Тема 2

МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Часть 2

Эффективные физико-механические характеристики неоднородных твердых тел

Упругие характеристики материалов, составляющих исследуемое неоднородной тело, не дают нам представления об упругих характеристиках тела как целого.

Необходимо знать, какую долю объема занимают те или иные компоненты, включения, их форму и размеры, определить связи между ними и т.д.

Задача описания упругих свойств *гетерогенных сред* (материалы с неоднородными физическими свойствами), зная свойства отдельных компонент, составляющих среду, может быть решена, например, ***путем определения эффективных упругих характеристик.***

Эффективные физико-механические характеристики неоднородных твердых тел

С точки зрения построения теории деформирования структурированных сред, более целесообразным является сохранение гипотез классической теории МДТТ в первоначальной формулировке и отказ от гипотезы об однородности среды, введение определенной операции осреднения и (на ее основе) эффективных макроскопических характеристик среды.

В этом случае средние (эффективные) поля перемещений и напряжений становятся главными функциями координат, но при этом возникают дополнительные параметры, характеризующие флуктуации свойств полей перемещений и напряжений.

Весьма важным является введение гипотезы континуума, которая включает в себя процедуру *статистического осреднения*, посредством которой действительное состояние и структура реального объекта идеализируются таким образом, что последний считается континуумом

Эффективные физико-механические характеристики неоднородных твердых тел

Неоднородность среды в подходе МСС рассматривается как идеализация непрерывного изменения свойств от точки к точке или как скачкообразные изменения свойств при прохождении через поверхности раздела.

Рассмотрим подходы к построению эффективных характеристик неоднородных твердых деформируемых тел, которые относятся к категории *статистически квазиоднородных сред*.

Например, к такому классу относятся объекты с большим количеством отдельных элементов, кусков; с «беспорядочным и хаотичным» проявлением плоскостей ослабления и т.п.

Эффективные физико-механические характеристики неоднородных твердых тел

В качестве основной модели рассматривается модель стохастически неоднородной среды в рамках линейной теории упругости

Определяющие соотношения МДТТ для неоднородной среды

$$\sigma = \hat{F}(\varepsilon, \overline{x}) \quad \left(\sigma_{ij} = \hat{F}_{ijlm}\varepsilon_{lm}\right) \qquad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = \hat{G}(\sigma, \overline{x}) \qquad (2)$$

Операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$ являются взаимно-обратными.

Эффективные физико-механические характеристики неоднородных твердых тел

Можно каким-то образом найти некие “осредненные” материальные функции (например, на образцах из неоднородного материала, в которых однородное НДС реализуется только в среднем). Найденные материальные функции описывают *эффективные определяющие соотношения* (1) и (2).

$$\langle \sigma \rangle = \hat{f}\big(\langle \varepsilon \rangle\big) \quad (3)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \hat{g}\big(\langle \sigma \rangle\big) \quad (4)$$

*В общем случае эффективные соотношения (3) и (4) будут различными в зависимости от размеров испытуемых образцов (**масштабный эффект**).*

Принятие гипотезы об эквивалентной гомогенности позволяет свести основную проблему к тому, чтобы, используя процедуру осреднения, предсказывать эффективные свойства идеализированной гомогенной среды через свойства фаз и некоторые их геометрические характеристики.

Эффективные физико-механические характеристики неоднородных твердых тел

В зависимости от класса задач меняется понятие характерного размера неоднородности l.

Выделим в композите, имеющем характерный размер L, области, в которых определяющие соотношения (1) и (2) непрерывны по координатам. Каждую такую область непрерывности называют *компонентом композита*.

Эффективные определяющие соотношения (3) и (4) могут быть найдены как экспериментально, так и теоретически. Теоретическое определение таких эффективных определяющих соотношений требует решения задач МДТТ. Применение численных методов, вообще говоря, не позволяет найти аналитического выражения для определяющих соотношений. Поэтому их часто находят приближенно, используя различные методы, в частности вариационные, причем в этом случае важно знать, с какой степенью точности приближенные определяющие соотношения заменяют точные, т.е. установить области (так называемые "**вилки**"), внутри которых лежат точные эффективные характеристики.

Эффективные физико-механические характеристики неоднородных твердых тел

Один из возможных подходов к построению определяющих соотношений для определения эффективных характеристик гетерогенного тела (композита), состоящего из q компонент.

Каждый из компонент α можно описать соотношениями вида

$$\sigma_\alpha = \hat{F}_\alpha(\varepsilon_\alpha, \bar{x}), \quad \varepsilon_\alpha = \hat{G}_\alpha(\sigma_\alpha, \bar{x}), \alpha = 1,2,\ldots,q$$

Для каждой величины НДС, например σ_α можно определить среднее значение по компоненте α :

$$\langle \sigma_\alpha \rangle_\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \sigma_\alpha dV \qquad (7)$$

