# Модуль 5
# УЭ-6

Фундаментальное решение

## Фундаментальное решение уравнения Лапласа

**Теорема 6.1.** *Пусть*

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2}\left|\xi - x\right|^{2-n}, & n > 2, \\ -\log\left|\xi - x\right|, & n = 2, \end{cases} \tag{6.1}$$

*где* $\left|\xi - x\right|$ *- расстояние между точками* $x$ *и* $\xi$ *. Тогда при* $\xi \neq y$ *функция* $E(x,\xi)$ *является решением уравнения Лапласа как по* $x$ *, так и по* $\xi$

*Доказательство.* Действительно, при $x \neq \xi$ из (6.1) имеем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} = -\left|\xi - x\right|^{-n} + n\left|\xi - x\right|^{-n-2}(\xi_i - x_i)^2$$

А тогда

$$\Delta E = -n\left|\xi - x\right|^{-n} + n\left|\xi - x\right|^{-n-2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - x_i)^2 = 0$$

**Определение 6.1.** Функция $E(x, y)$ называется **элементарным или фундаментальным решением** уравнения Лапласа.

Для действительных функций $u_i(x), i = 1, \ldots, n$ непрерывных вместе со своими производными первого порядка в замкнутой области $G \cup \Gamma$ с гладкой границей $\Gamma$ имеет место формула Гаусса-Остроградского

$$\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dv = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{n} u_i(y) n_i(y) ds_y \qquad (6.2)$$

где $dv$ - элемент объёма, а $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_n)$ - внешняя нормаль к $\Gamma$ в точке $y \in \Gamma$. Поскольку для любых функций $u, v \in C^2(G)$ справедливо

$$v\Delta u - u\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$$

то, применяя формулу (6.2), получим

$$\int_{\Gamma} (v\Delta u - u\Delta v) dv = \int_{\Gamma} \left( v(y)\frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y)\frac{\partial v}{\partial n_y}\right) ds_y \qquad (6.3)$$

**Теорема 6.2.** *Для любой функции* $u(x) \in C^2(G)$ *справедлива формула Грина*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Gamma} \left( E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} \right) ds_y - \frac{1}{\omega_n} \int_G E(x,y) \Delta u(y) dv \qquad (6.4)$$

*Где* $E(x,y)$ *- фундаментальное решение уравнения Лапласа,*

$$\omega_n = 2\pi^{n/2} \Gamma(n/2)$$

*- площадь единичной сферы в* $R^n$*, а* $\Gamma$ *- гамма-функция Эйлера.*

*Доказательство.* Вырежем из области $G$ шар $|y - x| \le \varepsilon$ радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $x \in G$ и для оставшейся части $G_\varepsilon$ области $G$ применим формулу (6.3), в которой $v(y) = E(x,y)$:

$$\int_{\Gamma} \left( E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} \right) ds_y - \int_{G_\varepsilon} E(x,y) \Delta u(y) dv =$$

$$= \int_{|y-x|=\varepsilon} \left( E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} \right) ds_y = \int_{|y-x|=\varepsilon} E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} ds_y - u(x) \int_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} ds_y -$$

$$- \int_{|y-x|=\varepsilon} (u(y) - u(x)) \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y} ds_y . \qquad (6.5)$$

Учитывая то обстоятельство, что на сфере $|y-x|=\varepsilon$

$$E(x,y)=\begin{cases}\varepsilon^{2-n}/(n-2), & n>2,\\ -\log\varepsilon, & n=2,\end{cases}\quad \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}=\begin{cases}-1/\varepsilon^{n-1}, & n>2,\\ -1/\varepsilon, & n=2.\end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}(u(y)-u(x))\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}ds_y=0,\qquad \int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\varepsilon^{1-n}ds_y=\omega_n.$$

из формулы (6.5) в пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем интегральное представление (6.4).

Если бы нам из каких либо соображений были известны значения $u$, $\Delta u$ и $\partial u/\partial n$, входящие в формулу Грина (6.4):

$$\Delta u=-\omega_n\rho,\quad u\big|_{\Gamma}=f_1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f_2$$

то из формулы Грина мы бы получили явное представление для функции $u$ :

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Gamma}\left(E(x,y)f_2(y)-f_1(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\right)ds_y+\int\limits_{G}E(x,y)\rho(y)dv_y \qquad (6.6)$$

Но поскольку функции $f_1$ и $f_2$ не могут быть произвольно заданными на $\Gamma$, то формула (6.6) не даёт возможности решать задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. Однако при помощи интегралов, входящих в (6.6), удаётся при некоторых ограничениях такие решения найти.

