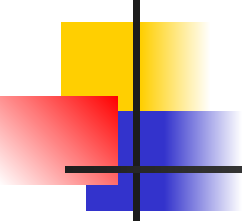




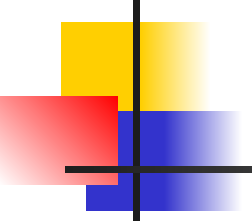
Теория графов

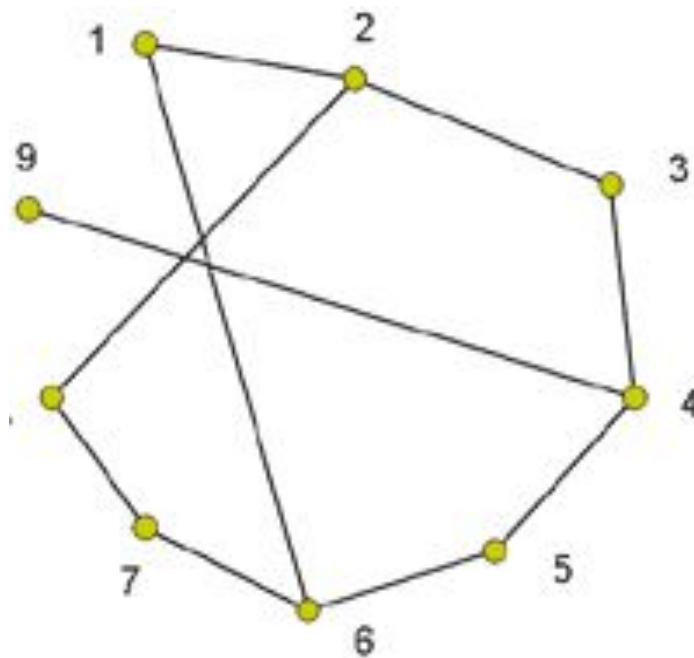
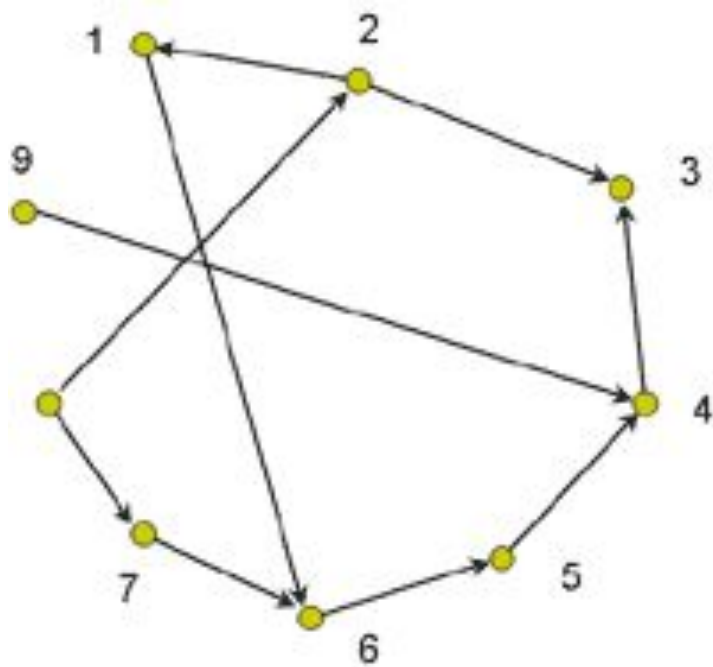
- 
-
- ***Теория графов*** – обширный самостоятельный раздел дискретной математики.
 - Используется при проектировании компьютерных сетей, трубопроводов, строительстве дорог для минимизации затрат на прокладку коммуникаций.



Граф

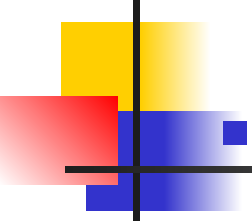
- это **конечное** множество вершин V и множество ребер R , соединяющих пары вершин, $G=(V,R)$.
 - Мощности множеств V и R равны N и M .
 - Множество ребер может быть пустым.
- Примеры вершин – объекты любой природы (населенные пункты, компьютерные сети).
- Примеры ребер – дороги, стороны, линии.

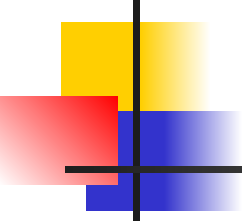
- 
- Вершины, соединенные ребром, называются **смежными**. Ребра, имеющие общую вершину, также называются **смежными**.
 - Ребро и любая из его двух вершин называются **инцидентными**.
 - **Степень** вершины – количество инцидентных ей ребер.
 - Каждый граф можно представить на плоскости множеством точек, соответствующих вершинам, которые соединены линиями, соответствующими ребрам.



Ориентированный граф *Неориентированный* граф

В орграфе ребро называют **дугой**.

- 
- **Маршрут графа** – последовательность вершин и ребер.
 - Маршрут **замкнутый** (циклический), если начальная и конечная вершины совпадают.
 - Маршрут – **простая цепь**, если все вершины и ребра различны.
 - Граф **связный**, если каждая вершина достижима из любой другой.
 - Вершины, не имеющие инцидентных ребер, называются **изолированными**.

- 
-
- **Взвешенный** граф (**сеть**) – граф, ребрам или дугам которого поставлены в соответствие числа (**вес**).
 - **Вес сети** равен сумме весов ее ребер.



Способы описания графа:

- матрица инциденций,
- **матрица смежности,**
- СПИСКИ СВЯЗИ,
- перечни ребер.

