

Байесовская экстраполяция линейных функций по эмпирическим данным

М.И. Шлезингер

МНУЦ ИТиС НАН Украины,

schles@irtc.org.ua

<http://irtc.org.ua/image/>

12 июня 2012 г.

Априорные данные

R^n — евклидово линейное пространство ;

$f: R^n \rightarrow R$ — линейная функция ;

M — множество линейных функций ;

$u(x) = pf(x) + \varepsilon; x \in R^n; \varepsilon - \text{ ; } u(\varepsilon).$

Эмпирические данные

$X \subset R^n$, X – область наблюдения, $|X| = m < \infty$;

$Y : X \rightarrow R$, $y(x)$ – наблюдение в точке $x \in X$, $Y \in R^m$;

$y(x) = f(x) + \varepsilon$; $x \in R^n$; ε – ; $p_{\varepsilon}(\varepsilon)$;

$$p(Y|f) = \prod_{x \in X} p_{\varepsilon}(y(x) - f(x)).$$

Прогноз

$x_0 \in R^n$ – точка прогноза;

$y_0 \in R$ – прогнозируемое значение $f(x)$;

$W(f(x_0), y_0)$ – штраф, $W(f(x_0), y_0) = (f(x_0) - y_0)^2$;

$\langle X \subset R^n, x_0 \in R^n, p_w, W \rangle \Rightarrow q^d : R^m \rightarrow R$;

$$q^d(Y) = y_0;$$

$$q^r : R^m \times R = R; q^r(y_0 | Y);$$

Известные подходы

$$\langle X, Y, x_0, p_u, W \rangle$$

Максимальное правдоподобие:

$$L(f) = \prod_{x \in X} p_u(y(x) - f(x)), \quad f^* = \arg \max_{f \in F} L(f).$$

Минимальный эмпирический риск:

$$E(f) = \sum_{x \in X} W(f(x), y(x)), \quad f^* = \arg \min_{f \in F} E(f).$$

$$y_0 = f^*(x_0).$$

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \max_{f \in F_1} L(f) \leq \max_{f \in F_2} L(f);$$

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \min_{f \in F_1} E(f) \geq \min_{f \in F_2} E(f).$$

Индуктивное моделирование

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n;$$

$$F = F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n;$$

$$G_k : F_k(Y) \rightarrow R, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$Q_k : F_k(Y) \rightarrow R, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$f_k^*(Y) = \arg \max_{f \in F_k(Y)} G_k(f);$$

$$f^*(Y) = \arg \max_{k=1,2,\dots,n} Q_k(f_k^*(Y));$$

$$y_0 = f^*(Y)(x_0).$$

Частичное упорядочение стратегий

$$R(q^r, f) = \sum_{y_0 \in R} \sum_{Y \in R^m} q^r(y_0/Y) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0);$$

$$q_1^r \leq q_2^r \Leftrightarrow \forall f \in F \left(R(q_1^r, f) \geq R(q_2^r, f) \right) \& \\ \& \exists f \in F \left(R(q_1^r, f) > R(q_2^r, f) \right);$$

$$q_1^r < q_2^r \Leftrightarrow \forall f \in F \left(R(q_1^r, f) > R(q_2^r, f) \right).$$

Плохая стратегия $q \Leftrightarrow \exists q' (q \leq q')$,

Строго плохая стратегия $q \Leftrightarrow \exists q' (q < q')$.

Байесовские стратегии

$$\alpha : F \rightarrow R; \alpha(f) \geq 0, \sum_{f \in F} \alpha(f) = 1;$$

$$R(q, \alpha) = \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q, f);$$

$$q^*(\alpha) = \arg \min_q R(q, \alpha);$$

$$q^*(\alpha)(Y) = \arg \min_{y_0 \in R} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0) =$$

$$= \arg \min_{y_0 \in R} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot [f(x_0) - y_0]^2 =$$

$$= \frac{\sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot f(x_0)}{\sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f)}.$$

ЛЕММА. Пусть для некоторого $\alpha : F \rightarrow R$ условие

$$q^*(\alpha) = \arg \min_q R(q, \alpha)$$

единственным образом определяет стратегию $q^*(\alpha)$.

Пусть для некоторой стратегии q^0 равенство

$$R(q^*(\alpha), f) = R(q^0, f)$$

выполняется для всех $f \in F$.

В таком случае $q^*(\alpha) = q^0$.

$$\begin{aligned} \forall q \neq q^*(\alpha) \left(\sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q, f) > \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q^*(\alpha), f) \right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \forall q \neq q^*(\alpha) \exists f \in F \left(R(q, f) > R(q^*(\alpha), f) \right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. Для любой стратегии q^0 существует байесовская стратегия q^* такая что неравенство $R(q^*, f) \geq R(q^0, f)$ выполняется для всех $f \in F$.

$\min C$

$$C - R(q^*, f) \geq -R(q^0, f), f \in F.$$

$$\begin{array}{l}
 \min C \\
 \alpha(f) \left| \begin{array}{l} C - \sum_{y^0 \in R} \sum_{Y \in R^m} q^*(y_0/Y) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0) \geq -R(q^0, f), f \in F; \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 t(Y) \left| \begin{array}{l} \sum_{y^0 \in R} q^*(y_0/Y) = 1, Y \in R^m; \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 q^*(y_0/Y) \geq 0, y_0 \in R, Y \in R^m.
 \end{array}$$

Двойственная задача

$$\begin{array}{l}
 \max \sum_{Y \in R^m} t(Y) - \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q^0, f), \\
 q^*(y_0/Y) \left| \begin{array}{l} t(Y) \leq \sum_{Y \in R^m} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0), y_0 \in R, Y \in R^m; \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 C \left| \begin{array}{l} \sum_{f \in F} \alpha(f) = 1; \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 \alpha(f) \geq 0, f \in F.
 \end{array}$$

$$q^*_0(y^*_0/Y) = 1, \quad y^*_0 = \arg \min_{y_0} p \sum_{Y \in R^m} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot W(f(x_0), y_0).$$

$$\min C,$$

$$C - R(q^*, f) \geq -R(q^0, f), f \in F.$$

\min Стратегия q строго⁰ плохая ,

\min Субстратегия q плохая⁰ ,

либо $\forall f \in F (R(q^0, f) = R(q^*, f))$.

СЛЕДСТВИЕ. Если для любой $\alpha : F \rightarrow R$ существует единственная байесовская

стратегия $q^*(\alpha) = \arg \min_q R(q, \alpha)$,

то любая стратегия либо байесовская,
либо плохая.