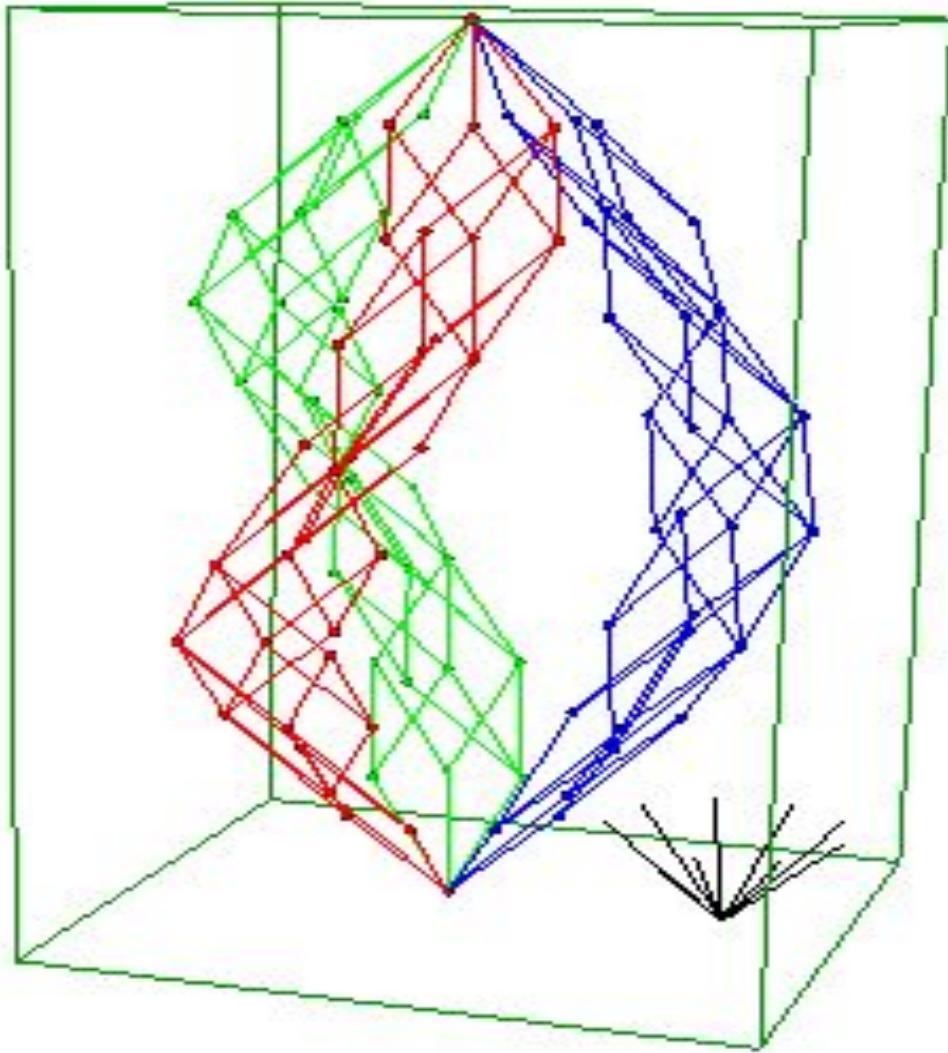
- Внешний вид программы- слева,
- Снизу javascript-представление,
- Вверху двумерная проекция для кубантов 5-мерного куба.