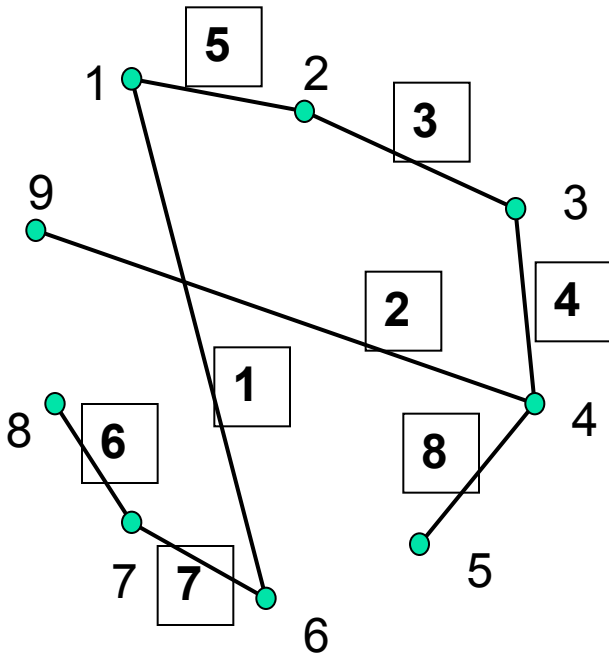


Матрица инциденций

- N – количество вершин
- M – количество ребер
- Матрица инциденций – это двумерный массив размерности $N \times M$

$$W[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{вершина с номером } i \\ & \text{инцидентна ребру с номером } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Матрица инциденций



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0
4	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0

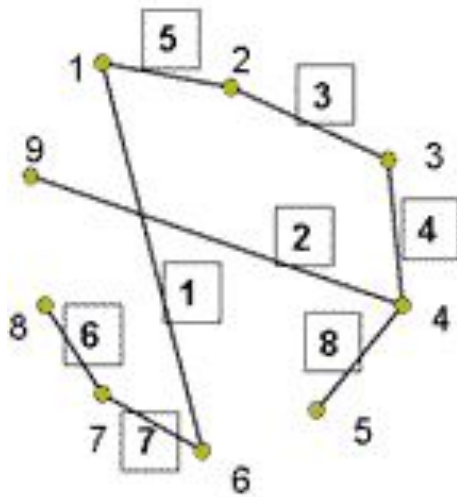


Матрица смежности

- – это двумерный массив $N*N$.

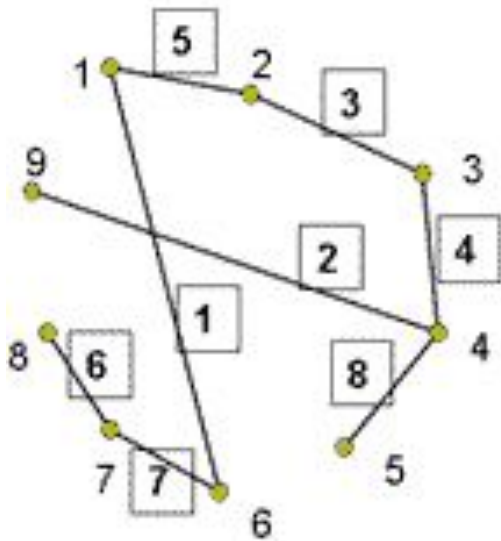
$$A[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если вершины с данными номерами смежны} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Матрица смежности графа



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Матрица смежности сети (с учетом весов ребер)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	5	0	0	0	1	0	0	0
2	5	0	3	0	0	0	0	0	0
3	0	3	0	4	0	0	0	0	0
4	0	0	4	0	8	0	0	0	2
5	0	0	0	8	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	7	0	0
7	0	0	0	0	0	7	0	6	0
8	0	0	0	0	0	0	6	0	0
9	0	0	0	2	0	0	0	0	0

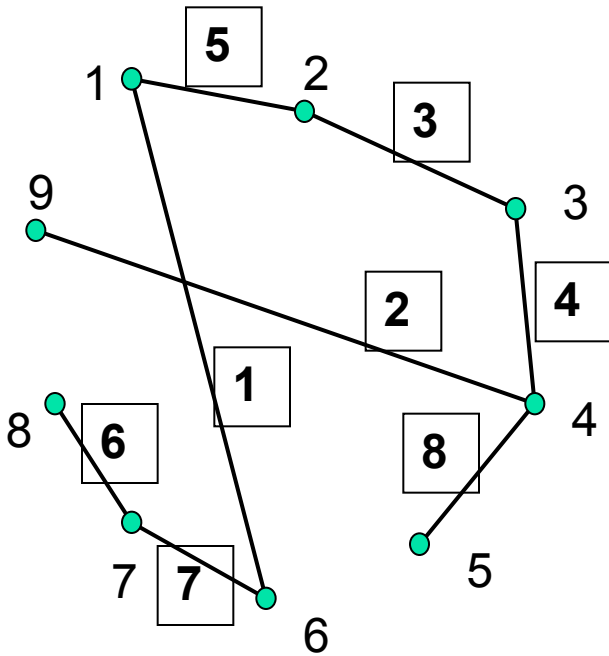


Списки связи

- Задание графа списками связи осуществляется с помощью одномерного массива размерности N для хранения указателей.
- Элемент массива – указатель на начало списка, в котором содержится информация о вершинах графа, смежных с рассматриваемой.

