Теория графов

- ***Теория графов*** – обширный самостоятельный раздел дискретной математики.
- Используется при проектировании компьютерных сетей, трубопроводов, строительстве дорог для минимизации затрат на прокладку коммуникаций.

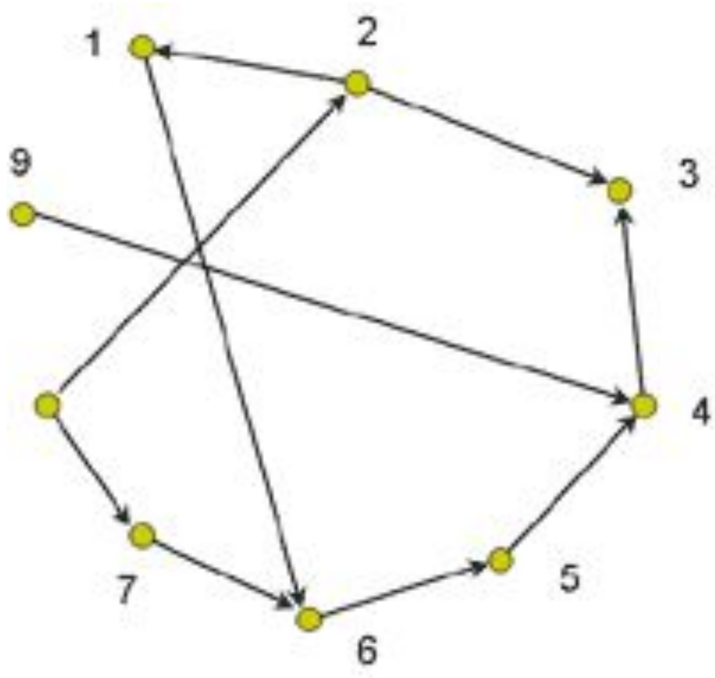
Граф

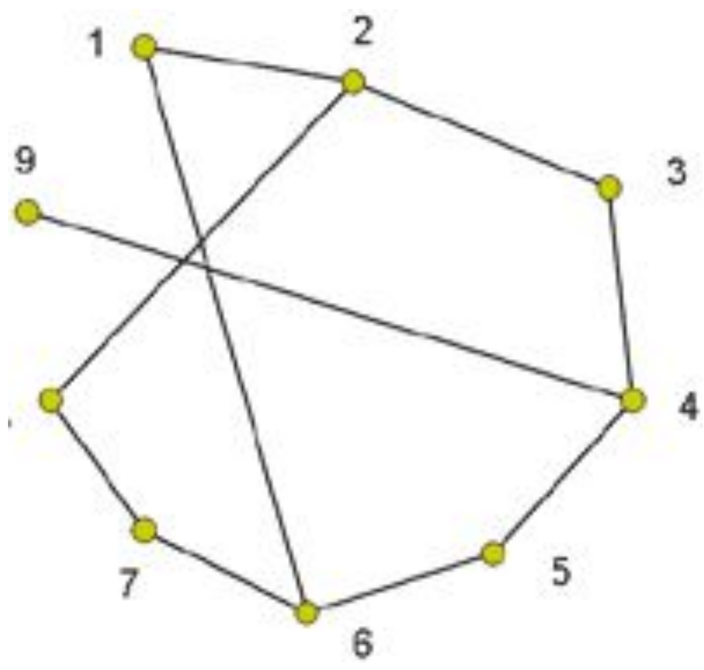
- это **конечное** множество вершин ***V*** и множество ребер ***R***, соединяющих пары вершин, ***G=(V,R)***.
- Мощности множеств *V* и *R* равны ***N*** и ***M***.
- Множество ребер может быть пустым.

Примеры вершин – объекты любой природы (населенные пункты, компьютерные сети).

Примеры ребер – дороги, стороны, линии.

- Вершины, соединенные ребром, называются ***смежными***. Ребра, имеющие общую вершину, также называются ***смежными***.
- Ребро и любая из его двух вершин называются ***инцидентными***.
- **Степень** вершины – количество инцидентных ей ребер.
- Каждый граф можно представить на плоскости множеством точек, соответствующих вершинам, которые соединены линиями, соответствующими ребрам.





Ориентированный *граф* **Неориентированный** *граф*

В орграфе ребро называют **дугой**.

- ***Маршрут графа*** – последовательность вершин и ребер.
- Маршрут ***замкнутый*** (циклический), если начальная и конечная вершины совпадают.
- Маршрут – ***простая цепь***, если все вершины и ребра различны.
- Граф ***связный***, если каждая вершина достижима из любой другой.
- Вершины, не имеющие инцидентных ребер, называются ***изолированными***.

- **Взвешенный** граф (**сеть**) – граф, ребрам или дугам которого поставлены в соответствие числа (**вес**).
- **Вес сети** равен сумме весов ее ребер.