**Определение 6.2.** Интегралы

$$\int_\Gamma f_2(y)E(x,y)ds_y, \quad \int_\Gamma f_1(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}ds_y, \quad \int_G \rho(y)E(x,y)dv_y$$

называется соответственно **потенциалами простого и двойного слоя и объёмным (ньютоновым) потенциалом.** Функции $f_1, f_2$ и $\rho$ называются плотностями этих потенциалов.

# Модуль 5
# УЭ-7

Функция Грина

## Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа

**Определение 7.1.** Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области $G$ называется функция $H(x,\xi)$ двух точек $x,\xi \in \overline{G}$, обладающая свойствами:

$$1) \qquad H(x,\xi) = E(x,\xi) + h(x,\xi) \qquad (7.1)$$

где $E(x,\xi)$ - элементарное решение уравнения Лапласа, а $h(x,\xi)$ - гармоническая функция как по $x \in G$, так и по $\xi \in G$;

$$2) \qquad H(x,\xi) = 0 \qquad (7.2)$$

когда точка $x$ или $\xi$ лежит на границе $\Gamma$ области $G$.

Отметим, что $H(x,\xi) \geq 0$ всюду в области $G$. Действительно, если $G_\delta$ часть области $G$, лежащая вне шара $|y-\xi| \leq \delta, \xi \in G$, достаточно малого радиуса $\delta$, и поскольку

$$\lim_{x \to \xi} H(x,y) = +\infty,$$

То при $\delta << 1$ $H(x,\xi) \geq 0$ на границе области $G_\delta$ и внутри шара $|y-\xi| \leq \delta$. Тогда в силу принципа экстремума $H(x,\xi) \geq 0$ как в $G_\delta$, так и всюду в $\overline{G}$.

**Теорема 7.1** *Функция Грина* $H(x,y)$ *симметрична относительно точек* $x$ *и* $y$

*Доказательство*. Пусть $K(x,\delta)$ шар радиуса $\delta>0$ с центром в точке $x\in G$ и $G_\delta=G\setminus\{K(x,\delta)\cup K(y,\delta)\}$ при $\delta<<1$ . Применяя теперь формулу (6.3) в области $G_\delta$ для гармонических функций $u(z)=H(z,x)$ и $v(z)=H(z,y)$ , будем иметь

$$\int_{\Gamma}\left(H(z,y)\frac{\partial H(z,x)}{\partial n_z}-H(z,x)\frac{\partial H(z,y)}{\partial n_z}\right)ds_z=$$

$$=\left\{\int_{\Gamma_z}+\int_{\Gamma_y}\right\}\left(H(z,y)\frac{\partial H(z,x)}{\partial n_z}-H(z,x)\frac{\partial H(z,y)}{\partial n_z}\right)ds_z,$$

где $n_z$ - внешняя нормаль в точке $z$ на $\Gamma$ и на сферах $\Gamma_x$ и $\Gamma_y$ являющихся границами шаров $K(x,\delta)$ и $K(y,\delta)$. Но так как при $z\in\Gamma$ $H(z,x)=H(z,y)=0$, то формулы примут вид

$$-\int_{\Gamma}\left(H(z,y)\frac{\partial H(z,x)}{\partial n_z}-H(z,x)\frac{\partial H(z,y)}{\partial n_z}\right)ds_z=$$

$$=\int_{\Gamma_y}\left(H(z,y)\frac{\partial H(z,x)}{\partial n_z}-H(z,x)\frac{\partial H(z,y)}{\partial n_z}\right)ds_z.$$

Повторяя теперь при $\delta\to 0$ вывод, аналогичный уже проведённому при получении формулы (6.4), получим $H(x,y)=H(y,x)$.

**Замечание.** Вид формулы (6.4) не изменяется при прибавлении к функции $E(x,y)$ произвольной гармонической функции $f(x,y)$ по $x$ и $y$. Поэтому в случае, когда функция Грина $H(x,y)$ известна, формула (6.4) принимает вид

$$u(x) = -\frac{1}{w_n}\int_{\Gamma} u(y)\frac{\partial H(x,y)}{\partial n_y}dv - \frac{1}{w_n}\int_{G} H(x,y)\Delta u(y)dv \qquad (7.3)$$

В дальнейшем мы покажем, что (6.4) можно использовать для нахождения решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