V_α - объем, занимаемый компонентом α

Осреднение по всему объему:

$$\langle \sigma \rangle = \sum_{\alpha=1}^{q} \nu_\alpha \langle \sigma_\alpha \rangle_\alpha \qquad (8)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{\alpha=1}^{q} \nu_\alpha \langle \varepsilon_\alpha \rangle_\alpha \qquad (10)$$

$$\nu_\alpha = V_\alpha / V \qquad \sum_{\alpha=1}^{q} \nu_\alpha = 1$$

Эффективные физико-механические характеристики неоднородных твердых тел

Если внутри каждого компонента материал непрерывно неоднороден (может быть и однородным), то осреднение (7) дает

$$\langle \hat{F}_\alpha(\varepsilon_\alpha, \overline{x}) \rangle_\alpha = \hat{f}_\alpha(\langle \varepsilon_\alpha \rangle_\alpha)$$

$$\langle \hat{G}_\alpha(\sigma_\alpha, \overline{x}) \rangle_\alpha = \hat{g}_\alpha(\langle \sigma_\alpha \rangle_\alpha)$$

$$\sigma^0 = \hat{f}(\varepsilon^0), \quad \varepsilon^0 = \hat{g}(\sigma^0)$$

σ^0, ε^0 - граничные тензоры $u_i\big|_\Sigma = \varepsilon_{ij}^0 x_j;\ \sigma_{ij} n_j\big|_\Sigma = \sigma_{ij}^0 n_j\big|_\Sigma$

Теория эффективного модуля

В соответствие квазистатической задаче МДТТ

$$\mathrm{Div}\hat{F}(\bar{u},\bar{x})+\bar{X}=0$$

$$\bar{u}\big|_{\Sigma_1}=\bar{u}^0;\quad \hat{F}(\bar{u},\bar{x})\bar{n}\big|_{\Sigma_2}=\bar{S}^0$$

Задача с теми же входными данными, но эффективными определяющими соотношениями:

$$\mathrm{Div}\hat{f}(\bar{v})+\bar{X}=0$$

$$\bar{v}\big|_{\Sigma_1}=u^0;\quad \hat{f}(\bar{v},\bar{x})\bar{n}\big|_{\Sigma_2}=\bar{S}^0$$

Индикаторные функции $f_\alpha(\bar{x})$ определяют положение каждой фазы - случайные поля, зависящие также от параметра α , принадлежащего области *A*, на которой определена вероятностная мера *p*.

Композит рассматривается как одна частная реализация с индексом β ⇒ $f_\alpha(\bar{x},\beta)$

Теория эффективного модуля

$$P_\alpha(x) = \langle f_\alpha(x) \rangle = \int_A f_\alpha(x,\beta) P(d\beta)$$

Функция $P_\alpha(x)$ характеризует вероятность нахождения фазы α в точке x.

Для среды, содержащей n фаз с α -ой фазой, имеющей модули $\hat{F}_\alpha(x)$ β, следует, что в реализации

$$\hat{F}_\alpha(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \hat{F}_\alpha f_\alpha(x,\beta) \qquad \langle \hat{F}_\alpha(x) \rangle = \sum_{\alpha=1}^{n} \hat{F}_\alpha(x) P_\alpha(x) \qquad (21)$$

Таким образом, везде вместо $\hat{F}_\alpha(x)$ используем (21).

Теория эффективного модуля

Подходы, состоящие в определении не собственно значений механических характеристик, а интервалов ("вилок"), в пределах которых находятся истинные значения характеристик.

*Например, **подходы Фойгта и Рейса, принцип Хашина–Штрикмана***

Подход Фойгта–Рейса

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha / k_\alpha\right)^{-1} \le \langle k \rangle \le \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha k_\alpha$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha / G_\alpha\right)^{-1} \le \langle G \rangle \le \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha G_\alpha$$

(25)

$$G_\alpha(x) = \frac{\left(\sum_{r=1}^{m} E_r(x) P_r(x)\right)_\alpha}{2\left(1 + \sum_{r+1}^{m} \nu_r(x) P_r(x)\right)_\alpha} \qquad k_\alpha(x) = \frac{\left(\sum_{r=1}^{m} E_r(x) P_r(x)\right)_\alpha}{3\left(1 - 2\sum_{r=1}^{m} \nu_r(x) P_r(x)\right)_\alpha}$$

(26)

$\langle G \rangle$ $\langle k \rangle$ - соответственно модуль сдвига и коэффициент объемного растяжения–сжатия

Теория эффективного модуля

Пример вилки Фойгта–Рейса.

Пусть по совокупности *M* геологических колонок пласта выделенного участка (реализации) установлено, что в точке x^* на геологической колонке встречается j_1 раз слой A_1 с характеристиками (E_1, ν_1), j_2 раз слой A_2 с (E_2, ν_2) и т.д., причем $j_1 + j_2 + \ldots + j_m = M$. В этом случае $P_{A_l}\left(x^*\right) = j_l / M$.

Формулы (25) и (26) принимают вид

$$G_\alpha\left(x^*\right) = \frac{\left(\sum_{r=1}^{m} E_r\left(x^*\right) j_r\right)_\alpha}{2\left(M + \sum_{r=1}^{m} \nu_r\left(x^*\right) j_r\right)_\alpha} \qquad k_\alpha\left(x^*\right) = \frac{\left(\sum_{r=1}^{m} E_r\left(x^*\right) j_r\right)_\alpha}{3\left(M - 2\sum_{r=1}^{m} \nu_r\left(x^*\right) j_r\right)_\alpha}$$

Теория эффективного модуля

Вилка Хашина–Штрикмана в нашем случае выполняется в такой форме

$$\langle G \rangle \le \left[\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha \left(G_g^* + G_\alpha \right)^{-1} \right]^{-1} - G_g^*$$

$$\langle k \rangle \le \left[\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha \left(k_g^* + k_\alpha \right)^{-1} \right]^{-1} - k_g^*$$

$$k_g^* = (4/3) \max_{\alpha \in [1,n]} (G_\alpha) \qquad G_g^* = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\max\limits_{\alpha}(G_\alpha)} + \frac{10}{9 \max\limits_{\alpha}(k_\alpha) + 8 \max\limits_{\alpha}(G_\alpha)} \right)^{-1}$$