# Двухмерная проекция



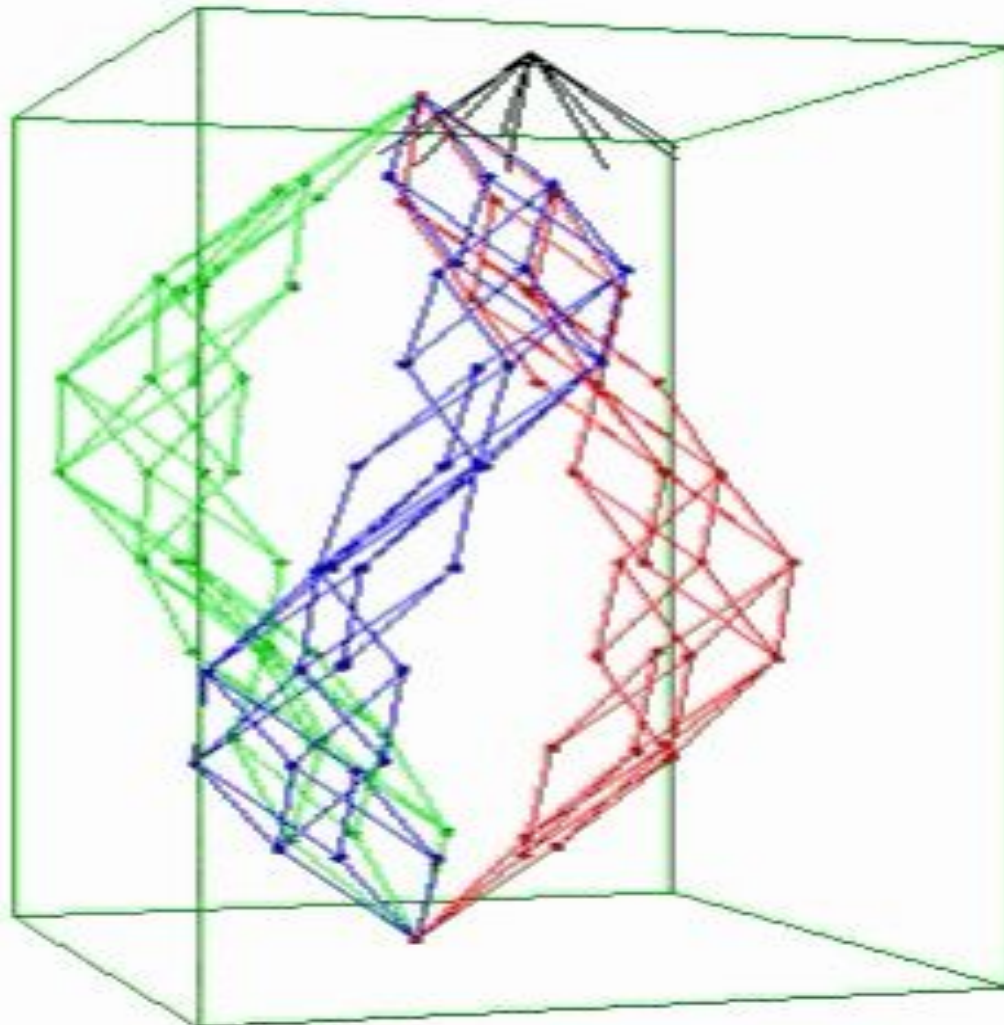
- Двумерная проекция кубантов (“туннели метро”)