Списки связи

1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	1	2	3	4	1	6	7	4
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		
6	3	4	5		7	8		
			↓					
			9					

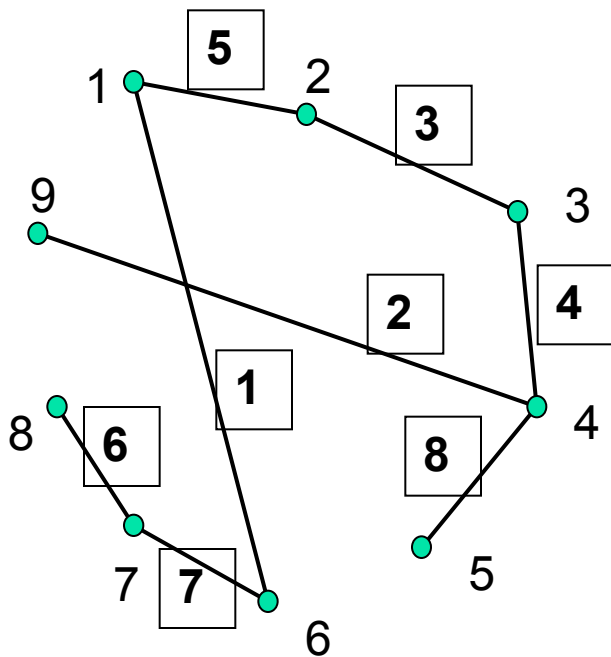




Перечень ребер

- Для хранения перечня ребер необходим двумерный массив размерности $M \times 2$.
- Строка массива описывает ребро.

Перечень ребер



	1	2
1	1	6
2	4	9
3	2	3
4	3	4
5	1	2
6	7	8
7	6	7
8	4	5



Подграфы и деревья

- **Подграф** графа G называют граф, у которого все вершины и ребра принадлежат графу G .
- **Остовной связный подграф** – это подграф графа G , который содержит все его вершины и каждая его вершина достижима из любой другой.



Подграфы и деревья

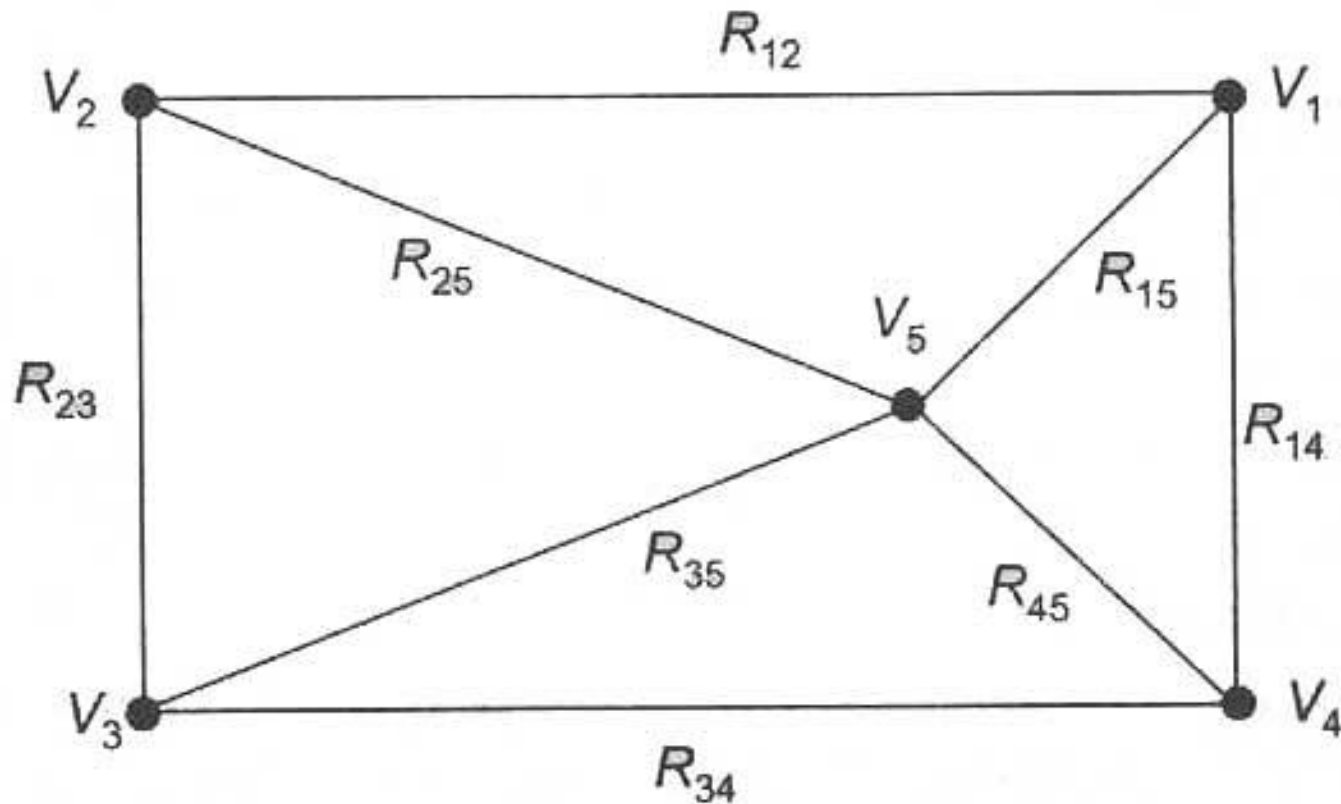
- **Дерево** – это граф, в котором нет циклов.
- **Остовное связное дерево** – подграф, включающий все вершины исходного графа G , каждая вершина которого достижима из любой другой, и при этом не содержащий циклов.



Преобразование графа в остовное связное дерево минимального веса

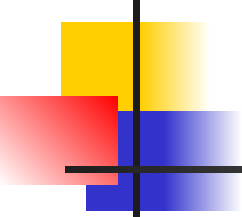
- Пусть $G=(V,R)$ – связанный взвешенный неориентированный граф.
- Граф G можно представить в виде матрицы смежности, содержащий значения весов ребер.

