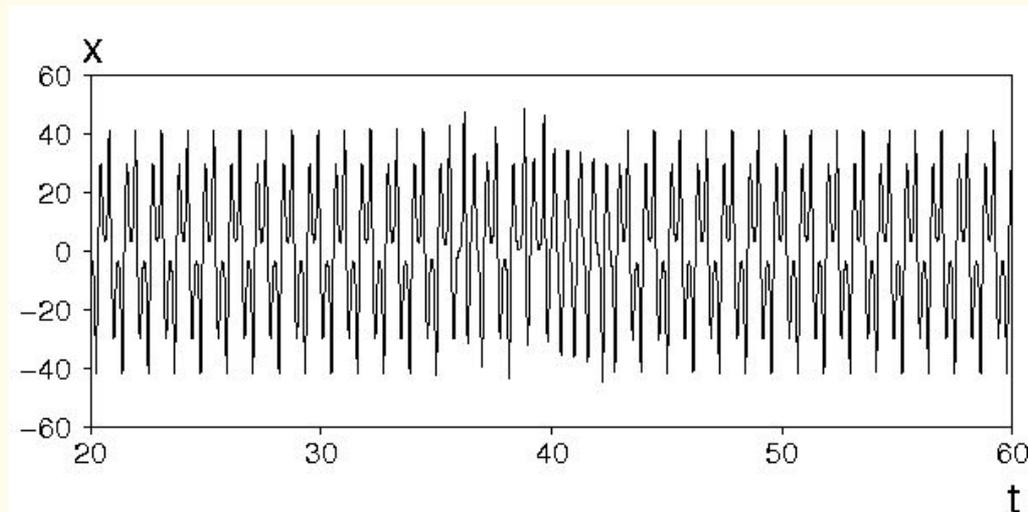


## “Жесткие” переходы к хаосу. Кризис и перемежаемость

С развитием представлений о динамическом хаосе было установлено, что переход от периодических колебаний к хаосу может происходить скачком, в результате одной единственной бифуркации. Такой механизм возникновения хаоса называют “жестким”. Он сопровождается явлением *перемежаемости*. *Перемежаемостью* называют режим чередования во времени почти регулярных колебаний (*ламинарная фаза*) с интервалами хаотического поведения (*турбулентная фаза*), наблюдающийся сразу за порогом возникновения хаоса. Жесткий переход к хаосу и явление перемежаемости были впервые рассмотрены в работах И. Помо и П. Манневиля, поэтому соответствующий бифуркационный механизм возникновения хаоса получил название *сценария Помо-Манневиля*.



При жестком возникновении хаоса бифуркация периодического режима приводит к резкой качественной перестройке структуры фазового пространства, включая структуру бассейна притяжения аттрактора. Подобные бифуркации аттракторов называют *кризисами*. Типичными кризисами периодического режима (цикла периода  $T$ ) являются

- 1) касательная (седло-узловая) бифуркация;
- 2) субкритическая бифуркация удвоения периода (существовавший в системе до бифуркации неустойчивый цикл периода  $2T$  «схлопывается» в устойчивую неподвижную точку; после бифуркации неподвижная точка становится неустойчивой);
- 3) субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа (до бифуркации в системе сосуществуют устойчивая неподвижная точка и неустойчивая замкнутая траектория; в точке бифуркации эта кривая стягивается к неподвижной точке, в результате чего последняя становится неустойчивой).

В случае касательной бифуркации устойчивое состояние равновесие сливается в седловым и исчезает. В двух других случаях неподвижная точка продолжает существовать и после бифуркации, но становится неустойчивой (седловой).

Пусть при  $\mu < \mu_{кр}$  система имеет аттрактор  $C$  – цикл периода  $m$ . В результате любой из перечисленных бифуркаций в точке  $\mu = \mu_{кр}$  аттрактор  $C$  перестает существовать. При  $\mu > \mu_{кр}$  фазовые траектории из локальной окрестности исчезнувшего аттрактора  $C$  должны попадать на какой-то другой аттрактор, либо уже существовавший в системе при  $\mu < \mu_{кр}$ , либо возникающий в результате бифуркации.

Каковы же условия, при которых кризис  $m$ -цикла приводит к возникновению перемежающегося хаоса?

Это происходит в том случае, когда в бифуркационной точке  $\mu = \mu_{кр}$  уже существует хаотическое множество, которое при  $\mu > \mu_{кр}$  становится притягивающим и включает в себя локальную окрестность цикла  $C$  так, что фазовая траектория на хаотическом аттракторе время от времени в эту окрестность возвращается.