# Трёхмерная проекция

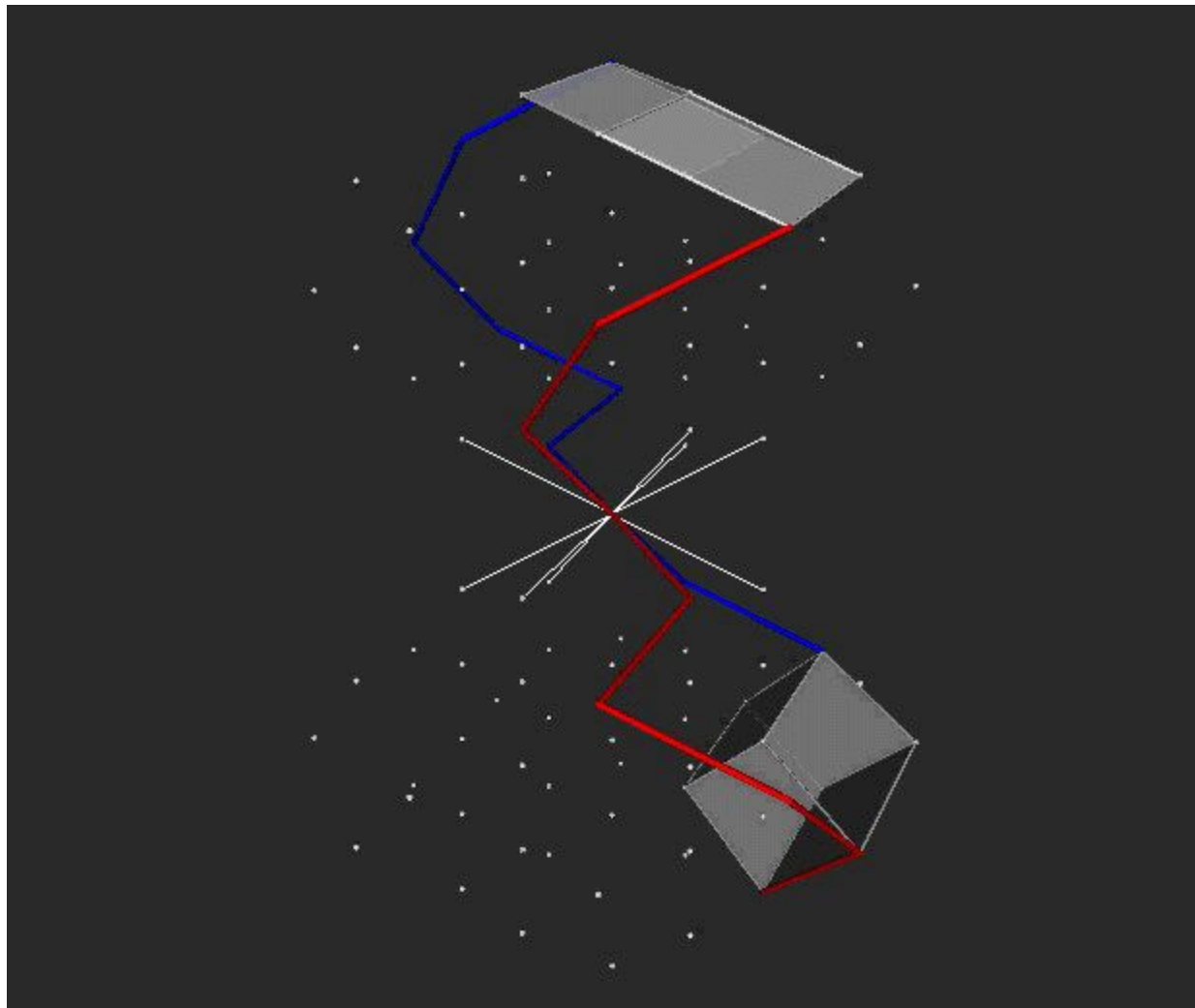


- Слева представлена трёхмерная проекция комплекса кубантов.

# Проекции 3-мерных комплексов в 9-кубе со всех сторон.



# Пример динамической графики для отображения расположения кросс-кубантов в 6-окрестности.



# Эмуляция операторов и расчеты с их использованием на суперкомпьютере «Чебышев»

- Пользовательская нотация используется для хранения кросс-кубантов в файлах и графического отображения.
- Машинная нотация используется непосредственно в вычислениях.

# Нотации для представления кросс-кубантов (пользовательская, машинная).

- Пользовательская нотация используется для хранения кросс-кубантов в файлах и графического отображения.
- Машинная нотация используется непосредственно в вычислениях.

## Пользовательская нотация

$\{ [ , ] ( ) ( ) [ ] ( ) ( ) \dots [ ] ( ) \} \dots \{ \}$

$\{ \}$  - комплекс из единичных n-кубов

$[ x_1, x_2, \dots, x_n ]$  – координаты единичного n-куба в составе комплекса  $\{ \}$

$( c_1, c_2, \dots, c_n )$  – кросс-кубант, в составе единичного n-куба. Разряды кросс-кубанта могут быть из пользовательского алфавита  $\{ \emptyset_1, 0, 1, 2, \emptyset_2, -1, -2 \}$ . Кросс-кубанты, входящие в состав единичного n-куба, следуют сразу за координатами этого куба:

$[ ] ( ) ( ) \dots$

В дальнейшем, по мере усложнения задач, нотация может быть расширена. Например, могут быть добавлены идентификаторы комплексов:  $\{ A \} \{ B \}$  и т. д.



## Машинная нотация

Разряды кросс-кубанта могут быть из машинного алфавита  $\{0,1,2,3, 4,6,7\}$ .

Машинная нотация получается из пользовательской путем следующего преобразования :

$\emptyset_1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \emptyset_2 \rightarrow 4, -1 \rightarrow 6, -2 \rightarrow 7$

Реализованы две функции для перехода от одной нотации к другой и обратно.

# Основные структуры данных и формат файлов для представления кросс-кубантов.

Формат файла  $\{A[,,]()( ) [ ]( ) ( ) \dots [ ]( )\} \dots \{B\} \dots$ . Нотация соответствует пользовательской.

Структуры данных представляют собой набор классов:

- класс "Куб", содержащий координаты единичного n-куба и набор кросс-кубантов в составе этого куба. Под координатами куба понимаются координаты его начальной точки (точка с координатами  $(0,0,\dots,0)$  в локальной системе координат данного куба). Набор кросс-кубантов реализован в виде одномерного массива.

- класс "Комплекс". Содержит идентификатор комплекса и все единичные n-кубы, входящие в состав данного комплекса. Кубы хранятся в виде одномерного массива.

Если необходимо работать с несколькими комплексами, то они, в свою очередь, помещаются в массив.

Все массивы динамические и реализованы средствами библиотеки STL C++. Размерность пространства, в данной реализации, одинакова для всех объектов.

