

# Байесовская экстраполяция линейных функций по эмпирическим данным

**М.И. Шлезингер**

МНУЦ ИТиС НАН Украины,

[schles@irtc.org.ua](mailto:schles@irtc.org.ua)

<http://irtc.org.ua/image/>

12 июня 2012 г.

# Априорные данные

$R^n$  — евклидово линейное пространство ;

$f: R^n \rightarrow R$  — линейная функция ;

$M$  — множество линейных функций ;

$y(x) = pf(x) + \varepsilon; x \in R^n; \varepsilon \in M; \mu(\varepsilon)$ .

# Эмпирические данные

$X \subset R^n$ ,  $X$  – область наблюдения,  $|X| = m < \infty$ ;

$Y : X \rightarrow R$ ,  $y(x)$  – наблюдение в точке  $x \in X$ ,  $Y \in R^m$ ;

$y(x) = f(x) + \varepsilon$ ;  $x \in R^n$ ;  $\varepsilon$  – ;  $p_{\varepsilon}(\varepsilon)$ ;

$$p(Y|f) = \prod_{x \in X} p_{\varepsilon}(y(x) - f(x)).$$

# Прогноз

$x_0 \in R^n$  – точка прогноза;

$y_0 \in R$  – прогнозируемое значение  $f(x)$ ;

$W(f(x_0), y_0)$  – штраф,  $W(f(x_0), y_0) = (f(x_0) - y_0)^2$ ;

$\langle X \subset R^n, x_0 \in R^n, p_w, W \rangle \Rightarrow q^d : R^m \rightarrow R$ ;

$$q^d(Y) = y_0;$$

$$q^r : R^m \times R = R; q^r(y_0 | Y);$$

# Известные подходы

$$\langle X, Y, x_0, p_u, W \rangle$$

*Максимальное правдоподобие:*

$$L(f) = \prod_{x \in X} p_u(y(x) - f(x)), \quad f^* = \arg \max_{f \in F} L(f).$$

*Минимальный эмпирический риск:*

$$E(f) = \sum_{x \in X} W(f(x), y(x)), \quad f^* = \arg \min_{f \in F} E(f).$$

$$y_0 = f^*(x_0).$$

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \max_{f \in F_1} L(f) \leq \max_{f \in F_2} L(f);$$

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \min_{f \in F_1} E(f) \geq \min_{f \in F_2} E(f).$$

# Индуктивное моделирование

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n;$$

$$F = F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n;$$

$$G_k : F_k(Y) \rightarrow R, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$Q_k : F_k(Y) \rightarrow R, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$f_k^*(Y) = \arg \max_{f \in F_k(Y)} G_k(f);$$

$$f^*(Y) = \arg \max_{k=1,2,\dots,n} Q_k(f_k^*(Y));$$

$$y_0 = f^*(Y)(x_0).$$

# Частичное упорядочение стратегий

$$R(q^r, f) = \sum_{y_0 \in R} \sum_{Y \in R^m} q^r(y_0/Y) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0);$$

$$q_1^r \leq q_2^r \Leftrightarrow \forall f \in F \left( R(q_1^r, f) \geq R(q_2^r, f) \right) \& \\ \& \exists f \in F \left( R(q_1^r, f) > R(q_2^r, f) \right);$$

$$q_1^r < q_2^r \Leftrightarrow \forall f \in F \left( R(q_1^r, f) > R(q_2^r, f) \right).$$

*Плохая стратегия*  $q \Leftrightarrow \exists q' (q \leq q')$ ,

*Строго плохая стратегия*  $q \Leftrightarrow \exists q' (q < q')$ .

# Байесовские стратегии

$$\alpha : F \rightarrow R; \alpha(f) \geq 0, \sum_{f \in F} \alpha(f) = 1;$$

$$R(q, \alpha) = \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q, f);$$

$$q^*(\alpha) = \arg \min_q R(q, \alpha);$$

$$q^*(\alpha)(Y) = \arg \min_{y_0 \in R} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0) =$$

$$= \arg \min_{y_0 \in R} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot [f(x_0) - y_0]^2 =$$

$$= \frac{\sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot f(x_0)}{\sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f)}.$$



*ЛЕММА.* Пусть для некоторого  $\alpha : F \rightarrow R$  условие

$$q^*(\alpha) = \arg \min_q R(q, \alpha)$$

единственным образом определяет стратегию  $q^*(\alpha)$ .

Пусть для некоторой стратегии  $q^0$  равенство

$$R(q^*(\alpha), f) = R(q^0, f)$$

выполняется для всех  $f \in F$ .

В таком случае  $q^*(\alpha) = q^0$ .

$$\forall q \neq q^*(\alpha) \left( \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q, f) > \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q^*(\alpha), f) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall q \neq q^*(\alpha) \exists f \in F \left( R(q, f) > R(q^*(\alpha), f) \right).$$

ТЕОРЕМА. Для любой стратегии  $q^0$  существует байесовская стратегия  $q^*$  такая что неравенство  $R(q^*, f) \geq R(q^0, f)$  выполняется для всех  $f \in F$ .

$\min C$

$$C - R(q^*, f) \geq -R(q^0, f), f \in F.$$

$$\begin{array}{l}
 \min C \\
 \alpha(f) \left| \begin{array}{l} C - \sum_{y^0 \in R} \sum_{Y \in R^m} q^*(y_0/Y) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0) \geq -R(q^0, f), f \in F; \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 t(Y) \left| \begin{array}{l} \sum_{y^0 \in R} q^*(y_0/Y) = 1, Y \in R^m; \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 q^*(y_0/Y) \geq 0, y_0 \in R, Y \in R^m.
 \end{array}$$

### Двойственная задача

$$\begin{array}{l}
 \max \sum_{Y \in R^m} t(Y) - \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q^0, f), \\
 q^*(y_0/Y) \left| \begin{array}{l} t(Y) \leq \sum_{Y \in R^m} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0), y_0 \in R, Y \in R^m; \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 C \left| \begin{array}{l} \sum_{f \in F} \alpha(f) = 1; \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 \alpha(f) \geq 0, f \in F.
 \end{array}$$

$$q^*_0(y^*_0/Y) = 1, \quad y^*_0 = \arg \min_{y_0} p \sum_{Y \in R^m} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0).$$

$$\min C,$$

$$C - R(q^*, f) \geq -R(q^0, f), f \in F.$$

$\min$  Стратегия  $q$  строго<sup>0</sup> плохая ,

$\min$  Субстратегия  $q$  плохая<sup>0</sup> ,

либо  $\forall f \in F (R(q^0, f) = R(q^*, f))$ .

СЛЕДСТВИЕ. Если для любой  $\alpha : F \rightarrow R$  существует единственная байесовская

стратегия  $q^*(\alpha) = \arg \min_q R(q, \alpha)$ ,

то любая стратегия либо байесовская,  
либо плохая.