Граф в форме схемы

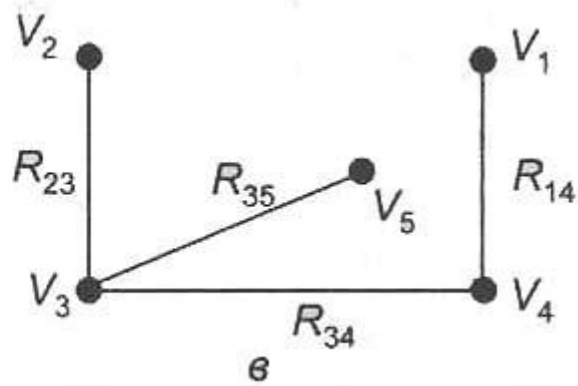
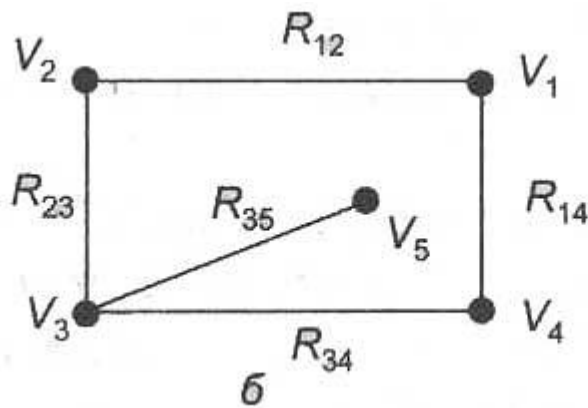
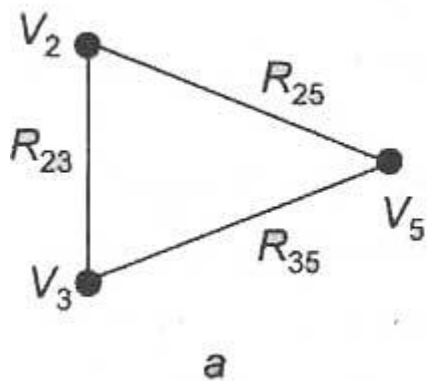


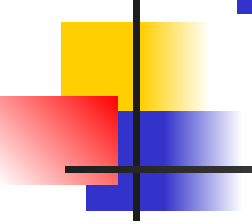
Матрица смежности связного
взвешенного неориентированного
графа

	1	2	3	4	5
1	0	50	0	25	10
2	50	0	25	0	30
3	0	25	0	50	35
4	25	0	50	0	15
5	10	30	35	15	0



Подграф графа, остовной связный подграф, остовное связное дерево

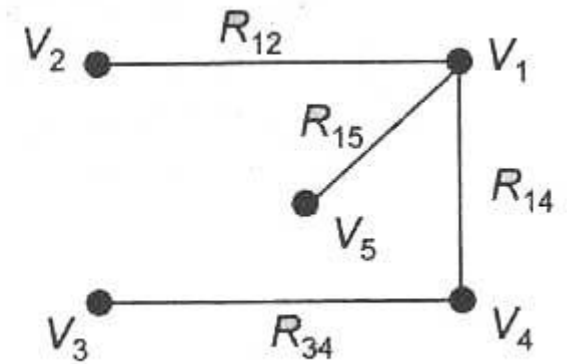
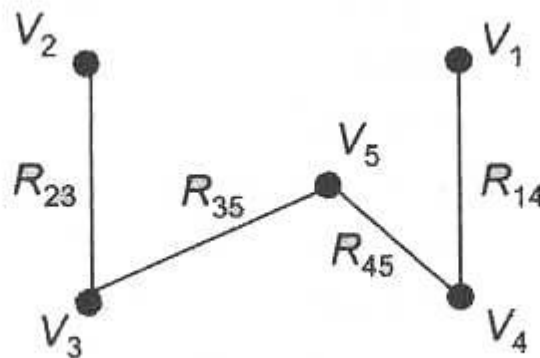
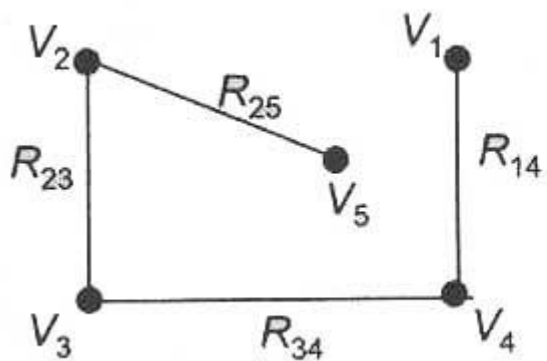


- 
- Цикломатическое число γ показывает сколько ребер графа нужно удалить, чтобы в нем не осталось циклов.

$$\gamma = m - n + 1$$

- Пример, $\gamma = 8 - 5 + 1 = 4$
- Для каждого графа обычно существует несколько связных деревьев, с различными весами.

Остовные связные деревья графа G



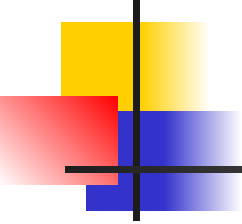
Построение остовного связного дерева минимального веса.

Алгоритм Крускала

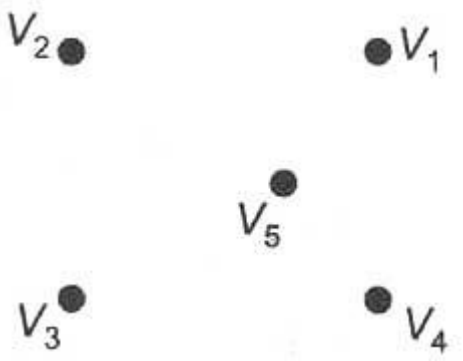
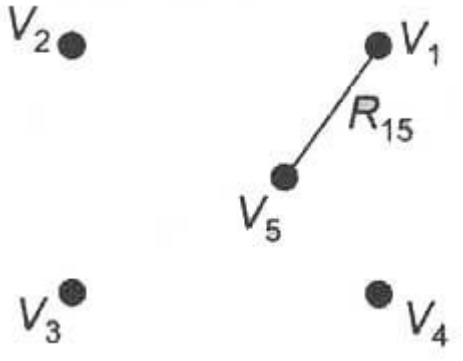
- Из графа удаляют все ребра, получается остовный подграф, где все вершины изолированы. Каждая вершина помещается в одноэлементное подмножество.
- Ребра сортируются по возрастанию весов.
- Ребра последовательно, по возрастанию их весов, включаются в остовное дерево.

