УМФ

МОДУЛЬ 5

УЭ-5

Задача Гильберта для уравнений Коши-Римана в круге

Пусть G - единичный круг на плоскости (x, y) с границей Γ и функции $a, b, f \in C^4(\Gamma)$ таковы, что $a^2(s) + b^2(s) > 0.$ Требуется найти функции $u, v \in C^1(G) \cap C(\overline{G}),$ являющиеся решением системы уравнений Коши-Римана в круге G:

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0, \qquad \textbf{(5.1)}$$

и удовлетворяющие на единичной окружности Γ граничному условию

$$a(s)u + b(s)v = f(s). \qquad \textbf{(5.2)}$$

Определение 5.1. Индексом граничного условия (5.2) называется число N оборотов вокруг начала координат на плоскости $(a, b),$ которые совершает вектор с координатами $(a(s), b(s))$ при изменении аргумента от 0 до $2\pi.$

Теорема 5.1. (О разрешимости)

1. *Если индекс граничного условия (5.2) $N \geq 0,$ то задача Гильберта (5.1), (5.2) всегда имеет не единственное решение, зависящее от $(2N+1)$ произвольной постоянной.*

2. *При $N < 0,$ если задача Гильберта разрешима, то она разрешима единственным образом, но для этого необходимо и достаточно, чтобы правая часть $f(s)$ была ортогональна к любой функции из некоторой линейной конечномерной системы функций, размерность которой*

$$\left(2|N| - 1\right).$$

Доказательство.

1. Предположим вначале, что $a(s)$ и $b(s)$ есть граничные значения действительной и мнимой частей некоторой аналитической в G и не равной там нулю функции

$$c(x+iy)=a(x,y)+ib(x,y).$$

Тогда аналитическая в круге функция

$$\frac{W}{c}=\frac{u+iv}{a+ib}=\frac{au+bv}{a^2+b^2}+i\frac{av-bu}{a^2+b^2}\equiv U+iV$$

имеет вещественную часть U, значение которой на Γ известно:

$$U\big|_{\Gamma}=\frac{f(s)}{a^2(s)+b^2(s)}. \qquad \textbf{(5.3)}$$

Тогда гармоническая функция U однозначно определяется как решение задачи Дирихле, а по ней гармонически сопряженная функция V находится с точностью до произвольной постоянной. А тогда

$$W(x,y)=c(x+iy)\big(U(x,y)+iV(x,y)\big). \qquad \textbf{(5.4)}$$

2. Заметим, что граничное условие (5.2) эквивалентно любому условию вида

$$\rho(s)a(s)u+\rho(s)b(s)v=\rho(s)f(s),$$

какова бы ни была строго положительная функция $\rho(s)$. Поэтому в общем случае подберём множитель $\rho(s)$ так, чтобы функции $A(s)=\rho(s)a(s)$ и $B(s)=\rho(s)b(s)$, были граничными значениями действительной и мнимой частей аналитической в круге функции $C(x+iy)=A(x,y)+iB(x,y)$.

Будем строить функцию C без нулей внутри круга в виде $C(x+iy)=\exp[p(x,y)+iq(x,y)]$, где $(p+iq)$ - аналитическая в G функция. Эти функции на окружности Γ удовлетворяют условиям:

$$e^{p(x,y)}\Big|_{\Gamma}=\rho(s)\sqrt{a^2(s)+b^2(s)},\quad e^{iq(x,y)}\Big|_{\Gamma}=\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}. \qquad \textbf{(5.5)}$$

Таким образом, необходимо определить функции ρ,p,q из уравнений (5.5). Из определения индекса N видно, что при движении точки s по окружности Γ против часовой стрелки вектор

$$\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}$$

обойдёт окружность N раз. А так как функция q является аргументом этого вектора, то она получит приращение $2\pi N$ и уже при $N\neq 0$ $q(x,y)$ не является однозначной.

Поэтому разделив q на аналитическую функцию $(x+iy)^N$, имеющую тот же индекс, получим на Γ функцию

$$\frac{\exp(iq)}{(x+iy)^N}\Bigg|_{\Gamma}=\frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\times\frac{1}{\cos(Ns)+i\sin(Ns)},$$

аргумент которой определяется однозначно.

