Кривые второго порядка

Определение 3.1. *Линией на плоскости, т. е. в пространстве E2, назовём множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению*

$$F(x, y) = 0.$$

Мы изучаем два частных случая:

1. Линейное уравнение $F(x, y) = Ax + By + C$, где A, B, C – константы. Это уравнение прямой (см. п. 3.1);

2. уравнение второго порядка

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00}, \qquad (3.32)$$

которое является уравнением кривой второго порядка.

Окружность

Определение 3.2. *Окружность – это множество точек (x, y), равноудалённых от одной, называемой центром.*

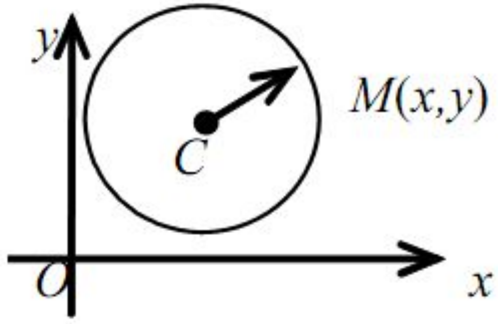


Рис. 3.37

По определению

$$R = \left|\overline{CM}\right| \Rightarrow R^2 = \left|\overline{CM}\right|^2$$

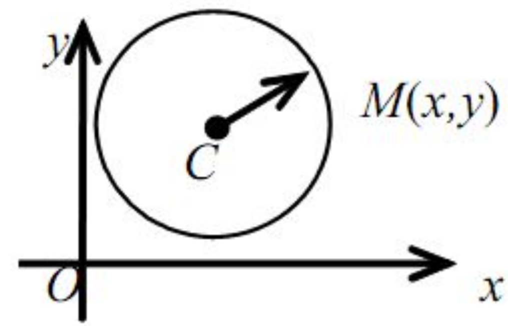


Рис. 3.37

$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ – каноническое уравнение окружности радиуса R с центром в точке C(x_0, y_0) (рис. 3.37). В частности, если центром является начало координат, уравнение упрощается: $x^2 + y^2 = R^2$.

Общее уравнение окружности типа (3.32) не содержит произведения координат (в отличие от уравнений эллипса, гиперболы, параболы):

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + K = 0 \qquad A = B$$

Приведение к каноническому виду

Выделение полного квадрата

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2,\ (y+b)^2 = y^2 + 2by + b^2;$$

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + K = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A}y + \frac{K}{A} = 0.$$

$$x^2 + \tfrac{C}{A}x + \left(\frac{C}{2A}\right)^2 + y^2 + \frac{D}{2A}y + \left(\tfrac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \left(\frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{K}{A} = 0\,,$$

$$\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = R^2\,.$$

$$R^2 = \left(\frac{C}{2A}\right)^2 + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{K}{A}\,.$$

Эллипс

Определение 3.3. *Эллипс – это множество точек (x, y), сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2a.*

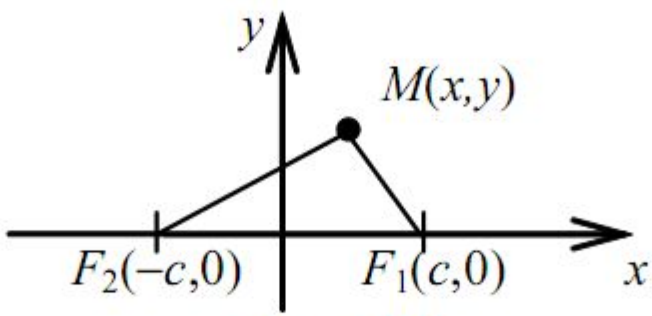


Рис. 3.39

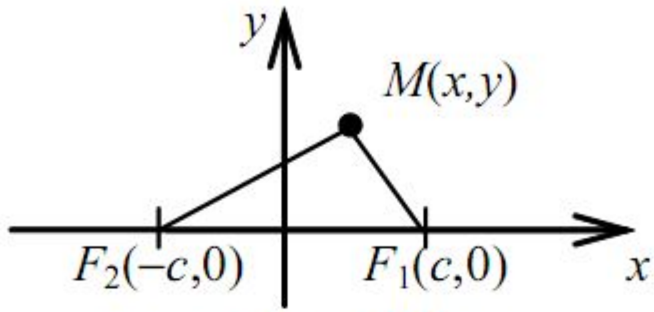


Рис. 3.39

$$\bar{r}_1 = \overline{F_1M} = \{x - c,\ y\}$$

$$\bar{r}_2 = \overline{F_2M} = \{x + c,\ y\}$$

$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},\ r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