Существует **4 случая**:

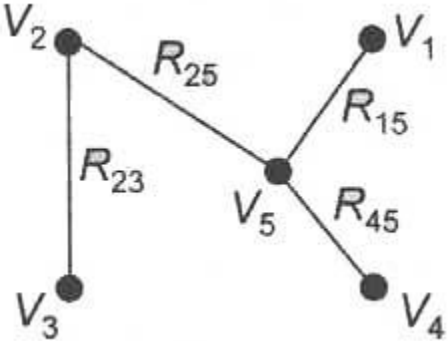
- 1) обе вершины включаемого ребра принадлежат одноэлементным подмножествам, тогда они объединяются в новое, связанное подмножество;
- 2) одна из вершин принадлежит связанному подмножеству, а другая нет, тогда включаем вторую в подмножество, которому принадлежит первая;
- 3) обе вершины принадлежат разным связным подмножествам, тогда объединяем подмножества;
- 4) Обе вершины принадлежат одному связанному подмножеству, тогда исключаем данное ребро.

- 
-
- Алгоритм заканчивает работу, когда все вершины будут объединены в одно множество, при этом оставшиеся ребра не включаются в остовное дерево.

Пример построения остовного дерева минимального веса для графа **G**

№	Выполняемые действия	Множество вершин	Граф
1	Построим остовной подграф с изолированными и вершинами	Получим 5 одноэлементных подмножеств: $\{V_1\}, \{V_2\}, \{V_3\}, \{V_4\}, \{V_5\}$	
2	Найдем ребро минимального веса (R_{15}) и добавим его в остовной подграф	Образуем связное подмножество вершин: $\{V_1, V_5\}$. Сохраняем подмножества $\{V_2\}, \{V_3\}, \{V_4\}$	

№	Выполняемые действия	Множество вершин	Граф
3	<p>Среди оставшихся найдем ребро минимального веса (R_{45}) и добавим его в остовной подграф</p>	<p>Добавим в связное подмножество вершину: $\{V_1, V_5, V_4\}$. Сохраняем подмножества $\{V_2\}, \{V_3\}$</p>	
4	<p>Среди оставшихся найдем ребро минимального веса (R_{23}) и добавим его в остовной подграф</p>	<p>Образуем новое связное подмножество вершин: $\{V_2, V_3\}$. Сохраняем первое связное подмножество $\{V_1, V_5, V_4\}$.</p>	

№	Выполняемые действия	Множество вершин	Граф
5	Среди оставшихся найдем ребро минимального веса (R_{25}) и добавим его в остовной подграф	Объединяем подмножества в одно связное подмножество $\{V_1, V_5, V_4, V_2, V_3\}$.	
6	Остальные ребра не включаются в граф, т.к. все их вершины уже принадлежат одному связному множеству.		

№	Выполняемые действия	Множество вершин	Граф
7	<p>Получен граф, который: остовной (все вершины включены); связный (все вершины можно соединить маршрутами); дерево (нет циклов); имеет минимальный вес.</p>		
8	<p>Полученное остовное дерево имеет минимальный вес:</p> $R_{12} + R_{25} + R_{15} + R_{45} = 25 + 30 + 10 + 15 = 80$		
9	<p>Циклическое число графа G равно</p> $\gamma = m - n + 1 = 8 - 5 + 1 = 4,$ <p>что соответствует количеству ребер, не включенных в дерево.</p>		



Вопросы для закрепления

- В какой форме можно представить граф?
- В чем разница между оргграфом и не оргграфом?
- Какие графы являются деревьями?
- Какой граф обладает минимальным весом?



Изучение графов на языке Паскаль.

**Построить остовные связные
деревья минимального веса для
графов с 5-ю вершинами**

Матрицу смежности графа и дерева
вывести в виде таблиц.



Объявление переменных

- Два целочисленных пятиэлементных массива **X** и **Y** для хранения координат вершин графа
- Целочисленный двумерный массив **R** для хранения весов ребер графа
- Целочисленные переменные **i**, **n** и **k** для счетчиков циклов
- Целочисленная переменная **S** для хранения суммы весов ребер дерева минимального веса



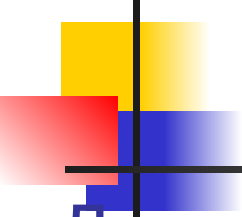
Тело программы

- Генерация случайных координат 5-ти вершин графа (**цикл по i**).
- Вычисление весов ребер. Вывод матрицы смежности взвешенного орграфа (**вложенные циклы по n и по k**)
- Вывод матрицы смежности взвешенного неориентированного графа – половины элементов начальной матрицы (**начальное значение $k=n+1$**)



