Байесовская экстраполяция линейных функций по эмпирическим данным

М.И. Шлезингер

МНУЦ ИТиС НАН Украины,
schles@irtc.org.ua
http://irtc.org.ua/image/

12 июня 2012 г.

Априорные данные

R^n – n-мерное линейное пространство;

$f: R^n \to R$ – линейная функция;

$f \in F$ – множество линейных функций;

$y(x) = f(x) + \varepsilon;\ x \in R^n;\ \varepsilon$ – шум; $p_ш(\varepsilon)$.

Эмпирические данные

$$X \subset R^n,\ X - \textit{область наблюдения},\ \ |X| = m < \infty;$$

$$Y : X \to R,\ y(x) - \textit{наблюдение в точке}\ x \in X,\ Y \in R^m;$$

$$y(x) = f(x) + \varepsilon;\ x \in R^n;\ \varepsilon - \qquad ;\quad _{ш}(\varepsilon);$$

$$p(Y|f) = \prod_{x \in X} p_{ш}\left(y(x) - f(x)\right).$$

Прогноз

$x_0 \in R^n$ – *точка прогноза*;

$y_0 \in R$ – *прогнозируемое значение* $f(x)$;

$W\left(f\left(x_0\right), y_0\right)$ – *штраф*, $W\left(f\left(x_0\right), y_0\right) = \left(f\left(x_0\right) - y_0\right)^2$;

$\left\langle X \subset R^n, x_0 \in R^n, p_ш, W \right\rangle \Rightarrow q^d : R^m \to R$;

$$q^d\left(Y\right) = y_0;$$

$q^r : R^m \times R = R$; $q^r\left(y_0 \middle| Y\right)$;

Известные подходы

$$\left\langle X, Y, x_0, p_ш, W \right\rangle$$

$Максимальное\ \ правдоподобие:$

$$L(f) = \prod_{x \in X} p_ш\left(y(x) - f(x)\right),\ f^* = \arg\max_{f \in F} L(f).$$

$Минимальный\ \ эмпирический\ \ риск:$

$$E(f) = \sum_{x \in X} W\left(f(x), y(x)\right), \quad f^* = \arg\min_{f \in F} E(f).$$

$$y_0 = f^*(x_0).$$

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \max_{f \in F_1} L(f) \le \max_{f \in F_2} L(f);$$

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \min_{f \in F_1} E(f) \ge \min_{f \in F_2} E(f).$$

Индуктивное моделирование

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n;$$

$$F = F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n;$$

$$G_k : F_k\left(Y\right) \to R,\;\; k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$Q_k : F_k\left(Y\right) \to R,\;\; k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f_k^*\left(Y\right) = \arg\max_{f \in F_k(Y)} G_k\left(f\right);$$

$$f^*\left(Y\right) = \arg\max_{k = 1, 2, \ldots, n} Q_k\left(f_k^*\left(Y\right)\right);$$

$$y_0 = f^*\left(Y\right)\left(x_0\right).$$

Частичное упорядочение стратегий

$$R\left(q^r, f\right) = \sum_{y_0 \in R} \sum_{Y \in R^m} q^r\left(y_0 / Y\right) \cdot p\left(Y / f\right) \cdot W\left(f\left(x_0\right), y_0\right);$$

$$q_1^r \le q_2^r \Leftrightarrow \forall f \in F\left(R\left(q_1^r, f\right)\right) \ge R\left(q_2^r, f\right) \&$$

$$\& \exists f \in F\left(R\left(q_1^r, f\right) > R\left(q_2^r, f\right)\right);$$

$$q_1^r < q_2^r \Leftrightarrow \forall f \in F\left(R\left(q_1^r, f\right) > R\left(q_2^r, f\right)\right).$$

$$\text{Плохая стратегия } q \Leftrightarrow \exists q'\left(q \le q'\right),$$

$$\text{Строго плохая стратегия } q \Leftrightarrow \exists q'\left(q < q'\right).$$

Байесовские стратегии

$$\alpha : F \to R;\ \alpha(f) \geq 0,\ \sum_{f \in F} \alpha(f) = 1;$$

$$R(q,\alpha) = \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q,f);$$

$$q^*(\alpha) = \arg\min_{q} R(q,\alpha);$$

$$q^*(\alpha)(Y) = \arg\min_{y_0 \in R} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot W\left(f(x_0), y_0\right) =$$

$$= \arg\min_{y_0 \in R} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot \left[f(x_0) - y_0\right]^2 =$$

$$= \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot f(x_0) \Big/ \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f).$$

ЛЕММА. *Пусть для некоторого* $\alpha : F \to R$ *условие*

$$q^*(\alpha) = \arg\min_q R(q,\alpha)$$

единственным образом определяет стратегию $q^*(\alpha)$.

Пусть для некоторой стратегии q^0 *равенство*

$$R\left(q^*(\alpha), f\right) = R\left(q^0, f\right)$$

выполняется для всех $f \in F$.

В таком случае $q^*(\alpha) = q^0$.

$$\forall q \ne q^*(\alpha)\left(\sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q, f) > \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R(q)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall q \ne q^*(\alpha) \exists f \in F\left(R(q, f) > R\left(q^*(\alpha), f\right)\right).$$

ТЕОРЕМА. Для любой стратегии q^0 существует байесовская стратегия q^*, такая, что неравество $R\left(q^*, f\right) \le R\left(q^0, f\right)$ выполняется для всех $f \in F$.

$$\min C$$

$$C - R\left(q^*, f\right) \ge -R\left(q^0, f\right),\ f \in F.$$

Прямая задача

$$\min C$$

$$\begin{array}{l|l} \alpha(f) & C - \sum\limits_{y^0 \in R} \sum\limits_{Y \in R^m} q^*(y_0/Y) \cdot p(Y/f) \cdot W\big(f(x_0), y_0\big) \geq -R\big(q^0, f\big), f \in F; \\ t(Y) & \sum\limits_{y^0 \in R} q^*(y_0/Y) = 1,\ \ Y \in R^m; \end{array}$$

$$q^*(y_0/Y) \geq 0,\ \ y_0 \in R,\ \ Y \in R^m.$$

Двойственная задача

$$\max \sum_{Y \in R^m} t(Y) - \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot R\big(q^0, f\big),$$

$$\begin{array}{l|l} q^*(y_0/Y) & t(Y) \leq \sum\limits_{Y \in R^m} \sum\limits_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot W\big(f(x_0), y_0\big),\ \ y_0 \in R,\ \ Y \in R^m; \\ C & \sum\limits_{f \in F} \alpha(f) = 1; \end{array}$$

$$\alpha(f) \geq 0,\ \ f \in F.$$

$$q^*(y_0/Y) = 1, \qquad y_0^* = \arg\min_{y_0} \sum_{Y \in R^m} \sum_{f \in F} \alpha(f) \cdot p(Y/f) \cdot W\big(f(x_0), y_0\big).$$

$$\min C,$$

$$C - R\left(q^{*}, f\right) \geq -R\left(q^{0}, f\right),\ f \in F.$$

$\min C > 0 \Rightarrow$ *стратегия* q^{0} *строго плохая*,

$\min C = 0 \Rightarrow$ *либо стратегия* q^{0} *плохая*,

либо $\forall f \in F\left(R\left(q^{0}, f\right) = R\left(q^{*}, f\right)\right).$

СЛЕДСТВИЕ. Если для любой $\alpha : F \to R$ *существует единственная байесовская стратегия* $q^{*}(\alpha) = \arg\min_{q} R(q, \alpha)$, *то любая стратегия либо байесовская, либо плохая.*