Способы описания графа:

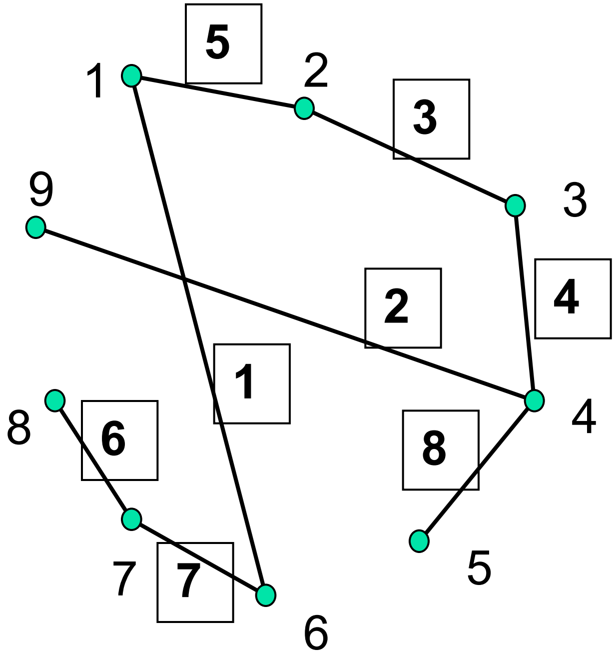
- матрица инциденций,
- **матрица смежности**,
- списки связи,
- перечни ребер.

Матрица инциденций

- N – количество вершин
- M – количество ребер
- Матрица инциденций – это двумерный массив размерности $N \times M$

$$W[i,j] = \begin{cases} 1, \text{вершина с номером } i \\ \quad \text{инцидентна ребру с номером } j \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Матрица инциденций



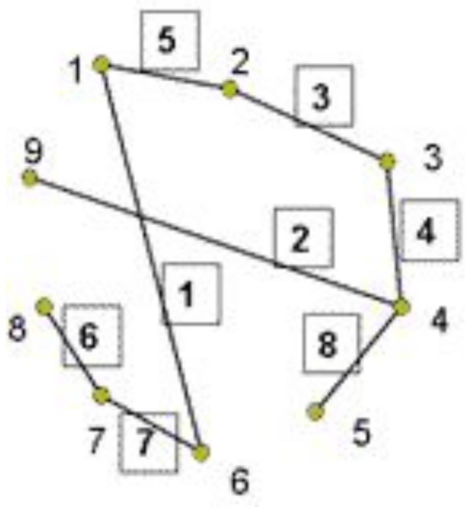
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0
4	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0

Матрица смежности

- – это двумерный массив *N*N.*

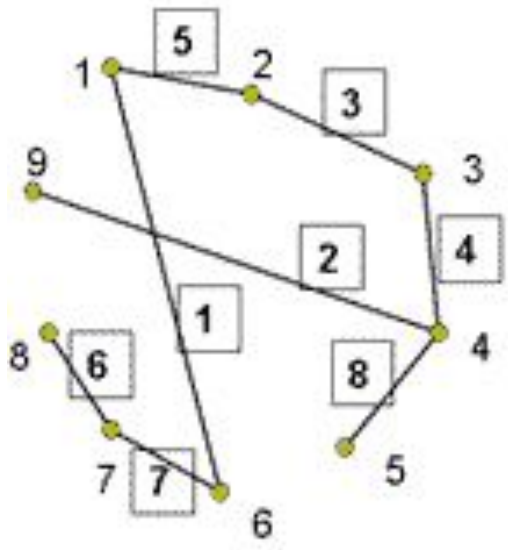
$$A[i,j] = \begin{cases} 1, \text{если вершины с данными номерами смежны} \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Матрица смежности графа



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Матрица смежности сети
(с учетом весов ребер)

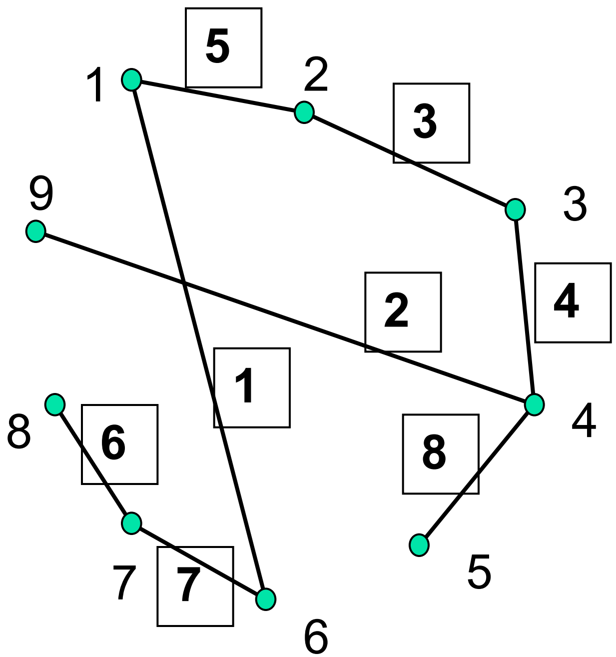


	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	5	0	0	0	1	0	0	0
2	5	0	3	0	0	0	0	0	0
3	0	3	0	4	0	0	0	0	0
4	0	0	4	0	8	0	0	0	2
5	0	0	0	8	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	7	0	0
7	0	0	0	0	0	7	0	6	0
8	0	0	0	0	0	0	6	0	0
9	0	0	0	2	0	0	0	0	0

Списки связи

- Задание графа списками связи осуществляется с помощью одномерного массива размерности *N* для хранения указателей.
- Элемент массива – указатель на начало списка, в котором содержится информация о вершинах графа, смежных с рассматриваемой.