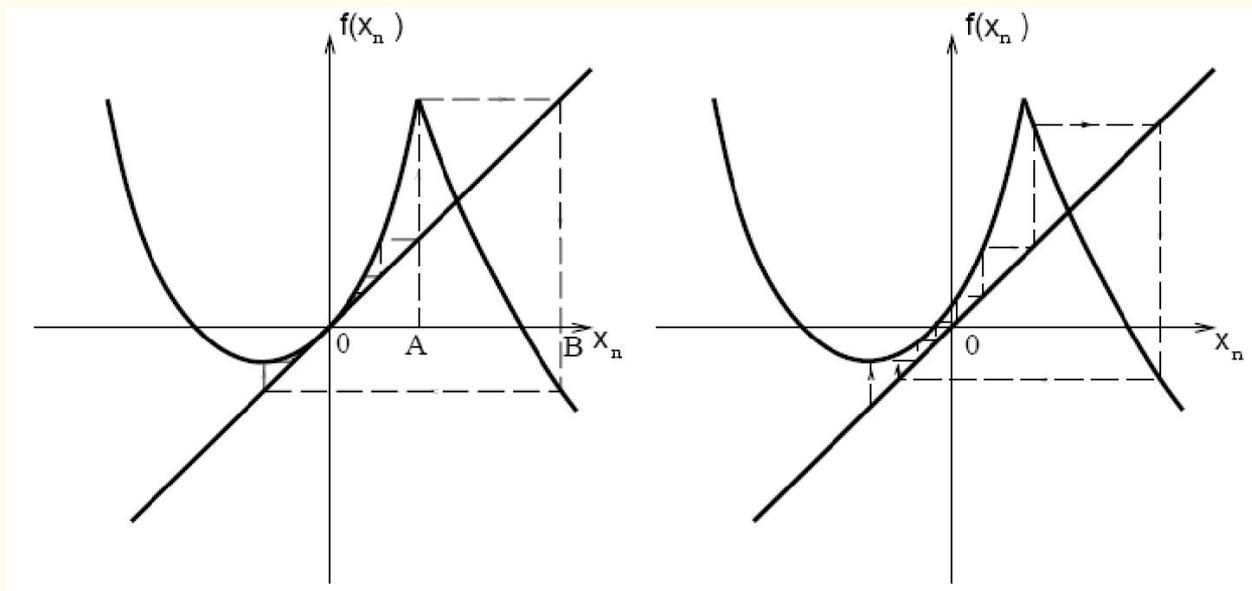
Переменяемость, связанная с касательной (седло-узловой) бифуркацией циклов, наиболее типична для широкого класса ДС. Она была обнаружена и исследована раньше других случаев переменяемости и получила название – *переменяемость I типа*. Для анализа свойств переменяемости I типа используют одномерное модельное отображение вида

$$x_{n+1} = f(x_n) = \varepsilon + x_n + \beta |x_n|^p + \text{"возврат"}. \quad (61)$$

Параметр  $\varepsilon$  соответствует параметру надкритичности  $\mu - \mu_{кр}$  системы, так как в отображении (61) касательная бифуркация имеет место при  $\varepsilon = 0$ ;  $p$  – целое число, определяющее порядок экстремума функции последования. Возврат изображающей точки в ограниченный интервал значений  $x$  может быть осуществлен различными способами.

Например, для отображения на рисунке для возврата изображающей точки служит ветвь графика функции последования на отрезке АВ. Отображение, приведенное на рисунке слева, соответствует моменту касательной бифуркации  $\varepsilon = 0$ . Пунктирные линии на графике представляют собой построение с помощью диаграммы Ламерея двоякоасимптотической траектории седло-узловой точки. Отображение на рисунке справа соответствует случаю  $\varepsilon \geq 0$ . В окрестности исчезнувшей неподвижной точки график функции последования образует так называемый *канал*, по которому изображающая точка движется довольно долго, что соответствует ламинарной фазе перемежаемости. Уход изображающей точки из канала определяет турбулентную фазу, в которой точка должна попасть на участок АВ, обеспечивающий ее возврат в канал.