Приняв эти значения аргумента за граничные значения функции $q_0(x, y)$, построим внутри круга аналитическую функцию $p_0(x, y) + iq_0(x, y)$. Произвольную постоянную, появляющуюся при определении функции p_0, фиксируем каким-либо определённым образом. И пусть теперь

$$A_0(x, y) + iB_0(x, y) = \exp\{p_0(x, y) + iq_0(x, y)\}.$$

Тогда на границе Γ имеем

$$e^{p_0(x,y)+iq_0(x,y)}\Big|_{\Gamma} = e^{p_0(x,y)}\Big|_{\Gamma} \frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \times \frac{1}{\cos(Ns)+i\sin(Ns)}.$$

Следовательно, функция

$$A(x, y) + iB(x, y) = (A_0(x, y) + iB_0(x, y))(x+iy)^N \quad \textbf{(5,6)}$$

на границе круга Γ равна

$$e^{p_0(x,y)}\Big|_{\Gamma} \frac{a(s)+ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}.$$

Опр. 5.2. Множитель $p(s) = e^{p_0(x,y)}\Big|_{\Gamma} \Big/ \sqrt{a^2(s)+b^2(s)}$ называется регуляризирующим множителем.

1. Пусть вначале $N \geq 0$.

В этом случае построенная аналитическая функция $A(x,y)+iB(x,y)$ имеет внутри круга G единственный нуль порядка N в начале координат.

Построим аналитическую в G и непрерывную вплоть до границы функцию $U(x,y)+iV(x,y)$ по граничным значениям её действительной части

$$U(\cos s, \sin s) = \frac{\rho(s) f(s)}{A^2(s)+B^2(s)}.$$

Тогда функция $u(x,y)+iv(x,y) = (A+iB)(U+iV)$ является искомой.

Действительно, по построению она аналитична в круге G и непрерывна вплоть до границы Γ и, так как

$$\left.\frac{Au+Bv}{A^2+B^2}\right|_{\Gamma} = \operatorname{Re}\left.\frac{u(x,y)+iv(x,y)}{A(x,y)+iB(x,y)}\right|_{\Gamma} = U(x,y)\big|_{\Gamma} = \frac{\rho(s) f(s)}{A^2(s)+B^2(s)},$$

то $(Au+Bv)\big|_{\Gamma} = \rho(s) f(s)$ и существование решения при $N \geq 0$ установлено.

Исследуем теперь вопрос о степени неединственности этого решения.

Ясно, что решение задачи Гильберта определяется с точностью до произвольного решения однородной задачи. Итак, пусть $u(x, y) + iv(x, y)$ решение однородной задачи, то есть $(au + bv)\big|_{\Gamma} = 0$, а, следовательно, $(Au + Bv)\big|_{\Gamma} = 0$. Поэтому функция

$$U + iV = \frac{u + iv}{A + iB} = \frac{Au + Bv}{A^2 + B^2} + i\frac{Av - Bu}{A^2 + B^2}$$

имеет вещественную часть $U\big|_{\Gamma} = 0$.

Так как $u + iv$ регулярна внутри круга, $A + iB$ имеет в начале координат нуль кратности *N*, то функция $U(x, y) + iV(x, y)$ имеет в начале координат полюс порядка не выше чем *N*.

Построим общий вид аналитической функции $U+iV$, имеющей в начале координат полюс кратности не выше чем N и такой, что $U\big|_{\Gamma}=0.$

Пусть $U+iV$ имеет в центре круга полюс с главной частью

$$\sum_{k=1}^{N}(\xi_k+i\eta_k)(x+iy)^{-k}$$

А так как полином $\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-i\eta_k)(x+iy)^k$ имеет вещественную часть, принимающую на границе Γ те же значения, что и вещественная часть главной части, то функция

$$P+iQ=\sum_{k=1}^{N}\Big[(\xi_k+i\eta_k)(x+iy)^{-k}-(\xi_k-i\eta_k)(x+iy)^k\Big]$$

имеет вещественную часть, обращающуюся на Γ в нуль, и ту же главную часть, что и $U+iV$. Следовательно, $(U+iV)-(P+iQ)$ ограничена, и вещественная часть разности принимает на Γ нулевые значения. Отсюда

$U-P=0,\quad V-Q=C^*=const.$ Итак,

$$U+iV=iC^*+\sum_{k=1}^{N}\Big[(\xi_k+i\eta_k)(x+iy)^{-k}-(\xi_k-i\eta_k)(x+iy)^k\Big]. \qquad \textbf{(5.7)}$$

При этом постоянные $C^*,\ \xi_k,\ \eta_k\ \ (k=1,2,\dots,N)$ произвольны и их число равно $(2N+1)$.