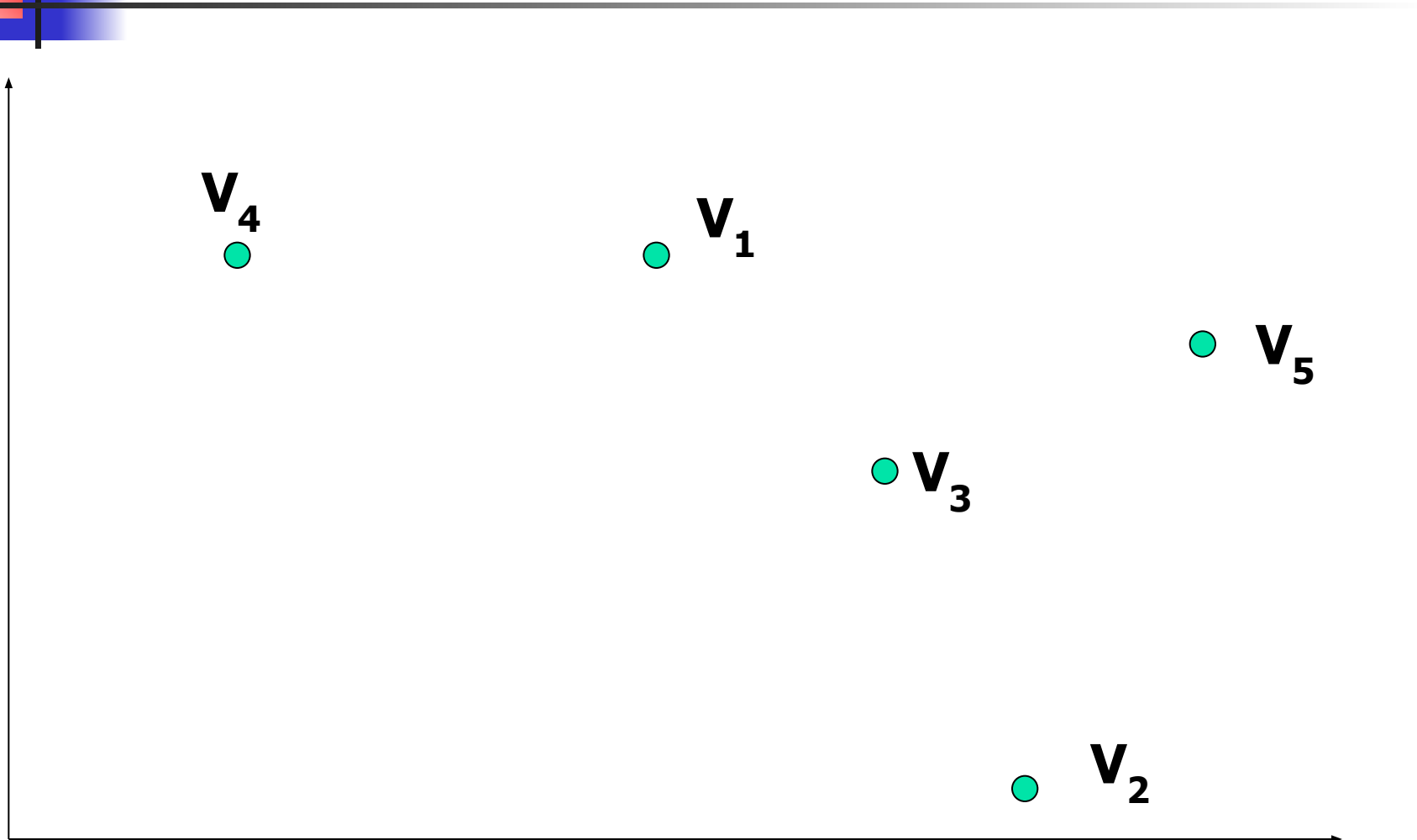
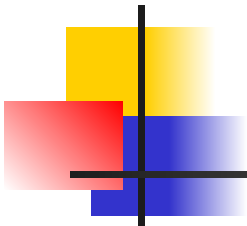
Тело программы

- Построение остовного связанного дерева минимального веса с учетом 4-х случаев.



Даны координаты
вершин графа.
Вычислить веса ребер.
Вывести матрицу
смежности взвешенного
неориентированного
графа.
Построить остовное
связное дерево
минимального веса.

- $V_1(50,59)$
- $V_2(84,6)$
- $V_3(70,32)$
- $V_4(22,59)$
- $V_5(91,40)$

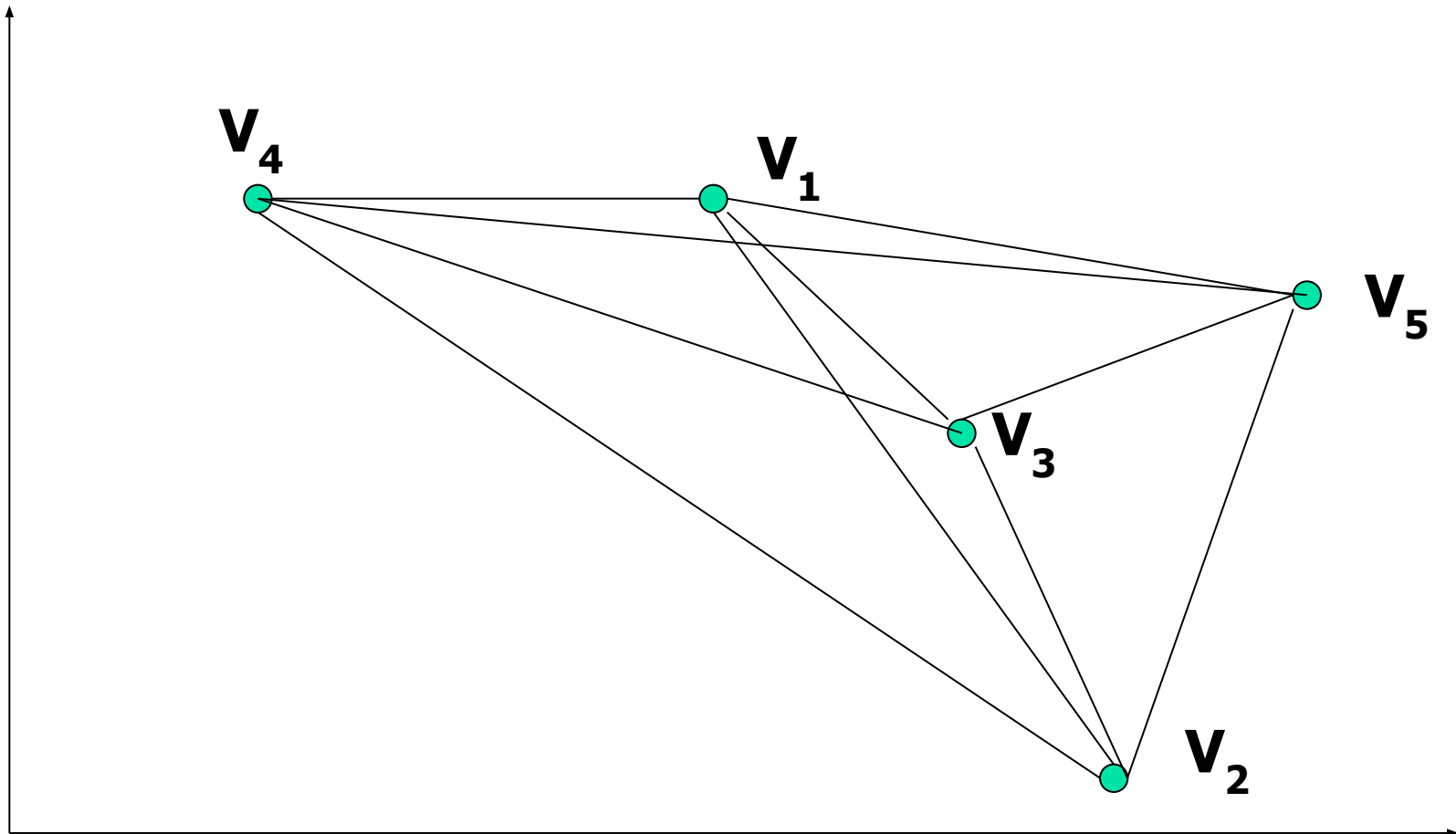
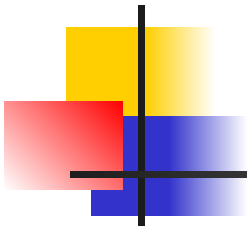




