

# УМФ

## МОДУЛЬ 5

### УЭ-5

*Задача Гильберта для уравнений Коши-Римана в круге*

Пусть  $G$  - единичный круг на плоскости  $(x, y)$  с границей  $\Gamma$  и функции  $a, b, f \in C^4(\Gamma)$  таковы, что  $a^2(s) + b^2(s) > 0$ . Требуется найти функции  $u, v \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ , являющиеся решением системы уравнений Коши-Римана в круге  $G$ :

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0, \quad (5.1)$$

и удовлетворяющие на единичной окружности  $\Gamma$  граничному условию

$$a(s)u + b(s)v = f(s). \quad (5.2)$$

**Определение 5.1.** Индексом граничного условия (5.2) называется число  $N$  оборотов вокруг начала координат на плоскости  $(a, b)$ , которые совершает вектор с координатами  $(a(s), b(s))$  при изменении аргумента от 0 до  $2\pi$ .

### Теорема 5.1. (О разрешимости)

1. Если индекс граничного условия (5.2)  $N \geq 0$ , задача Гильберта (5.1), (5.2) всегда имеет не единственное решение, зависящее от произвольной постоянной.
2. При  $N < 0$ , если задача Гильберта разрешима, то она разрешима единственным образом, но для этого необходимо и достаточно, чтобы правая часть была ортогональна к любой функции из некоторой линейной конечномерной системы функций, размерность которой  $f(s)$

$$(2|N| - 1).$$

**Доказательство.**

1. Предположим вначале, что  $a(s)$  и  $b(s)$  есть граничные значения действительной и мнимой частей некоторой аналитической в  $G$  и не равной там нулю функции

$$c(x + iy) = a(x, y) + ib(x, y).$$

Тогда аналитическая в круге функция

$$\frac{W}{c} = \frac{u + iv}{a + ib} = \frac{au + bv}{a^2 + b^2} + i \frac{av - bu}{a^2 + b^2} \equiv U + iV$$

имеет вещественную часть  $U$ , значение которой на  $\Gamma$  известно:

$$U|_{\Gamma} = \frac{f(s)}{a^2(s) + b^2(s)}. \quad (5.3)$$

Тогда гармоническая функция  $U$  однозначно определяется как решение задачи Дирихле, а по ней гармонически сопряженная функция  $V$  находится с точностью до произвольной постоянной. А тогда

$$W(x, y) = c(x + iy)(U(x, y) + iV(x, y)).$$

2. Заметим, что граничное условие (5.2) эквивалентно любому условию вида

$$\rho(s)a(s)u + \rho(s)b(s)v = \rho(s)f(s),$$

какова бы ни была строго положительная функция  $\rho(s)$ . Поэтому в общем случае подберём множитель  $\rho(s)$  так, чтобы функции  $A(s) = \rho(s)a(s)$  и  $B(s) = \rho(s)b(s)$ , были граничными значениями действительной и мнимой частей аналитической в круге функции  $C(x+iy) = A(x,y) + iB(x,y)$ .

Будем строить функцию  $C$  без нулей внутри круга в виде  $C(x+iy) = \exp[p(x,y) + iq(x,y)]$ , где  $(p+iq)$ - аналитическая в  $G$  функция. Эти функции на окружности  $\Gamma$  удовлетворяют условиям:

$$e^{p(x,y)} \Big|_{\Gamma} = \rho(s) \sqrt{a^2(s) + b^2(s)}, \quad e^{iq(x,y)} \Big|_{\Gamma} = \frac{a(s) + ib(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}. \quad (5.5)$$

Таким образом, необходимо определить функции из уравнений (5.5). Из определения индекса  $N$  видно, что при движении точки  $s$  по окружности  $\Gamma$  против часовой стрелки вектор

$$\frac{a(s) + ib(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}$$

обойдёт окружность  $N$  раз. А так как функция  $q$  является аргументом этого вектора, то она получит приращение  $2\pi N$  и уже при  $N \neq 0$  не является однозначной.

Поэтому разделив  $q$  на аналитическую функцию  $q(x,y)$  имеющую тот же индекс, получим на  $\Gamma$  функцию

$$\frac{\exp(iq)}{(x+iy)^N} \Big|_{\Gamma} = \frac{a(s) + ib(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}} \times \frac{1}{\cos(Ns) + i \sin(Ns)},$$

аргумент которой определяется однозначно.