# Вспомогательные структуры данных.

Используется ряд вспомогательных структур, которые ускоряют процесс вычисления. В частности, таблицы для операции умножения кросс-кубантов, хаусдорфова сжатия, операции выделения выпуклой оболочки, кодированного представления кросс-кубантов, таблица для разложения кросс-кубантов на составляющие (и полуцелые) точки.

# Структуры данных, используемые в параллельной реализации.

В параллельной реализации используются аналогичные основные и вспомогательные структуры данных. Также присутствуют специфические дополнительные структуры - буферы для обмена информацией между вычислительными узлами.

Добавлена возможность представления кросс-кубанта как самостоятельного элемента, а не в составе единичного  $n$ -куба. Это вызвано необходимостью обмена данными между вычислительными узлами, который требует линейного размещения данных в памяти, в не структурированном виде. В таком представлении кросс-кубант задается следующим образом: [идентификатор комплекса][координаты единичного  $n$ -куба][кросс-кубант]. В памяти машины он представляется как одномерный массив.

# Набор последовательных функций для работы с кросс-кубантами.

- Вспомогательные функции, функции для работы с файлами и подготовки к вычислениям. Функции для генерации комплексов из кросс-кубантов (алгоритм произвольной кривой, замкнутые комплексы), функции для чтения \ записи данных из текстовых файлов, функции для анализа содержимого файлов (парсер) и заполнения структур данных в памяти компьютера, функция перевода из пользовательского представления кубантов в машинное и обратно.

Реализованы некоторые геометрические операции с  $n$ -мерными векторами.

- Операторы для работы с кросс-кубантами: умножения, хаусдорфова сжатия, проверки на пересечение и определения кратчайшего пути, выделения выпуклой оболочки, выделения границы.

- Функции для работы с комплексами кросс-кубантов внутри единичного  $n$ -куба: функция умножения двух комплексов, функция проверки на пересечение, функция сжатия, функция проверки на связность комплекса и выяснения его топологической структуры, функция определения кратчайшего пути между комплексами, функция определения Хаусдорф-Евклидова и Хаусдорф-Хеммингова расстояния между комплексами, функция рекурсивного построения гамильтонова цикла в единичном  $n$ -кубе, выделение границы.

- Функции на уровне комплексов из  $n$ -кубов: вычисление Хаусдорф-Евклидова расстояния.

## Набор параллельных функций для работы с кросс-кубантами.

- Функция для “по-кубантного” представления комплексов (см. выше Структуры данных) и функция распределения входных данных по вычислительным узлам. Размещение данных происходит равномерно по всем узлам, с точностью до кросс-кубанта. Для разных алгоритмов применяются различные схемы распределения, в зависимости от характера задачи (степени информационной зависимости).
- Функция вычисления Хаусдорф-Евклидова расстояния между комплексами в  $n$ -мерном пространстве и функции определения Хаусдорф-Евклидова и Хаусдорф-Хеммингова расстояния между комплексами внутри единичного  $n$ -куба.

## **Графическое представление.**

Графическое отображение средствами VRML. Трехмерное сферическое представление  $n$ -мерных комплексов кросс-кубантов внутри единичного  $n$ -куба ( $n$ -окрестность).

# Тестовые задачи с использованием функций инструментария.

- Тестирование и отладка всех реализованных на данный момент функций инструментария.
- Комплексная задача вычисления Хаусдорф-Хеммингова расстояния между двумя  $n$ -комплексами внутри единичного  $n$ -куба. Задача вычисления Хаусдорф-Евклидова расстояния между двумя  $n$ -комплексами в  $n$ -мерном пространстве. Сравнение с результатами оператора метрической волны в трехмерном случае.
- Комплексная задача определения Хаусдорф-Хеммингова расстояния для всех пар кросс кубантов внутри единичного  $n$ -куба.