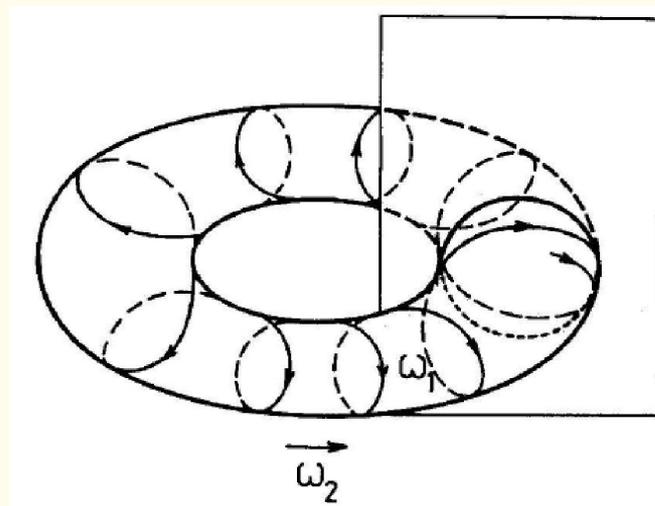
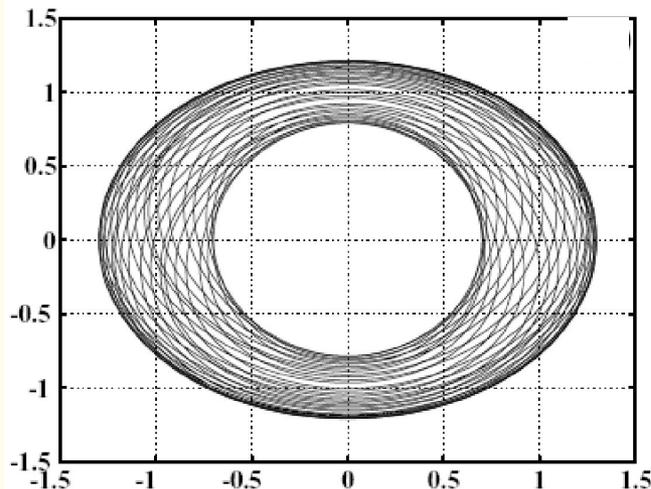
В точке  
бифуркации