Приняв эти значения аргумента за граничные значения функции  $q_0(x, y)$ , построим внутри круга аналитическую функцию  $p_0(x, y) + iq_0(x, y)$ .

Произвольную постоянную, появляющуюся при определении функции  $p_0$ , фиксируем каким-либо определённым образом. И пусть теперь

$$A_0(x, y) + iB_0(x, y) = \exp\{p_0(x, y) + iq_0(x, y)\}.$$

Тогда на границе  $\Gamma$  имеем

$$e^{p_0(x,y)+iq_0(x,y)} \Big|_{\Gamma} = e^{p_0(x,y)} \Big|_{\Gamma} \frac{a(s) + ib(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}} \times \frac{1}{\cos(Ns) + i \sin(Ns)}.$$

Следовательно, функция

$$A(x, y) + iB(x, y) = (A_0(x, y) + iB_0(x, y)) (x + iy)^N \quad (5.6)$$

на границе круга  $\Gamma$  равна

$$e^{p_0(x,y)} \Big|_{\Gamma} \frac{a(s) + ib(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}.$$

**Опр. 5.2.** Множитель  
множителем.

$$p(s) = e^{p_0(x,y)} \Big|_{\Gamma} \frac{\text{называется}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}$$

регуляризирующим

1. Пусть вначале  $N \geq 0$ .

В этом случае построенная аналитическая функция  $A(x, y) + iB(x, y)$  имеет внутри круга  $G$  единственный нуль порядка  $N$  в начале координат.

Построим аналитическую в  $G$  и непрерывную вплоть до границы функцию

$U(x, y) + iV(x, y)$  по граничным значениям её действительной части

$$U(\cos s, \sin s) = \frac{\rho(s)f(s)}{A^2(s) + B^2(s)}.$$

Тогда функция  $u(x, y) + iv(x, y) = (A + iB)(U + iV)$  является искомой.

Действительно, по построению она аналитична в круге  $G$  и непрерывна вплоть до границы  $\Gamma$  и, так как

$$\frac{Au + Bv}{A^2 + B^2} \Big|_{\Gamma} = \operatorname{Re} \frac{u(x, y) + iv(x, y)}{A(x, y) + iB(x, y)} \Big|_{\Gamma} = U(x, y) \Big|_{\Gamma} = \frac{\rho(s)f(s)}{A^2(s) + B^2(s)},$$

то  $(Au + Bv) \Big|_{\Gamma} = \rho(s)f(s)$  и существование решения при  $N \geq 0$  установлено.

Исследуем теперь вопрос о степени неединственности этого решения.

Ясно, что решение задачи Гильберта определяется с точностью до произвольного решения однородной задачи. Итак, пусть  $u(x, y) + iv(x, y)$  решение однородной задачи, то есть  $(au + bv)|_\Gamma = 0$ , следовательно,  $(Au + Bv)|_\Gamma = 0$ . Поэтому функция

$$U + iV = \frac{u + iv}{A + iB} = \frac{Au + Bv}{A^2 + B^2} + i \frac{Av - Bu}{A^2 + B^2}$$

имеет вещественную часть  $U|_\Gamma = 0$ .

Так как  $u + iv$  регулярна внутри круга,  $A + iB$  имеет в начале координат нуль кратности  $N$ , то функция  $U(x, y) + iV(x, y)$  имеет в начале координат полюс порядка не выше чем  $N$ .

Построим общий вид аналитической функции  $U + iV$  имеющей в начале координат полюс кратности не выше чем  $N$  и такой, что  $U|_{\Gamma} = 0$ .