Списки связи

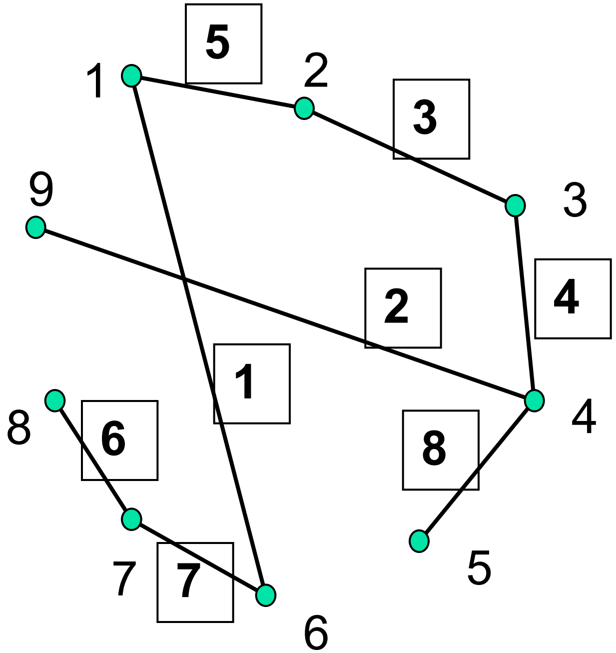


1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	2	3	4	1	6	7	4
6	3	4	5		7	8		
			9					

Перечень ребер

- Для хранения перечня ребер необходим двумерный массив размерности $M \times 2$.
- Строка массива описывает ребро.

Перечень ребер



	1	2
1	1	6
2	4	9
3	2	3
4	3	4
5	1	2
6	7	8
7	6	7
8	4	5

Подграфы и деревья

- **Подграф** графа G называют граф, у которого все вершины и ребра принадлежат графу G.
- **Остовной связный подграф** – это подграф графа G, который содержит все его вершины и каждая его вершина достижима из любой другой.

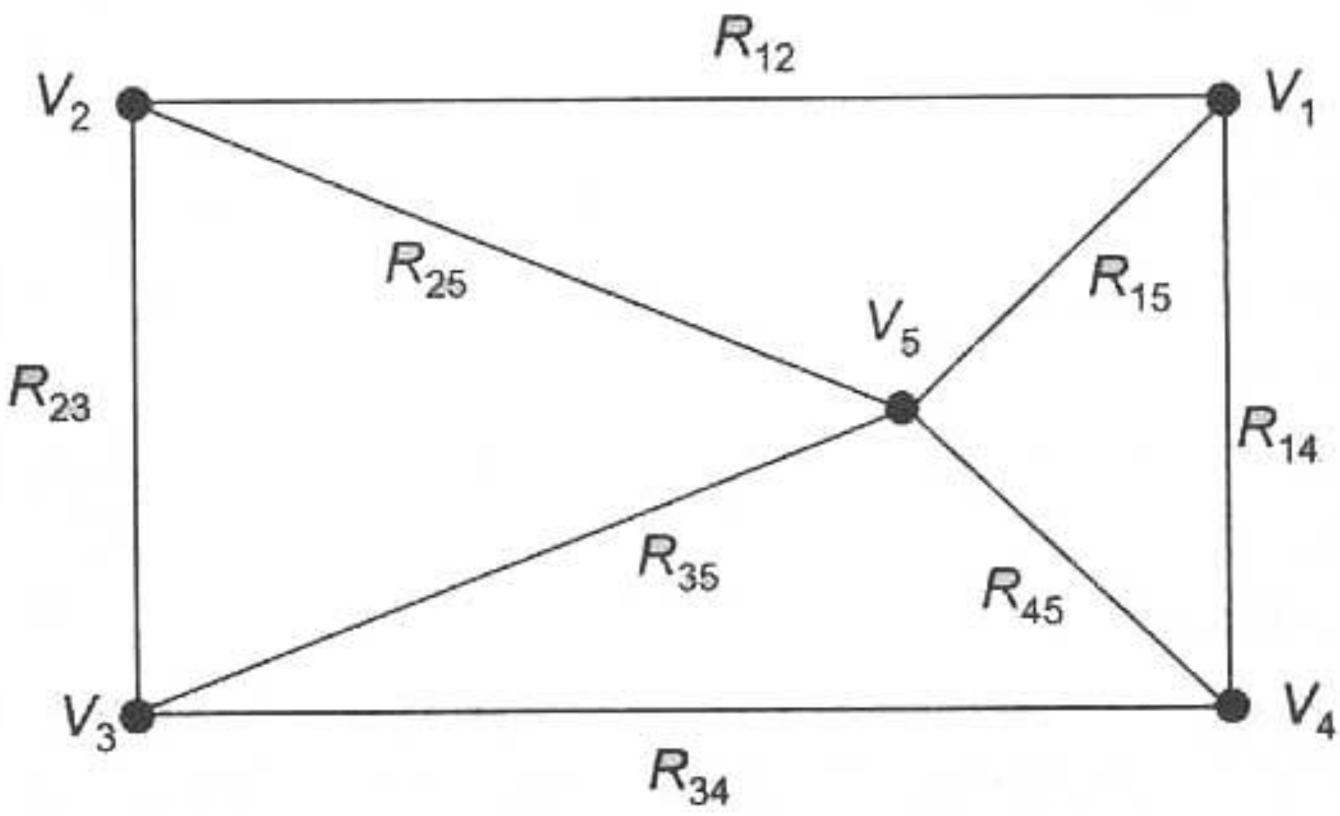
Подграфы и деревья

- **Дерево** – это граф, в котором нет циклов.
- **Остовное связное дерево** – подграф, включающий все вершины исходного графа G, каждая вершина которого достижима из любой другой, и при этом не содержащий циклов.

Преобразование графа в остовное связное дерево минимального веса

- Пусть **G=(V,R)** – связанный взвешенный неориентированный граф.
- Граф **G** можно представить в виде матрицы смежности, содержащий значения весов ребер.