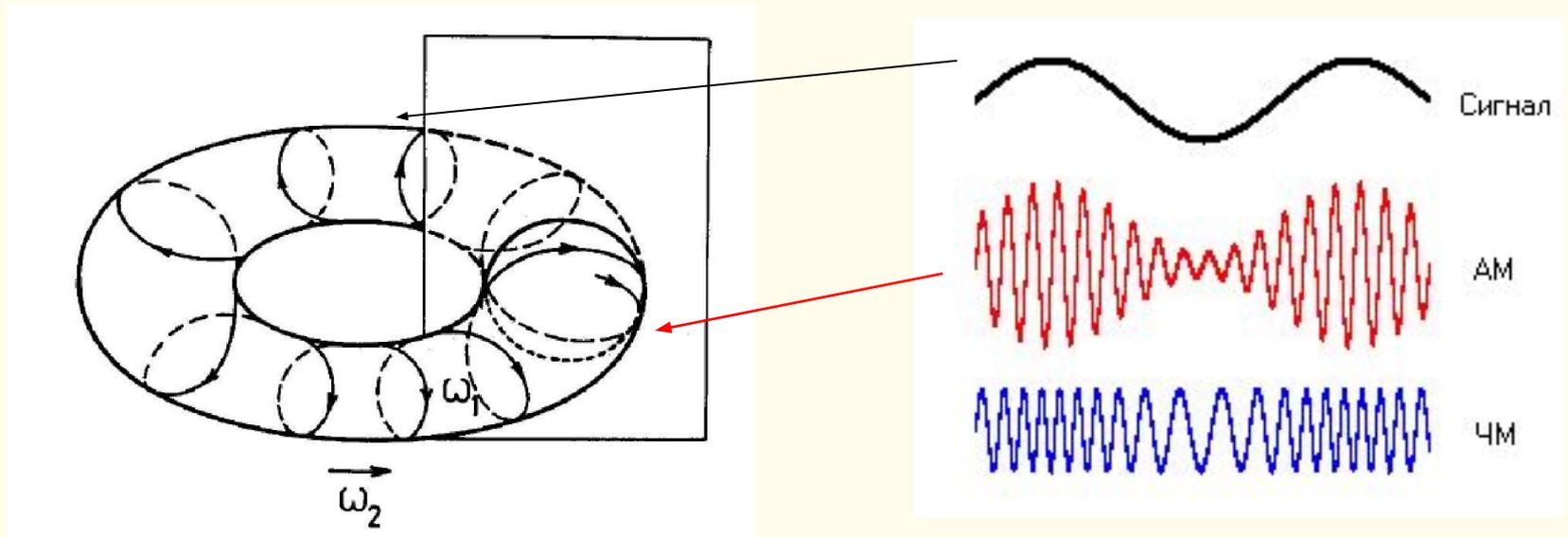
Сразу после  
бифуркации

# Переход к хаосу через разрушение замкнутой инвариантной кривой

Данный бифуркационный механизм возникновения хаотического поведения наблюдается в неавтономных автоколебательных системах (зависящих от внешней периодической силы). Колебания, которые демонстрируют в этом случае ДС, называются *квазипериодическими* (имеется 2 или более частоты колебаний). Образом квазипериодических колебаний в фазовом пространстве системы является *n-мерный тор*. В случае наличия 2-х частот – собственной частоты системы и частоты внешней силы – колебания являются *двухчастотными*, и фазовый портрет системы представляет собой *двумерный тор*. При переходе к сечению Пуанкаре неавтономной автоколебательной системы двумерному тору соответствует замкнутая инвариантная кривая на фазовой плоскости двумерного отображения. Эволюция тора в хаотический аттрактор выглядит при этом как деформация и разрушение замкнутой кривой.



Если рассматривать неподвижную точку двумерного отображения как сечение Пуанкаре предельного цикла трехмерной динамической системы с непрерывным временем, то устойчивая замкнутая кривая, появившаяся в результате бифуркации Неймарка в двумерном отображении, есть сечение Пуанкаре двумерного тора в соответствующей ДС с непрерывным временем. Данный режим отвечает биениям или автомодуляции (или двухчастотным колебаниям) в ДС.

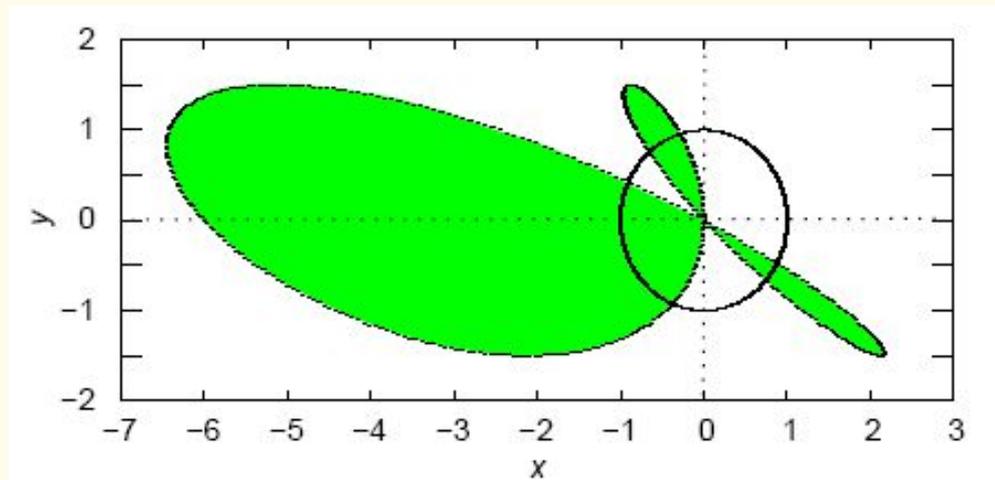


Чтобы проследить эволюцию тора в хаотический аттрактор, проанализируем поведение замкнутой инвариантной кривой в сечении Пуанкаре. В качестве примера рассмотрим двумерное отображение (69)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= ax_n(1 - x_n - y_n), \\ y_{n+1} &= bx_n y_n,\end{aligned}\tag{62}$$

где управляющие параметры определены в интервале  $2.0 < a, b \leq 4.0$ .

На рисунке показано преобразование этим отображением области начальных значений, ограниченной единичной окружностью. Можно видеть, что единичная окружность растягивается в область отрицательных значений  $x$ , в то же время часть начального множества отображается в лепестки, расположенные выше и правее.



Отображение (62) имеет три неподвижные точки:

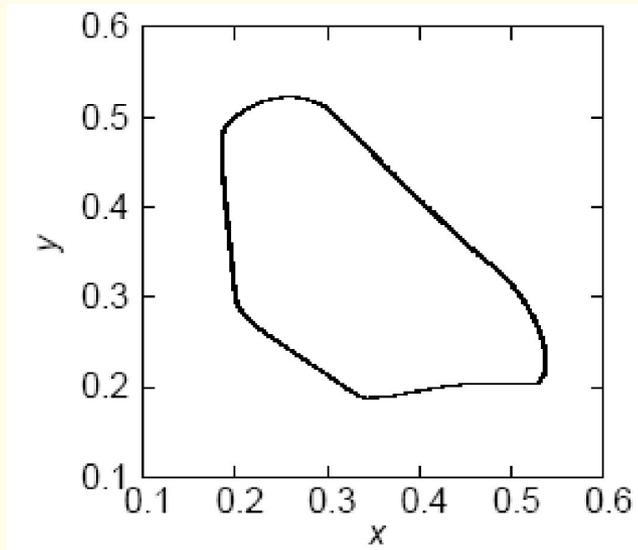
$(0, 0)$ ,  $(-1 - a, 0)$  и  $(1/b, 1 - 1/b - 1/a)$ . Рассмотрим динамику в окрестности последней.