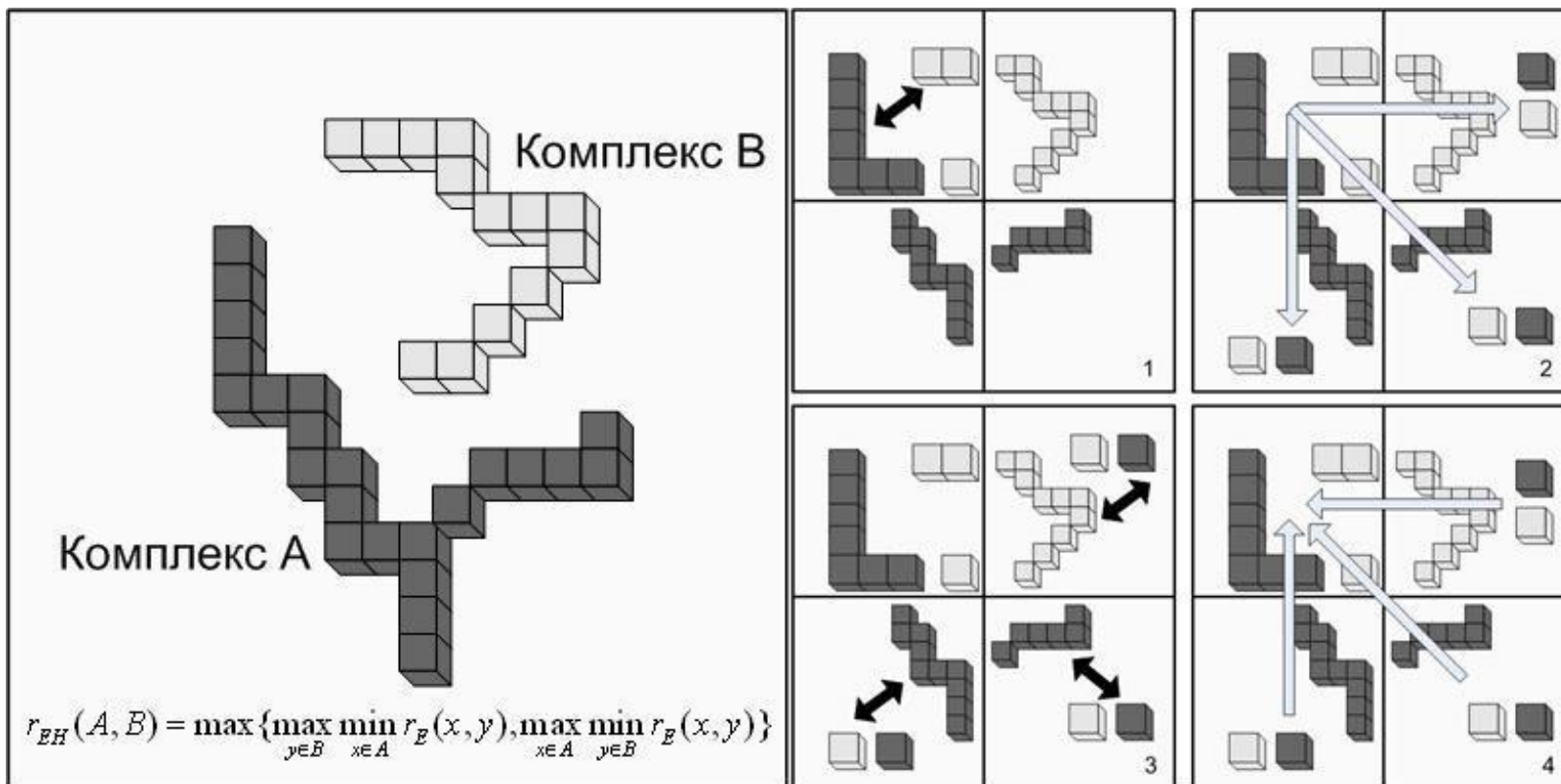
Задачи решались как на однопроцессорном компьютере, так и на кластере.



# Особенности параллельной реализации задачи определения Хаусдорф-Евклидова расстояния между двумя $n$ -комплексами в $n$ -пространстве.

- Довольно сильная информационная зависимость задачи, так как комплексы распределены по всем вычислительным узлам.
- Решение задачи, в первую очередь, ориентировано на саму возможность расчета Хаусдорф-Евклидова расстояния для больших  $n$  за счет использования памяти кластера.
- Алгоритм распределения “по-кубантный”.
- В трехмерном случае результаты вычислений данным алгоритмом и алгоритмом метрической волны совпали.

# Параллельный алгоритм расчета Хаусдорф-Евклидова расстояния $r_{EH}$ . Изображены этапы вычислений (1-4) только для одного из узлов кластера.