## 7.1. Функция Грина для шара

**Теорема 7.2** *Функция Грина задачи Дирихле для шара* $|x<1|$ *имеет вид*

$$H(x,\xi)=E(x,\xi)-E\left(|x|\xi,\frac{x}{|x|}\right) \qquad (7.4)$$

*Доказательство.* Действительно, так как

$$\left||x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|=\left[|x|^2|\xi|^2-2x\xi+1\right]^{1/2}=\left||\xi|x-\frac{\xi}{|\xi|}\right|=|\xi|\left|x-\frac{\xi}{|\xi|^2}\right|=|x|\left|\xi-\frac{x}{|x|^2}\right| \qquad (7.5)$$

то функция $h(x,\xi)=-E\left(|x|\xi,\frac{x}{|x|}\right)$ при $|x|<1,\quad |\xi|<1$ является гармонической как по $x$, так и по $\xi$. А при $|\xi|=1$ имеем

$$|\xi-x|=\left[|x|^2-2x\xi+1\right]^{1/2}=\left||x|\xi-\frac{x}{|x|}\right|=\left||\xi|x-\frac{\xi}{|\xi|}\right| \qquad (7.6)$$

Следовательно, представленная формулой (7.4) функция $H(x,\xi)$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функциям Грина.

**Замечание.** Так как при $|\xi|=1$ в силу (7.6)

$$\frac{\partial H(x,\xi)}{\partial n_\xi} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\xi_i(\xi_i - x_i)}{|\xi - x|^n} - |n|\frac{\xi_i\left(|x|\xi_i - \frac{x_i}{|x|}\right)}{\left||x|\xi - \frac{x}{|x|}\right|^n}\right\} = -\frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n}$$

то из (7.3) получаем доказанную ранее формулу Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{w_n}\int_{|\xi|=1}\frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n}\varphi(\xi)ds_\xi \qquad (7.7)$$

дающую решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре:

$$\Delta u(x) = 0, |x| < 1; u\big|_\Gamma = \varphi(\xi), |\xi| = 1.$$

## 7.2. функция Грина для полупространства

Пусть область $G$ совпадает с полупространством $x_n > 0$ и искомое решение задачи Дирихле ограничено. Пусть точки $x, y \in G$, а $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}, -y_n)$ - точка, симметричная точке $y$ относительно плоскости $y_n = 0$. Тогда функция

$$H(x,y) = E(x,y) - E(x,y') \qquad (7.8)$$

является искомой функцией Грина для полупространства, так как функция $h(x,y) = -E(x,y')$ при $x_n > 0,\ y_n > 0$ является гармонической как по $x$, так и по $y$ и кроме того $H(x,y) = 0$ при $y_n = 0$.

Если гармоническая функция $u(x)$ удовлетворяет при $x_n > 0$ условиям

$$|u(x)| \le \frac{A}{|x|^{\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \le \frac{A}{|x|^{1+\alpha}}, \quad i = 1, \ldots, n$$

где $A$ и $\alpha$ - положительные постоянные, то из (6.4) будем иметь

$$u(x) = \frac{-1}{w_n} \int\limits_{y_n=0} \left( E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_n} - u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_n} \right) dy_1 \ldots dy_{n-1} \qquad (7.9)$$

Если же повторить вывод формулы (6.4) для пары функций $u(x)$ и $E(x,\xi')$ и учесть, что на плоскости $y_n = 0$ справедливы равенства

$$E(x,y) = E(x,y'), \quad \frac{\partial E(x,y')}{\partial n_y} = -\frac{\partial E(x,y')}{\partial n_y} = \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}$$

то мы будем иметь соответственно

$$\frac{1}{w_n}\int_{y_n}\left(E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_n} + u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_n}\right)dy_1 \ldots dy_{n-1} = 0 \tag{7.10}$$

Принимая во внимание теперь, что при $y_n = 0$

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_n} = x_n\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y_i)^2 + x_n^2\right]^{-n/2}$$

находим после сложения (вычитания - ?) формул (7.9) и (7.10) представление для решения задачи Дирихле с краевым условием

$$\lim_{x\to y} u(x) = \varphi(y_1,\ldots,y_{n-1}), \quad x > 0, \quad y_n = 0 \tag{7.11}$$

в полупространстве $x_n > 0$ в виде

$$u(x) = \frac{2x_n}{w_n}\int_{y_n=0}\varphi(y_1,\ldots,y_{n-1})\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y_i)^2 + x_n^2\right]^{-n/2} dy_1 \ldots dy_{n-1} \tag{7.12}$$

носящее также название формулы **Пуассона.**