Системы счисления

Все есть число", — говорили пифагорийцы, подчеркивая необычайно важную роль чисел в практической деятельности. Известно множество способов представления чисел. В любом случае число изображается символом или группой символов (словом) некоторого алфавита. Будем называть такие символы цифрами. Для представления чисел используются непозиционные и позиционные системы счисления.

Как только люди начали считать, у них появилась потребность в записи чисел. Находки археологов на стоянках первобытных людей свидетельствуют о том, что первоначально количество предметов отображали равным количеством каких-либо значков (бирок): зарубок, черточек, точек.

Непозиционные системы счисления

В непозиционных системах счисления количественный эквивалент каждой цифры не зависит от ее положения (места, позиции) в записи числа.

Древнеегипетская десятичная непозиционная система счисления.

- Примерно в третьем тысячелетии до нашей эры древние египтяне придумали свою числовую систему, в которой для обозначения ключевых чисел 1, 10, 100 и т.д. использовались специальные значки — иероглифы.
- Все остальные числа составлялись из этих ключевых при помощи операции сложения. Система счисления Древнего Египта является десятичной, но непозиционной

<u>Римская система счисления.</u>

- В основе римской системы счисления лежали знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две сложенные ладони) для 10, а для обозначения чисел 100(C), 500(D) и 1000(M) стали применять первые буквы соответствующих латинских слов (Centum — сто, Demimille — половина тысячи, Mille — тысяча).
- <u>При этом применялось следующее правило</u>: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.
- Десятичное число 99 имеет следующее представление: XCIX = 10+(100-1)+10.

Алфавитные системы счисления.

- Более совершенными непозиционными системами счисления были алфавитные системы. К числу таких систем счисления относились греческая, славянская, финикийская и другие. В них числа от 1 до 9, целые количества десятков (от 10 до 90) и целые количества сотен (от 100 до 900) обозначались буквами алфавита.

- В алфавитной системе счисления Древней Греции числа 1, 2, ..., 9 обозначались первыми девятью буквами греческого алфавита, например a = 1, b = 2, g = 3 и т.д. Для обозначения чисел 10, 20, ..., 90 применялись следующие 9 букв (i = 10, k = 20, l = 30, m = 40 и т.д.), а для обозначения чисел 100, 200, ..., 900 — последние 9 букв (r = 100, s = 200, t = 300 и т.д.). Например, число 141 обозначалось rma.

Непозиционные системы счисления имеют ряд существенных недостатков:

- 1. Существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел.
- 2. Невозможно представлять дробные и отрицательные числа.
- 3. Сложно выполнять арифметические операции, так как не существует алгоритмов их выполнения.

Позиционные системы счисления

Основные достоинства любой позиционной системы счисления — простота выполнения арифметических операций и ограниченное количество символов (цифр), необходимых для записи любых чисел.

- <u>В позиционных системах счисления вес</u> каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число. Например, в числе 757,7 первая семерка означает 7 сотен, вторая – 7 единиц, а третья – 7 десятых долей единицы.
- *Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием.*

<u>Основание позиционной системы счисления</u>

это количество различных знаков или символов, используемых для изображения цифр в данной системе. Основание показывает также, во сколько раз изменяется количественное значение цифры при перемещении ее на соседнюю позицию.

За основание системы можно принять любое натуральное число — два, три, четыре и т.д. Следовательно, возможно бесчисленное множество позиционных систем, наименование системы счисления соответствует ее основанию (десятичная, двоичная, пятеричная, восьмеричная, шестнадцатеричная и т. д.).

Примеры СС:

- Восьмеричная система счисления.
  Основание: q=8.
  Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

- Шестнадцатеричная система счисления.
  Основание: q=16.
  Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Здесь только десять цифр из шестнадцати имеют общепринятое обозначение 0,1, …9. Для записи остальных цифр (10, 11, 12, 13, 14 и 15) обычно используются первые пять букв латинского алфавита.

Число в развернутой форме

В позиционной системе счисления любое вещественное число в развернутой форме может быть представлено в следующем виде:

$$A_q = \pm (a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + ... + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + a_{-2}q^{-2} + ... + a_{-m}q^{-m})$$

Здесь A — само число,

q — основание системы счисления,

a_i —цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления,

n — число целых разрядов числа,

m — число дробных разрядов числа.

Свернутой формой

записи числа называется запись в виде:

$$A=a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0,a_{-1}...a_{-m}$$

Пример:

$A_{10}=4718{,}63_{10}$;

$A_2=1001{,}1_2$;

$A_8=7764{,}1_8$

Именно такой формой записи чисел мы и пользуемся в повседневной жизни. Иначе свернутую форму записи называют естественной или цифровой.

Число в развернутой форме запишется так:

Разряды	3	2	1	0	-1		
Число	**1**	**0**	**1**	**1,**	**1_2**	$= 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1};$	

Разряды	2	1	0	-1	-2	
Число	**2**	**7**	**6,**	**5**	**2_8**	$= 2*8^2 + 7*8^1 + 6*8^0 + 5*8^{-1} + 2*8^{-2};$

Перевести число из двоичной (восьмеричной, шестнадцатеричной и т.д) системы в десятичную

$A_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = 8 + 1 + 0{,}5 = 9{,}5_{10}$.

$A_8 = 7 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1}$

$3AF_{16} = 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$

Записав число в развернутом виде и произведя вычисления, получим это число, выраженное в десятичной системе счисления.