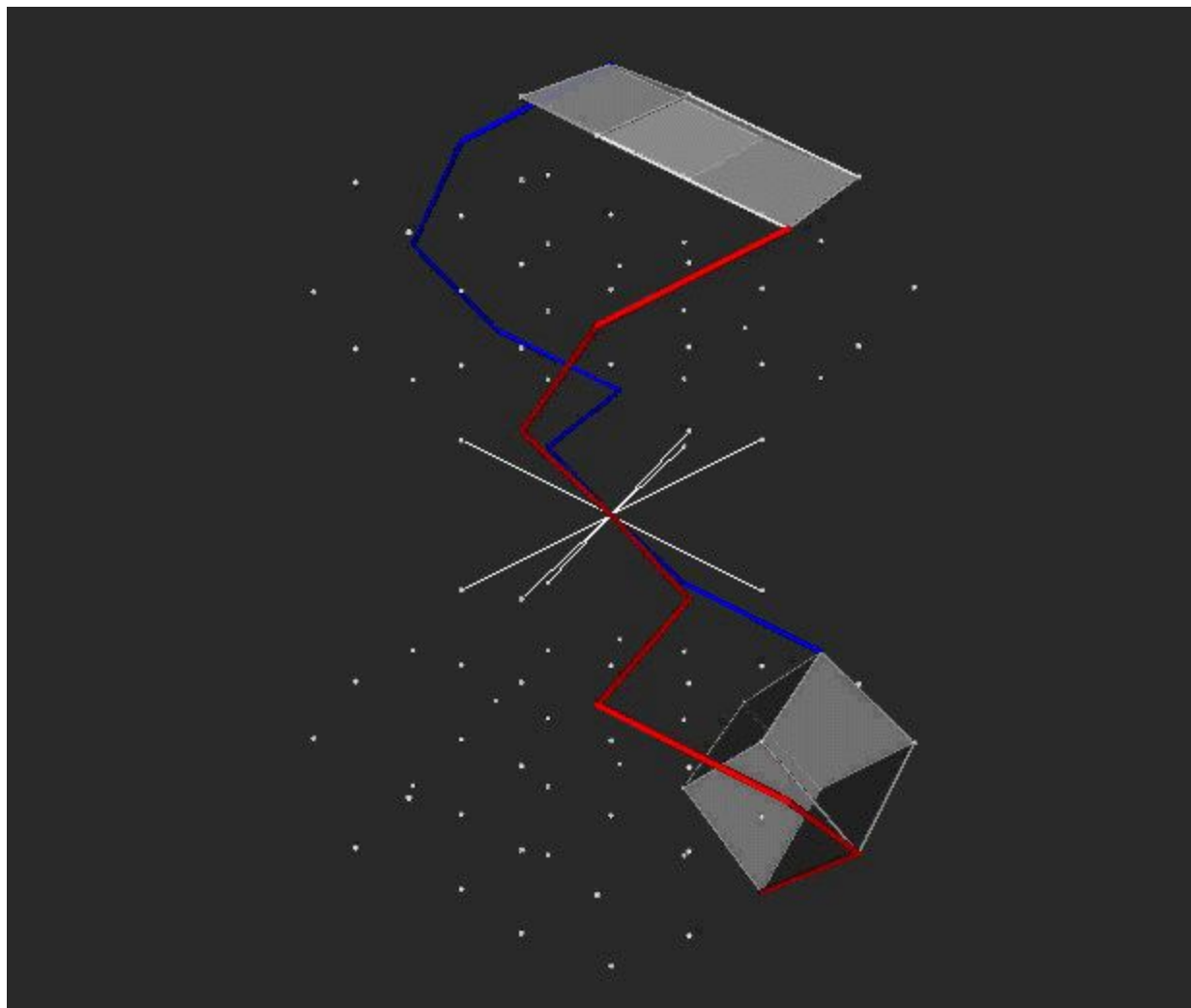


# Особенности параллельной реализации задачи определения Хаудорф-Хеммингова расстояния между всеми парами кросс-кубантов в единичном $n$ -кубе.