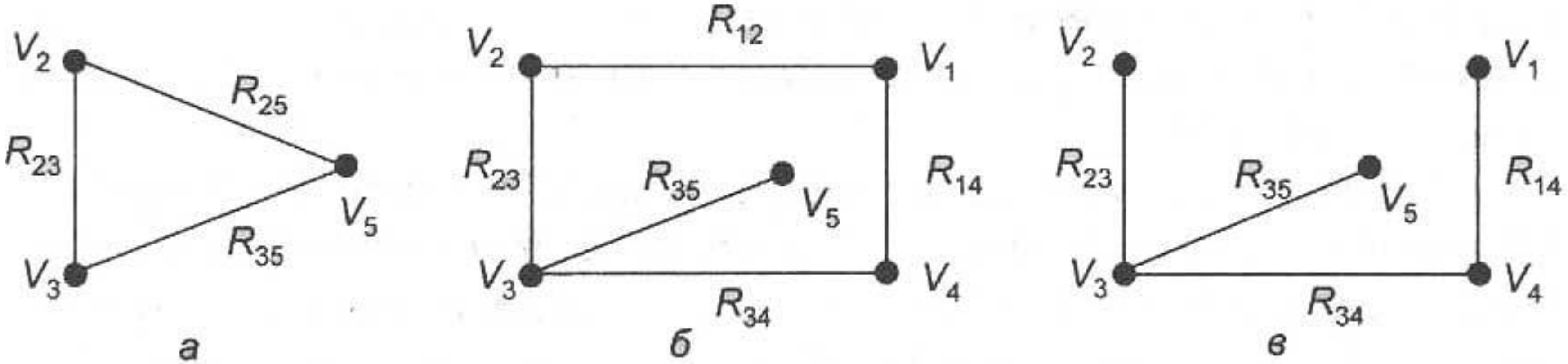
Граф в форме схемы



Матрица смежности связного взвешенного неориенторованного графа

	1	2	3	4	5
1	0	**50**	**0**	**25**	**10**
2	50	0	**25**	**0**	**30**
3	0	25	0	**50**	**35**
4	25	0	50	0	**15**
5	10	30	35	15	0

Подграф графа, остовной связный подграф, остовное связное дерево

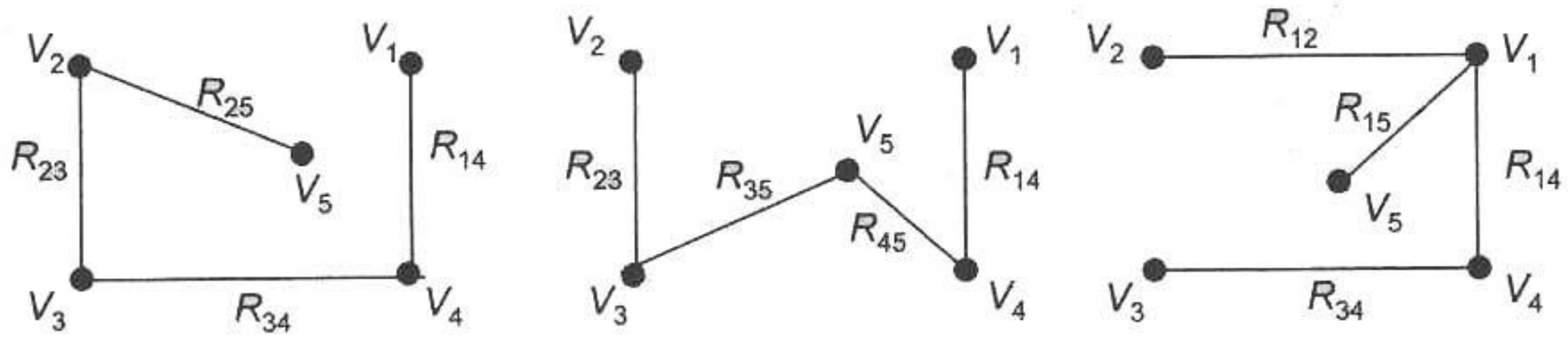


- Цикломатическое число **γ** показывает сколько ребер графа нужно удалить, чтобы в нем не осталось циклов.

$$\gamma = m - n + 1$$

- Пример, $\gamma = 8 - 5 + 1 = 4$
- Для каждого графа обычно существует несколько связных деревьев, с различными весами.

Остовные связные деревья графа G



Построение остовного связного дерева минимального веса. Алгоритм Крускала

- Из графа удаляют все ребра, получается остовной подграф, где все вершины изолированы. Каждая вершина помещается в одноэлементное подмножество.
- Ребра сортируются по возрастанию весов.
- Ребра последовательно, по возрастанию их весов, включаются в остовное дерево.