2. Пусть $N<0$ и $u(x,y)+iv(x,y)$ - решение задачи Гильберта. Так как функция $A(x,y)+iB(x,y)$ имеет полюс порядка $|N|$ в начале координат, то функция

$$U(x,y)+iV(x,y)=\frac{u(x,y)+iv(x,y)}{A(x,y)+iB(x,y)}$$

имеет нуль в начале координат кратности не меньше чем $|N|$. Причём

$$U(x,y)\Big|_{\Gamma}=\frac{Au+Bv}{A^2+B^2}\Bigg|_{\Gamma}=\frac{\rho(s)f(s)}{A^2(s)+B^2(s)}\equiv f_0(s).$$

Коэффициенты ω_n ряда Тейлора функции

$$U+iV=\omega_0+\omega_1 z+\omega_2 z^2+\dots \qquad (z=x+iy)$$

определяются по формулам

$$\omega_0=a_0/2+iC,\quad \omega_n=a_n+ib_n \quad (n>0)$$

однозначно, где C - произвольная постоянная, а $a_n,\ b_n$ - коэффициенты Фурье функции $U(x,y)$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(s)\cos ns\,ds,\quad n=0,1,2,\dots\ ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(s)\sin ns\,ds,\quad n=1,2,\dots\ .$$

Поэтому функция $u+iv=(U+iV)(A+iB)$ определяется по граничному условию этими коэффициентами однозначно, причём первые $|N|$ коэффициентов ω_n обращается в нуль. Итак, если при $N<0$ задача Гильберта разрешима, то

$$a_0=a_1=\dots=a_{|N|-1}=b_1=b_2=\dots=b_{|N|-1}=0, \tag{5.8}$$

и это решение единственно. Если ввести в рассмотрение функции

$$H_k(s)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ks)}{\rho(s)[a^2(s)+b^2(s)]}, & k=1,2,\dots,|N|,\\[2ex] \dfrac{\cos(ks-|N|s)}{\rho(s)[a^2(s)+b^2(s)]}, & k=|N|,|N|+1,\dots,2|N|-1,\end{cases}$$

то необходимые и достаточные условия разрешимости (5.8) задачи Гильберта окончательно примут вид:

$$\int_0^{2\pi} f(s)H_k(s)ds=0,\ k=1,2,\dots,2|N|-1. \tag{5.9}$$

Заметим, что линейная зависимость функций $H_1,H_2,\dots,H_{2|N|-1}$ прямо следует из теории тригонометрических рядов Фурье.

Примеры.

1. Пусть $a(s)=1,\ b(s)=0.$ Задача Гильберта перешла в задачу Дирихле для гармонической функции $u(x,y).$ Сопряжённая с ней гармоническая функция $v(x,y)$ определяется с точностью до произвольной постоянной, что полностью соответствует теореме (5.1) при $N=0.$

2. Задача с косой производной. Требуется найти гармоническую в единичном круге G функцию $\varphi(x,y),$ непрерывную вплоть до границы Γ вместе с первыми производными, удовлетворяющую граничному условию

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{\Gamma}=f(s),$$

где ν - некоторое направление, а $\partial\varphi/\partial\nu$ - производная по этому направлению. Если положить $u=\varphi_x,\ v=-\varphi_y$ и $a(s)=\cos(\nu,x),\ b(s)=-\sin(\nu,y),$ то задача с косой производной для функции $\varphi(x,y)$ перейдёт в задачу Гильберта для пары функций *u* и *v,* разрешимость которой зависит от индекса граничного условия (5.2). В частном случае, когда $\vec{\nu}=\vec{n},$ где $\vec{n}$ - единичная внешняя нормаль, мы имеем задачу Неймана. При этом $a(s)=\cos s,\ b(s)=-\sin s,$ а индекс граничного условия $N=-1.$ Функция $H_1(s)=1$ и условие разрешимости (5.9) принимает вид (4.1).