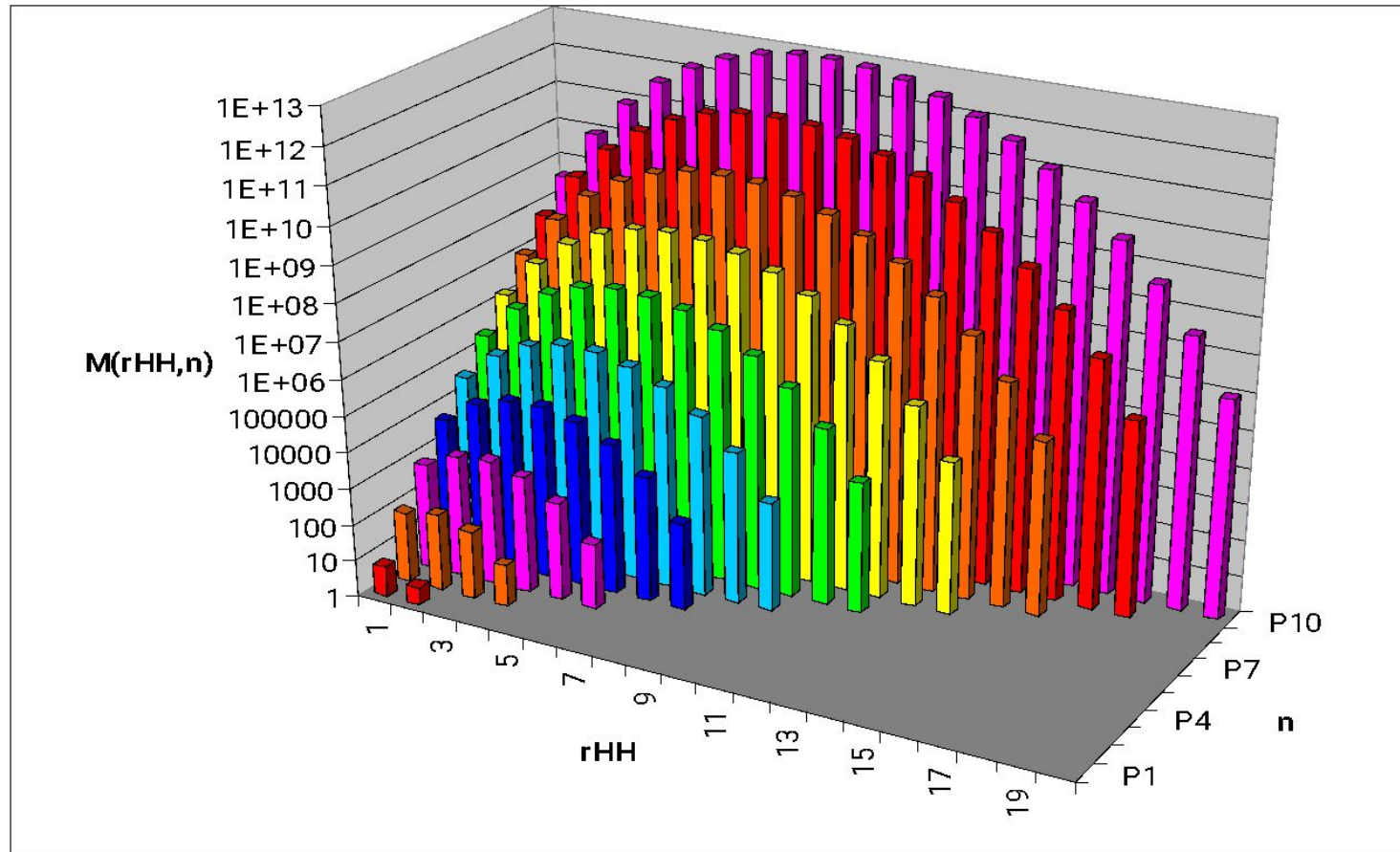
- Полная распараллеливаемость задачи, как следствие – линейное ускорение.
- Алгоритм распределения вычислительной нагрузки по узлам кластера на основе учета количества пар кросс-кубантов
- Генерация пар кросс-кубантов в режиме реального времени (экономия памяти для задач большой размерности)
- На диаграмме:  $n = 1, \dots, 7$  – расчет с помощью последовательного алгоритма,  $n = 8, \dots, 10$  – с помощью параллельного. Расчет производился на кластере НИВЦ МГУ “Чебышев”. Результаты приведены в таблице и в виде трехмерной диаграммы:

Размерность $n$	Количество ядер	Время $t$ , мин
8	64	19 мин
9	128	4 часа 23 мин
10	768	14 часов 9 мин

**Графическое представление задачи нахождения Хаусдорф-Хеммингова расстояния для всех пар кросс-кубантов внутри  $n$ -окрестности.**



# НН-расстояния всех пар кросс-кубантов в n-окрестности.



$\rho_{HH}$

dim  
n

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	6	7	3																		
2	25	86	128	72	14																
3	125	766	2176	2644	1614	492	60														
4	625	5900	26568	52704	56940	38208	13616	2816	248												
6	3125	41875	271075	779880	1256380	1267192	817480	347840	93880	14640											
6	15625	281250	2483000	9608360	21210330	29758416	28197680	18584064	8577960	2731680	1008	673888	71808	4064							
7	78125	1815625	20619375	104323100	299790810	653379764	703000900	639369472	425016976	207799088	74163152	18853184	3242848	339136	16320						
8	390625	11375000	162350000	1031632000	3726155160	8688301216	14080275104	16591605760	14813128144	9789151104	4984917504	1934291968	562540160	119049728	17351168	1560576	65408				
9	1963125	69609375	1218671875	9489330000	41983918200	120169308304	240285142608	352489263760	391520777040	336017363120	225494760096	118913294692	49195284096	15824164608	3885408000	704937984	89232768	7047936	261888		
10	9765625	417968750	8801250000	82372125000	4,37578E+11	1,50451E+12	3,62424E+12	6,43788E+12	8,72714E+12	9,24114E+12	7,76323E+12	5,22338E+12	2,82723E+12	1,23047E+12	4,28155E+11	1,17684E+11	25025105280	3977418240	445399040	31385600	1048064