Решение.

	1	2	3	4	5
1	0	63	34	28	45
2		0	30	82	35
3			0	55	22
4				0	72
5					0

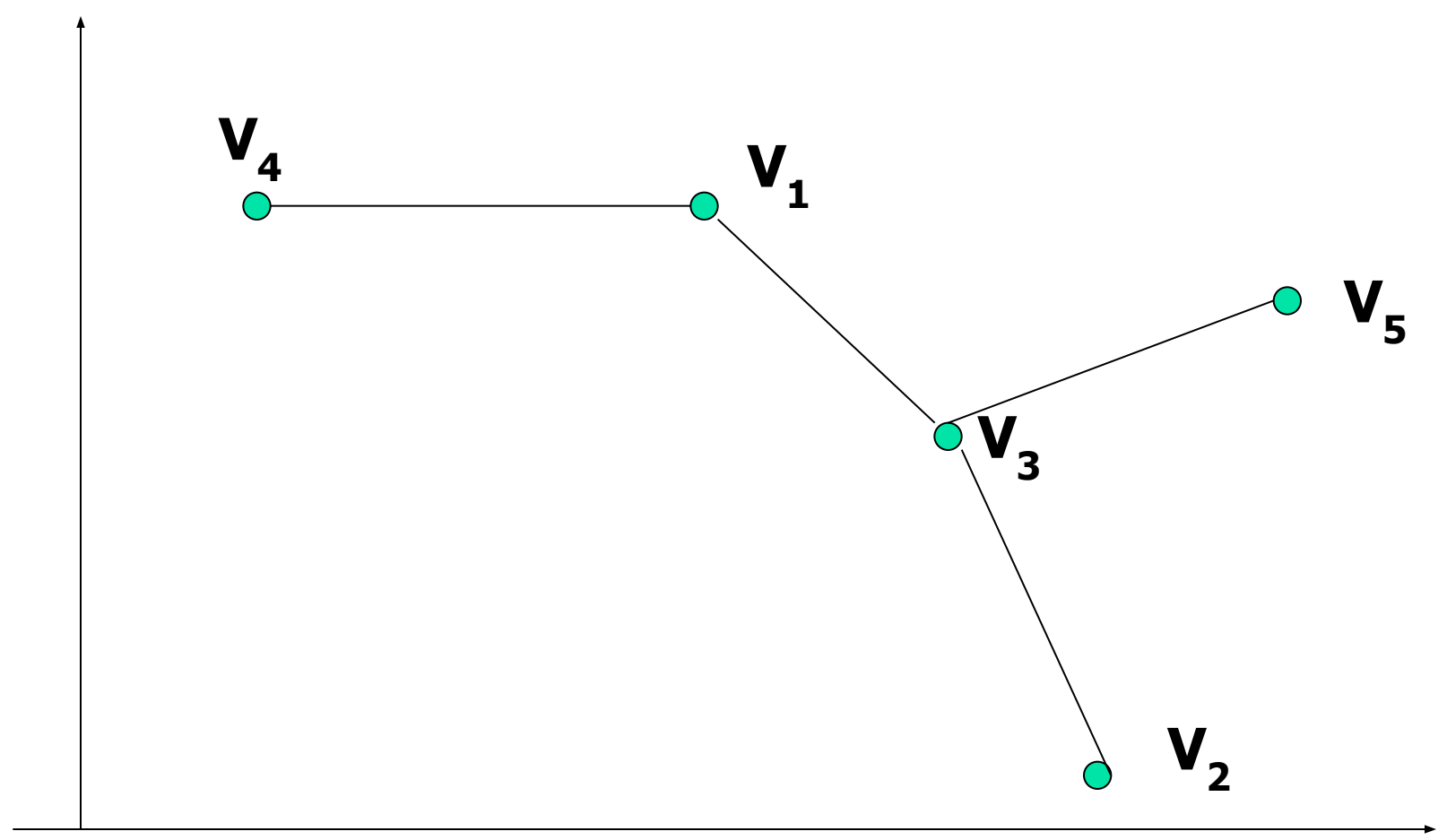
$$R_{12} = \text{round}(\text{sqrt}(\text{sqr}(84-50) + \text{sqr}(59-6))) = 63$$





Решение.