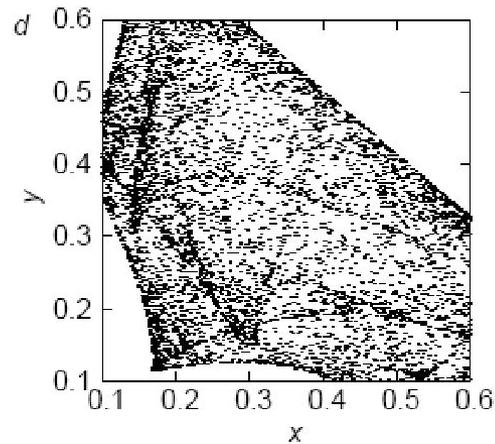
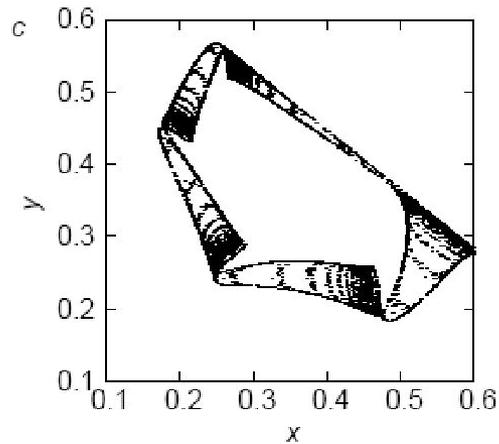
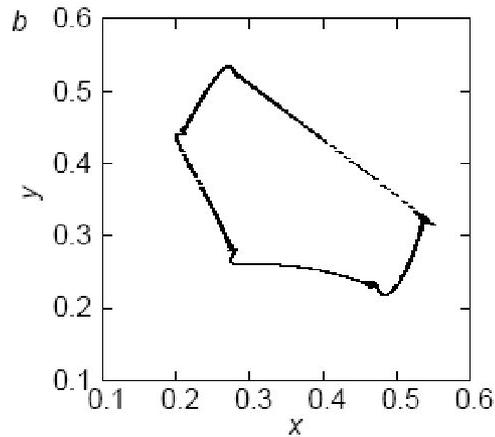
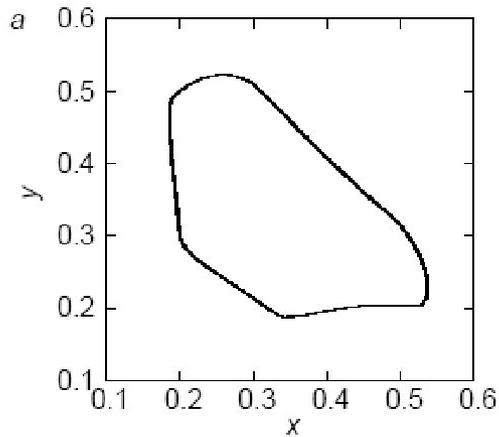
Анализ на устойчивость дает

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ (2 - a/b) \pm \sqrt{(2 - a/b)^2 - 4a(1 - 2/b)} \right] \quad (63)$$

Соотношение (63) позволяет определить кривую на плоскости параметров  $(a, b)$ , при достижении которой (в сторону увеличения параметра  $a$  или  $b$ ) состояние равновесия теряет устойчивость через бифуркацию Неймарка.

В предположении  $|\rho_{\pm}| = 1$ , из (63) следует условие  $b = 2a/(a - 1)$ , причем выражение под корнем в (63) при этом отрицательно. Таким образом, на линии плоскости параметров  $b = 2a/(a - 1)$  рождается замкнутая инвариантная кривая.





При удалении от указанной линии на плоскости параметров, замкнутая инвариантная кривая сначала увеличивается в размерах, а затем начинает деформироваться.

Накапливающиеся складки кривой приводят в конце концов к ее разрушению и образованию хаотического множества.

По мере приближения  $a$  и  $b$  к значению 4.0 ветви хаотического аттрактора «распухают», перекрывая друг друга, и заполняют все большую площадь.