Существует **4 случая**:

1) обе вершины включаемого ребра принадлежат одноэлементным подмножествам, тогда они объединяются в новое, связное подмножество;

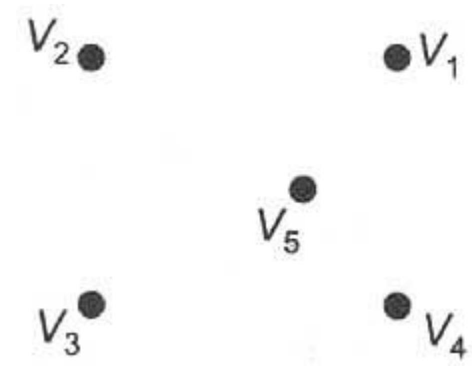
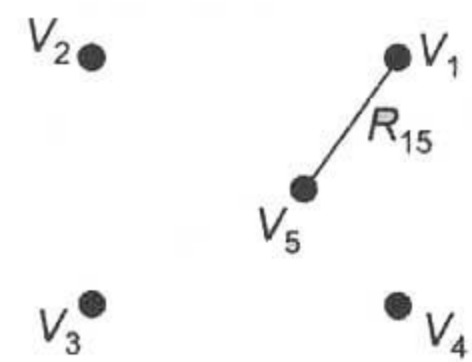
2) одна из вершин принадлежит связному подмножеству, а другая нет, тогда включаем вторую в подмножество, которому принадлежит первая;

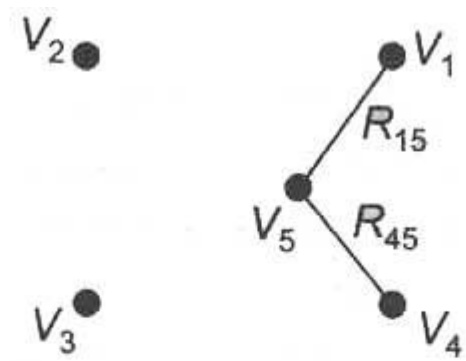
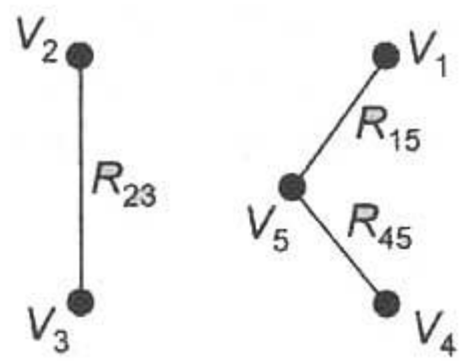
3) обе вершины принадлежат разным связным подмножествам, тогда объединяем подмножества;

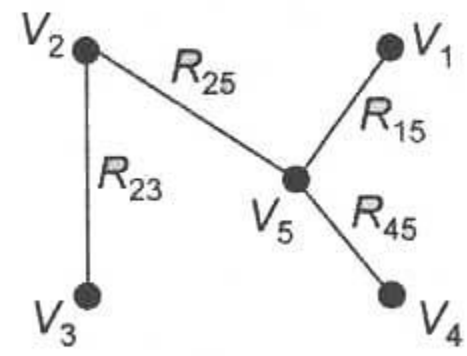
4) Обе вершины принадлежат одному связному подмножеству, тогда исключаем данное ребро.

- Алгоритм заканчивает работу, когда все вершины будут объединены в одно множество, при этом оставшиеся ребра не включаются в остовное дерево.

Пример построения остовного дерева минимального веса для графа <u>G</u>

№	Выполняемые действия	Множество вершин	Граф
1	Построим остовной подграф с изолированным и вершинами	Получим 5 одноэлементных подмножеств: $\{V_1\}$, $\{V_2\}$, $\{V_3\}$, $\{V_4\}$, $\{V_5\}$	
2	Найдем ребро минимального веса (R_{15}) и добавим его в остовной подграф	Образуем связное подмножество вершин: $\{V_1, V_5\}$. Сохраняем подмножества $\{V_2\}$, $\{V_3\}$, $\{V_4\}$	

№	Выполняемые действия	Множество вершин	Граф
3	Среди оставшихся найдем ребро минимального веса **(R_{45})** и добавим его в остовной подграф	Добавим в связное подмножество вершину: **$\{V_1, V_5, V_4\}$**. Сохраняем подмножества **$\{V_2\}, \{V_3\}$**	
4	Среди оставшихся найдем ребро минимального веса **(R_{23})** и добавим его в остовной подграф	Образуем новое связное подмножество вершин: **$\{V_2, V_3\}$**. Сохраняем первое связное подмножество **$\{V_1, V_5, V_4\}$**.	

№	Выполняемые действия	Множество вершин	Граф
5	Среди оставшихся найдем ребро минимального веса **(R_{25})** и добавим его в остовной подграф	Объединяем подмножества в одно связное подмножество **$\{V_1, V_5, V_4, V_2, V_3\}$**.	
6	Остальные ребра не включаются в граф, т.к. все их вершины уже принадлежат одному связному множеству.		

№	Выполняемые действия	Множество вершин	Граф
7	Получен граф, который: остовной (все вершины включены); связный (все вершины можно соединить маршрутами); дерево (нет циклов); имеет минимальный вес.		
8	Полученное остовное дерево имеет минимальный вес: $\mathbf{R_{12}+R_{25}+R_{15}+R_{45}= 25+30+10+15=80}$		
9	Циклическое число графа G равно $\mathbf{\gamma=m-n+1=8-5+1=4}$, что соответствует количеству ребер, не включенных в дерево.		

Вопросы для закрепления

- В какой форме можно представить граф?
- В чем разница между орграфом и не орграфом?
- Какие графы являются деревьями?
- Какой граф обладает минимальным весом?

Изучение графов на языке Паскаль. Построить остовные связные деревья минимального веса для графов с 5-ю вершинами

Матрицу смежности графа и дерева вывести в виде таблиц.