- МИН $R_{35}=22, \{3,5\}$
- МИН $R_{14}=28, \{3,5\}, \{1,4\}$
- МИН $R_{23}=30, \{3,5,2\}, \{1,4\}$
- МИН $R_{13}=34, \{1,2,3,4,5\}$
- **$S=22+28+30+34=114$**

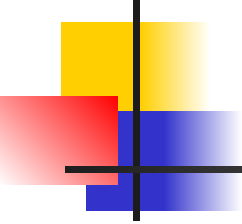




Отвѣты

- 50 59
- 84 6
- 70 32
- 22 59
- 91 40
- 63 34 28 45
- 30 82 35
- 55 22
- 72

- 22 3 5
- 28 1 4
- 30 2 3
- 34 1 3
- 114

- 
-
- 68 50
 - 22 88
 - 86 10
 - 78 58
 - 79 29

Даны координаты вершин графа.
Вычислить веса ребер.
Вывести матрицу смежности взвешенного неориентированного графа.
Построить остовное связное дерево минимального веса.



Отвѣты

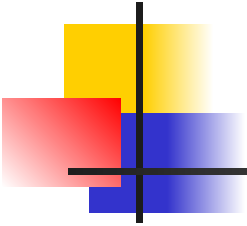
- 68 50
- 22 88
- 86 10
- 78 58
- 79 29
- 60 44 13 24
- 101 64 82
- 49 20
- 29
- 13 1 4
- 20 3 5
- 24 1 5
- 60 1 2
- 117



Практическая работа

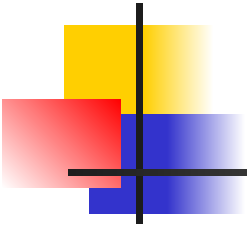
- 46 51
- 51 83
- 43 53
- 6 60
- 17 96
- 32 4 41 54
- 31 51 36
- 38 50
- 38

- 6
- 4 1 3
- 31 2 3
- 36 2 5
- 38 3 4
- 109



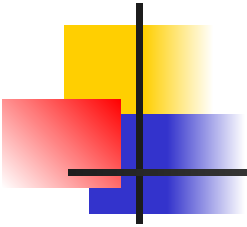
-
- 4 67
 - 45 74
 - 25 39
 - 43 83
 - 4 33
 - 42 35 42 34
 - 40 9 58
 - 48 22
 - 63

 - 6
 - 9 2 4
 - 22 3 5
 - 34 1 5
 - 35 1 3
 - 100



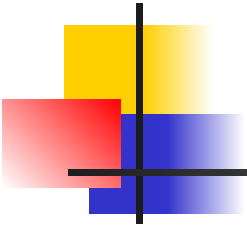
-
- 83 88
 - 78 64
 - 1 43
 - 89 34
 - 83 51
 - 25 94 54 37
 - 80 32 14
 - 88 82
 - 18

 - 6
 - 14 2 5
 - 18 4 5
 - 25 1 2
 - 80 2 3
 - 137



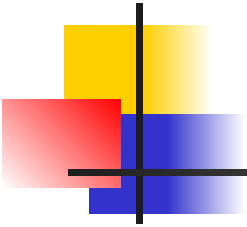
-
- 65 34
 - 69 12
 - 33 63
 - 57 18
 - 18 58
 - 22 43 18 53
 - 62 13 69
 - 51 16
 - 56

 - 6
 - 13 2 4
 - 16 3 5
 - 18 1 4
 - 43 1 3
 - 90



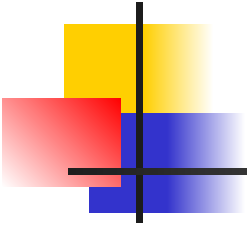
-
- 29 35
 - 64 37
 - 26 58
 - 73 1
 - 47 82
 - 35 23 56 50
 - 43 37 48
 - 74 32
 - 85

 - 6
 - 23 1 3
 - 32 3 5
 - 35 1 2
 - 37 2 4
 - 127



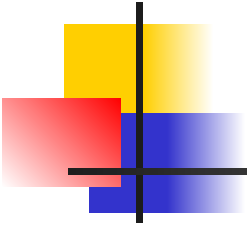
-
- 40 57
 - 7 70
 - 86 76
 - 88 3
 - 98 81
 - 35 50 72 63
 - 79 105 92
 - 73 13
 - 79

 - 6
 - 13 3 5
 - 35 1 2
 - 50 1 3
 - 72 1 4
 - 170



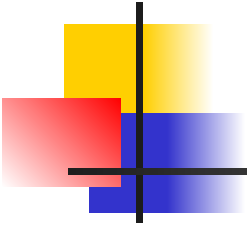
-
- 48 37
 - 86 62
 - 40 3
 - 31 40
 - 99 70
 - 45 35 17 61
 - 75 59 15
 - 38 89
 - 74

 - 6
 - 15 2 5
 - 17 1 4
 - 35 1 3
 - 38 3 4
 - 105



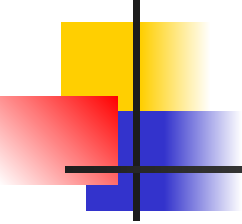
-
- 2 23
 - 96 36
 - 56 76
 - 89 96
 - 1 20
 - 95 76 114 3
 - 57 60 96
 - 39 78
 - 116

 - 6
 - 3 1 5
 - 39 3 4
 - 57 2 3
 - 60 2 4
 - 159



-
- 87 51
 - 11 6
 - 51 15
 - 66 51
 - 59 34
 - 88 51 21 33
 - 41 71 56
 - 39 21
 - 18

 - 6
 - 18 4 5
 - 21 1 4
 - 21 3 5
 - 41 2 3
 - 101

- 
-
- 1 54
 - 67 23
 - 50 13
 - 13 61
 - 93 58
 - 73 64 14 92
 - 20 66 44
 - 61 62
 - 80

- 6
- 14 1 4
- 20 2 3
- 44 2 5
- 61 3 4
- 139