Пусть  $U + iV$  имеет в центре круга полюс с главной частью

$$\sum_{k=1}^N (\xi_k + i\eta_k)(x + iy)^{-k}$$

А так как полином  $\sum_{k=1}^N (\xi_k - i\eta_k)(x + iy)^k$  имеет вещественную часть, принимающую на границе  $\Gamma$  те же значения, что и вещественная часть главной части, то функция

$$P + iQ = \sum_{k=1}^N [(\xi_k + i\eta_k)(x + iy)^{-k} - (\xi_k - i\eta_k)(x + iy)^k]$$

имеет вещественную часть, обращающуюся на  $\Gamma$  в нуль, и ту же главную часть,

что и  $U + iV$ . Следовательно,  $(U + iV) - (P + iQ)$  ограничена, и

вещественная часть разности принимает на  $\Gamma$  нулевые значения. Отсюда

$U - P = 0$ ,  $V - Q = C^* = const$ .  
Итак

$$U + iV = iC^* + \sum_{k=1}^N [(\xi_k + i\eta_k)(x + iy)^{-k} - (\xi_k - i\eta_k)(x + iy)^k]. \quad (5.7)$$

При этом постоянные  $C^*$ ,  $\xi_k$ ,  $\eta_k$  произвольны и их число равно

$(2N + 1)$ .



2. Пусть  $N < 0$  и  $u(x, y) + iv(x, y)$  — решение задачи Гильберта. Так как функция  $A(x, y) + iB(x, y)$  имеет нуль порядка  $N$  в начале координат, то функция

$$U(x, y) + iV(x, y) = \frac{u(x, y) + iv(x, y)}{A(x, y) + iB(x, y)}$$

имеет нуль в начале координат кратности не меньше чем  $|N|$ . Причём

$$U(x, y)|_{\Gamma} = \frac{Au + Bv}{A^2 + B^2} \Big|_{\Gamma} = \frac{\rho(s)f(s)}{A^2(s) + B^2(s)} \equiv f_0(s).$$

Коэффициенты  $\omega_n$  ряда Тейлора функции

$$U + iV = \omega_0 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \dots \quad (z = x + iy)$$

определяются по формулам

однозначно, где  $C$  — произвольная постоянная, а  $a_n, b_n$  — коэффициенты Фурье

функции  $U(x, y)$ :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(s) \cos ns ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(s) \sin ns ds, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Поэтому функция  $u + iv = (U + iV)$  определяется по граничному условию этими коэффициентами однозначно, причём первые  $|N|$  коэффициентов  $\omega_n$  обращается в нуль. Итак, если при  $N < 0$  задача Гильберта разрешима, то

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{|N|-1} = b_1 = b_2 = \dots = b_{|N|-1} = 0, \quad (5.8)$$

и это решение единственно. Если ввести в рассмотрение функции

$$H_k(s) = \begin{cases} \frac{\sin(ks)}{\rho(s)[a^2(s) + b^2(s)]}, & k = 1, 2, \dots, |N|, \\ \frac{\cos(ks - |N|s)}{\rho(s)[a^2(s) + b^2(s)]}, & k = |N|, |N| + 1, \dots, 2|N| - 1, \end{cases}$$

то необходимые и достаточные условия разрешимости (5.8) задачи Гильберта окончательно примут вид:

$$\int_0^{2\pi} f(s) H_k(s) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2|N| - 1. \quad (5.9)$$

Заметим, что линейная зависимость функций  $H_1, H_2, \dots, H_{2|N|-1}$  прямо следует из теории тригонометрических рядов Фурье.

## Примеры.

1. Пусть  $a(s) = 1$ ,  $b(s) = 0$ . Задача Гильберта перешла в задачу Дирихле для гармонической функции  $u(x, y)$ , сопряжённая с ней гармоническая функция  $v(x, y)$  определяется с точностью до произвольной постоянной, что полностью соответствует теореме (5.1) при  $N = 0$ .

2. **Задача с косой производной.** Требуется найти гармоническую в единичном круге  $G$  функцию  $\varphi(x, y)$ , непрерывную вплоть до границы  $\Gamma$  вместе с первыми производными, удовлетворяющую граничному условию

где  $\nu$  - некоторое направление, а  $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = f(s)$  - производная по этому направлению. Если положить

и

то задача с косой производной для функции  $\varphi(x, y) = \cos(\nu)$  переходит в задачу Гильберта для пары функций  $u$  и  $v$ , разрешимость которой зависит от индекса граничного условия (5.2). В частном случае, когда  $\nu = \frac{\pi}{2}$  где  $\nu$  - единичная внешняя нормаль, мы имеем задачу Неймана. При этом  $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = n$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = n$  а индекс граничного условия Функция  $u(x, y) = \cos s$  и условие разрешимости (5.9) принимает вид (4.1).  $N = -1$ .  $H_1(s) = 1$