Объявление переменных

- Два целочисленных пятиэлементных массива **X** и **Y** для хранения координат вершин графа
- Целочисленный двумерный массив **R** для хранения весов ребер графа
- Целочисленные переменные **i**, **n** и **k** для счетчиков циклов
- Целочисленная переменная **S** для хранения суммы весов ребер дерева минимального веса

Тело программы

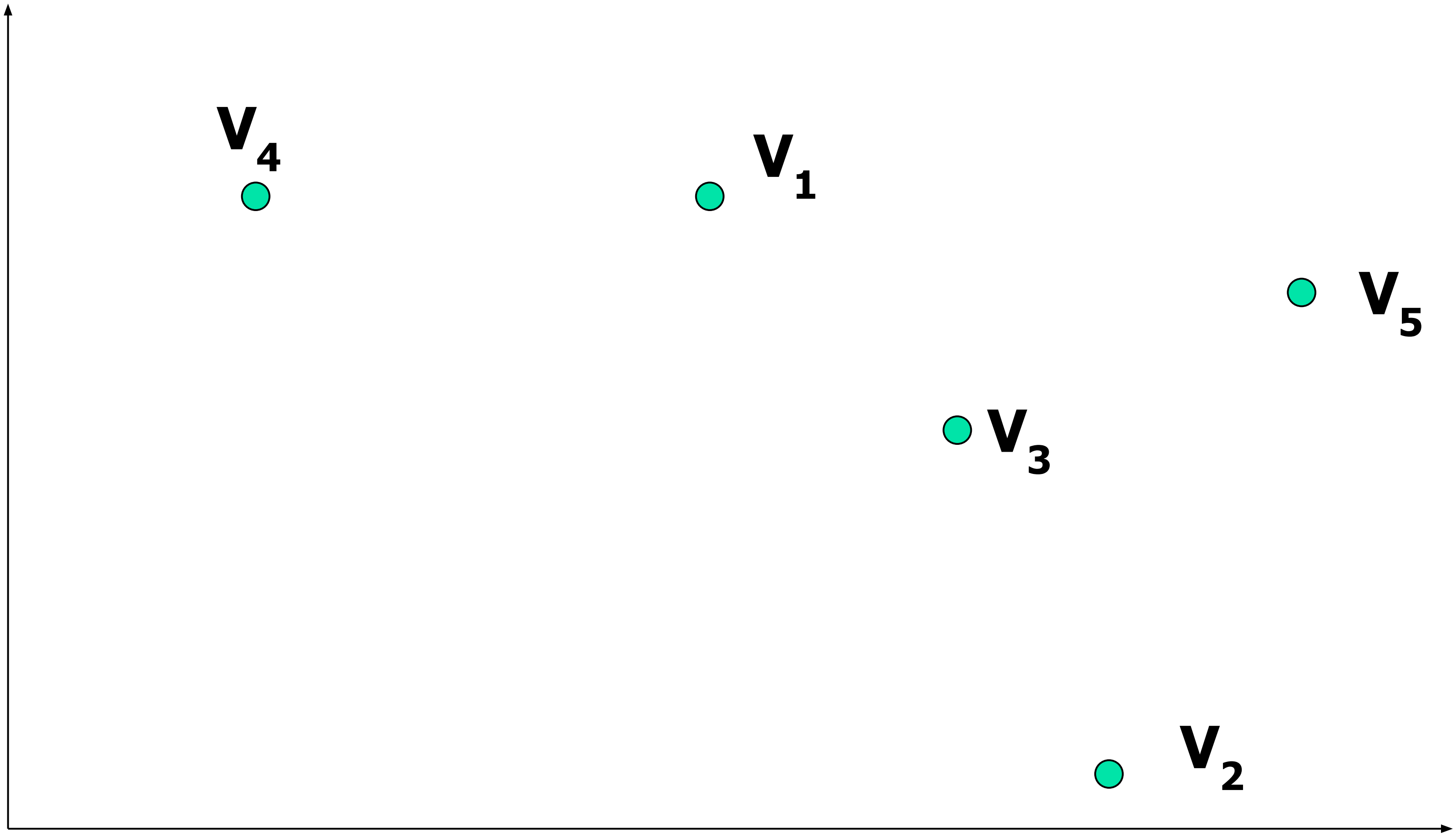
- Генерация случайных координат 5-ти вершин графа (**цикл по i**).
- Вычисление весов ребер. Вывод матрицы смежности взвешенного орграфа (**вложенные циклы по n и по k**)
- Вывод матрицы смежности взвешенного неориентрованного графа – половины элементов начальной матрицы (**начальное значение k=n+1**)

Тело программы

- Построение остовного связанного дерева минимального веса с учетом 4-х случаев.

Даны координаты вершин графа. Вычислить весы ребер. Вывести матрицу смежности взвешенного неориентированного графа. Построить остовное связное дерево минимального веса.