# Перспективы развития (теоретические).

- Развитие алгебры кубантов для  $n$ -окрестности радиуса  $r > 1$ . Модификация (универсализация) алфавита.
- Развитие методов проецирования кубических комплексов и многообразий на гладкие тела.
- Стыковка с предикатными конструкциями пространственной логики.
- Развитие стринговой структуры организации памяти компьютера и символьных операций.

# Перспективы технические.

- Разработка архитектуры сопроцессора, ориентированного на решение многомерных комбинаторно-топологических задач.
- Моделирование сопроцессора на уровне межрегистровых пересылок.
- Оценки экономичности аппаратных и программных реализаций операций сопроцессора и его места в суперкомпьютерной структуре.

# Литература

- 1.Новиков С.П. Топология. Москва-Ижевск.РХД.2002.
- 2.Долбиллин Н.П.,Штанько М.А.,Штогрин М.И. Кубические многообразия в решетках.// Изв.РАН.Сер. матем.1994.**58**. вып.2.93-107
- 3.Деза М.,Штогрин М. Вложение графов в гиперкубы и кубические решетки.// Успехи матем. наук.1997.52.№6.155-156.
- 4.Деза М.,Штогрин М. Мозаики и их изометрические вложения.// Изв. РАН.Сер. матем.2002.66.№3.3-22.
- 5.Matveev S., Polyak M. Finite type Invariants of Cubic Complexes.//Act.Appl.Math.75.2003.pp.125-132.
- 6.Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. МЦНМО.2004.
- 7.Бухштабер В.М. Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения.// Труды МИРАН.2008.263.18-43.
- 8.Kontchakov R., Pratt-Hartmann J., Wolter F., Zakharyashev. Spatial Logics with Connectedness Predicates.//Log.Methods in Comp.Science. Vol.6(3:5) 2010,pp.1-43.
- 9.Marshall J., Adcroft A., Campin J-M., Hill C. Atmosphere-Ocean modelling exploiting fluid isomorphisms.//Boston.MIT.2002
- 10.Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes.// Bell system Tech.Journal. 1950.**29**(2) 147-160
- 11.Baez J., Stay M. Physics, topology, logics and computation: a Rosetta Stone//arXiv:0903.0340v3[quant-ph].6 June 2009
- 12.Baez J.,Lauda A. A Prehistory of n-categorical Physics.// arXiv: 0908.2469.v1 [hep-th] 18 Aug 2009.



- 13.Lauda A. Frobenius algebras and planar open string topological field theories.// arXiv: math(0508.349 v1) [math QA] 18 Aug 2005.
- 14.Stanley R. Combinatoric and Commutative Algebra.// Birkhauser.1996
- 15.Manin Yu.I. Classical computing, quantum computing and Shor's factoring algorithm. // arXiv: quant-ph/9905008 v1. 2 March 1999.
- 16.Ambjorn J.,Jurkevicz J.,Loll R. The Universe from Scratch. // arXiv: hep-th/0509010 v3. 14 Oct 2006.
- 17.Coecke B., Quantum picturalism.// arXiv:0908.1787v1[quant-ph] 13 Aug 2009.
- 18.Ryabov G.,Serov V., Simplicial-lattice model and metric-topological constructions.// Proc. of IX Conf. on Pattern Recognition and Inf. Processing. V2. Minsk.2007.135-140
- 19.Рябов Г.Г. О путевом кодировании k-граней в n-кубе. //Вычислительные методы и программирование. 2008.**9**.N1.20-22
- 20.----- О четверичном кодировании кубических структур.// Вычислительные методы и программирование. 2009.**10**.N2,154-161
- 21.----- Хаусдорфова метрика на гранях n-куба. //Фундаментальная и прикладная математика.2009.(в печати).
- 22.-----Алгебраическое представление кубических структур и супервычисления.//Сб.Программные системы и инструменты. ВМиК МГУ.2009.№10,12-26
- 23.Рябов Г.Г.,Серов В.А. О метрико-топологических вычислениях в конструктивном мире кубических структур.//Вычислительные методы и программирование.2010.**11**.N2.146-155