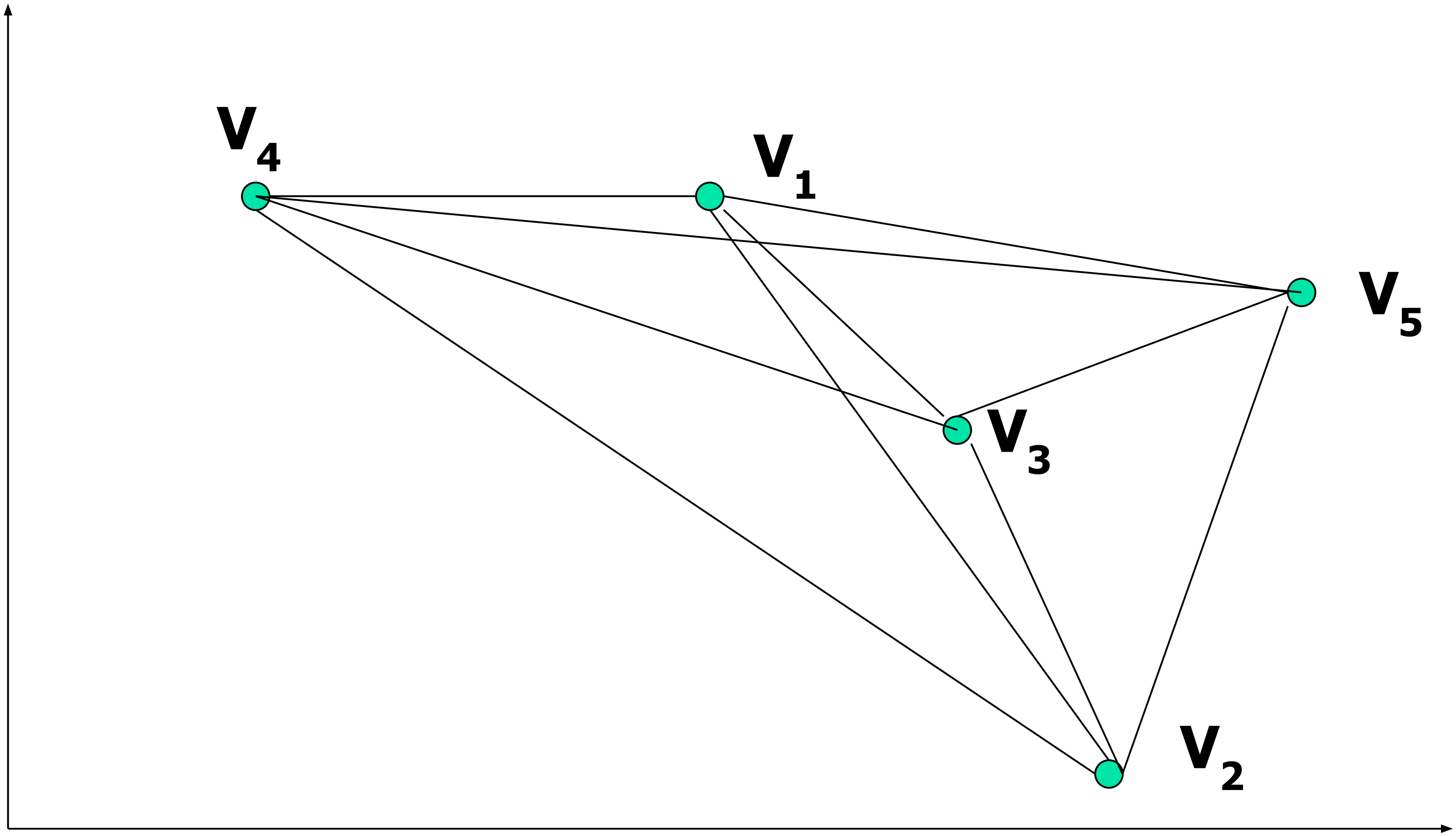
- $V_1(50,59)$
- $V_2(84,6)$
- $V_3(70,32)$
- $V_4(22,59)$
- $V_5(91,40)$


V_4
V_1
V_5
V_3
V_2

Решение.

	1	2	3	4	5
1	0	63	34	28	45
2		0	30	82	35
3			0	55	22
4				0	72
5					0

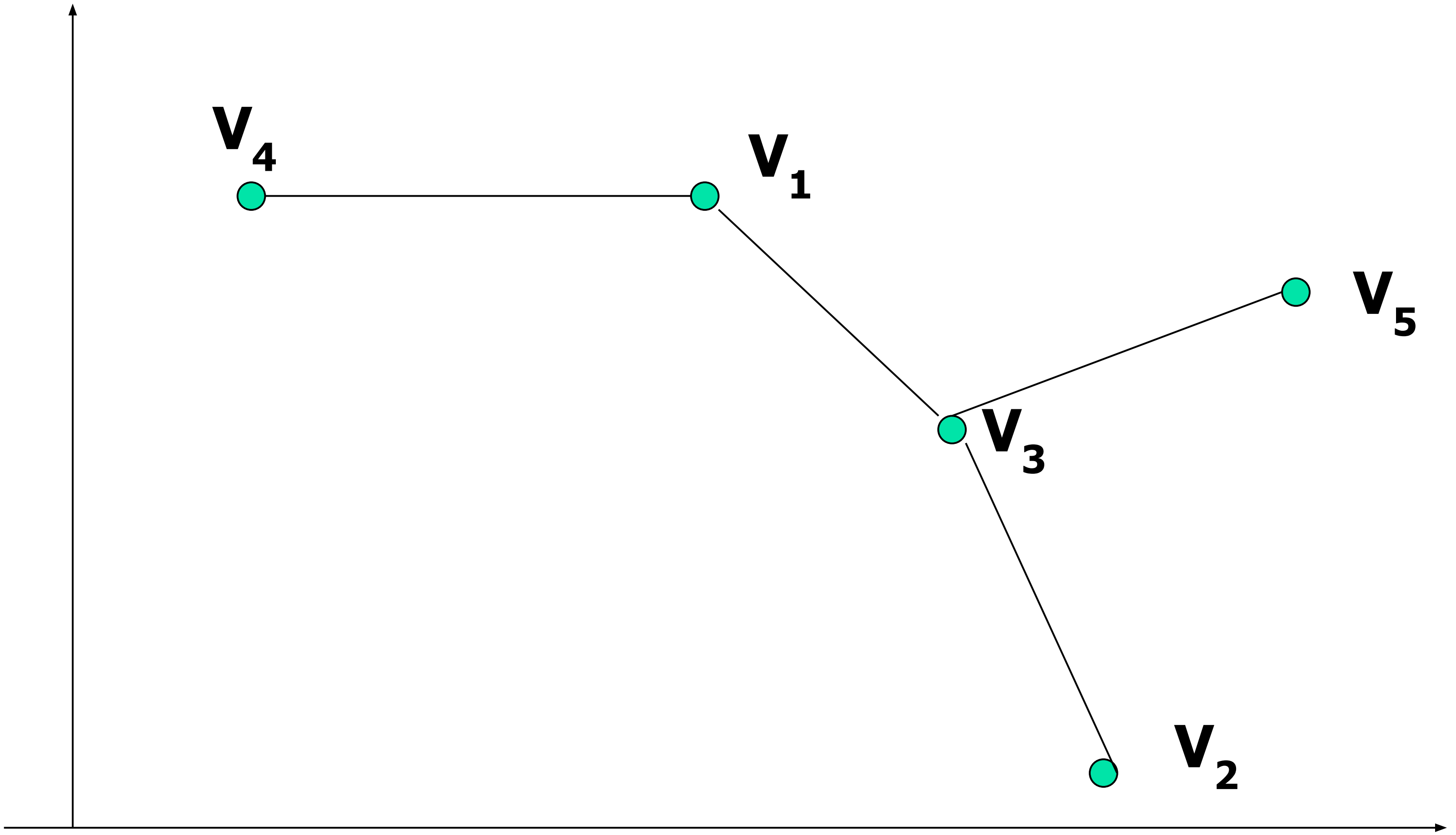
R_{12}=round(sqrt(sqr(84-50)+sqr(59-6)))=63



V4
V1
V5
V3
V2

Решение.

- мин R35=22, {3,5}
- мин R14=28, {3,5}, {1,4}
- мин R23=30, {3,5,2}, {1,4}
- мин R13=34, {1,2,3,4,5}
- **S=22+28+30+34=114**



V_4
V_1
V_5
V_3
V_2

Ответы

- **50 59**
- **84 6**
- **70 32**
- **22 59**
- **91 40**
- **63 34 28 45**
- **30 82 35**
- **55 22**
- **72**

- **22 3 5**
- **28 1 4**
- **30 2 3**
- **34 1 3**
- **114**

- 68 50
- 22 88
- 86 10
- 78 58
- 79 29

Даны координаты вершин

графа.

Вычислить весы ребер.

Вывести матрицу смежности взвешенного неориентированного графа.

Построить остовное связное дерево минимального веса.

Ответы

- 68 50
- 22 88
- 86 10
- 78 58
- 79 29
- **60 44 13 24**
- **101 64 82**
- **49 20**
- **29**
- **13 1 4**
- **20 3 5**
- **24 1 5**
- **60 1 2**
- **117**

Практическая работа

- 46 51
- 51 83
- 43 53
- 6 60
- 17 96
- 32 4 41 54
- 31 51 36
- 38 50
- 38

- 6
- 4 1 3
- 31 2 3
- 36 2 5
- 38 3 4
- 109

- 4 67
- 45 74
- 25 39
- 43 83
- 4 33
- 42 35 42 34
- 40 9 58
- 48 22
- 63

- 6
- 9 2 4
- 22 3 5
- 34 1 5
- 35 1 3
- 100

- 83 88
- 78 64
- 1 43
- 89 34
- 83 51
- 25 94 54 37
- 80 32 14
- 88 82
- 18

- 6
- 14 2 5
- 18 4 5
- 25 1 2
- 80 2 3
- 137

- 65 34
- 69 12
- 33 63
- 57 18
- 18 58
- 22 43 18 53
- 62 13 69
- 51 16
- 56

- 6
- 13 2 4
- 16 3 5
- 18 1 4
- 43 1 3
- 90

- 29 35
- 64 37
- 26 58
- 73 1
- 47 82
- 35 23 56 50
- 43 37 48
- 74 32
- 85

- 6
- 23 1 3
- 32 3 5
- 35 1 2
- 37 2 4
- 127

- 40 57
- 7 70
- 86 76
- 88 3
- 98 81
- 35 50 72 63
- 79 105 92
- 73 13
- 79

- 6
- 13 3 5
- 35 1 2
- 50 1 3
- 72 1 4
- 170

- 48 37
- 86 62
- 40 3
- 31 40
- 99 70
- 45 35 17 61
- 75 59 15
- 38 89
- 74

- 6
- 15 2 5
- 17 1 4
- 35 1 3
- 38 3 4
- 105

- 2 23
- 96 36
- 56 76
- 89 96
- 1 20
- 95 76 114 3
- 57 60 96
- 39 78
- 116

- 6
- 3 1 5
- 39 3 4
- 57 2 3
- 60 2 4
- 159

- 87 51
- 11 6
- 51 15
- 66 51
- 59 34
- 88 51 21 33
- 41 71 56
- 39 21
- 18

- 6
- 18 4 5
- 21 1 4
- 21 3 5
- 41 2 3
- 101

- 1 54
- 67 23
- 50 13
- 13 61
- 93 58
- 73 64 14 92
- 20 66 44
- 61 62
- 80

- 6
- 14 1 4
- 20 2 3
- 44 2 5
- 61 3 4
- 139