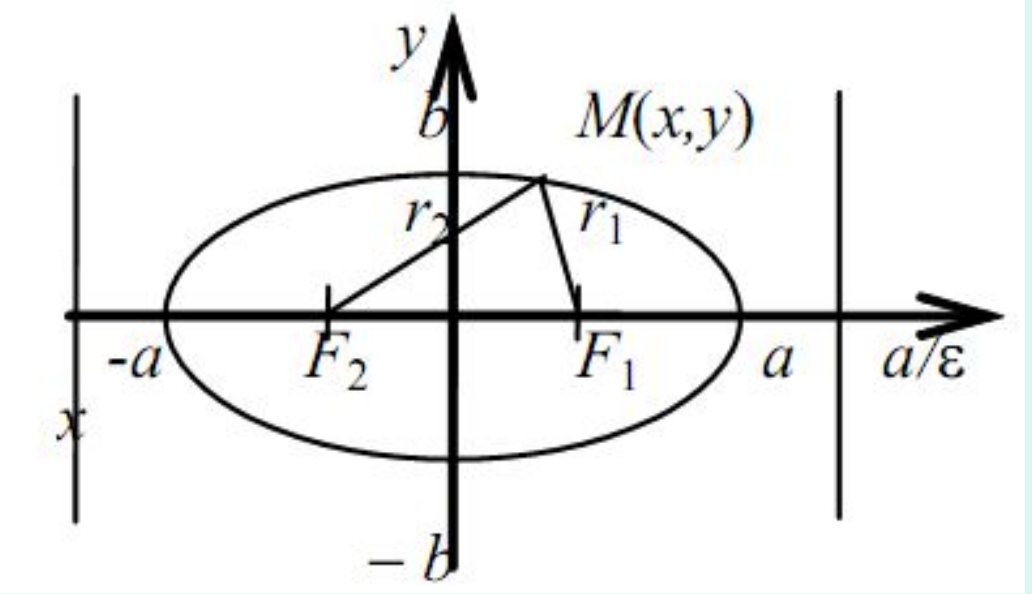
$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Ещё раз возводим в квадрат

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

Поскольку $a > c$, обозначим $a^2 - c_2 = b^2$ и запишем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Приняты названия:

- 2a – большая ось эллипса, на ней расположены фокусы;
- 2b – малая ось эллипса, $b < a$;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$– фокусы эллипса;
- 2c – расстояние между фокусами, $c < a$, $c^2 = a^2 - b^2$;
- $\bar{r}_2 = \overline{F_2 M}$, $\bar{r}_1 = \overline{F_1 M}$ – фокальные радиусы-векторы (по определению $r_1 + r_2 = 2a$);
- $\frac{c}{a} = \varepsilon$ называется эксцентриситетом, $\frac{c}{a} < 1$.

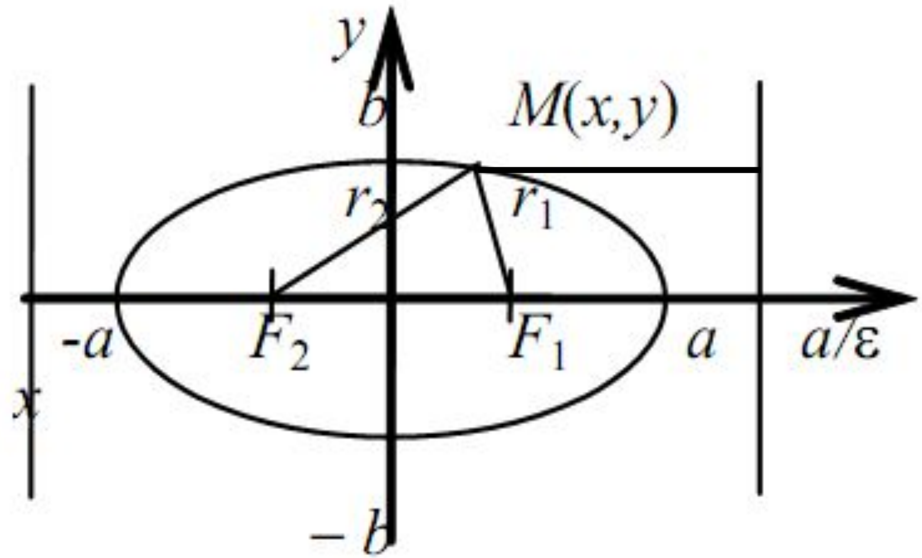


Рис. 3.40

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, указанные на рис. 3.40, называются директрисами эллипса и которые находятся на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра эллипса. Они обладают следующим свойством: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

Гипербола

Определение 3.4. *Гипербола – это множество точек, разность расстояний каждой из которых от двух данных точек – фокусов есть величина постоянная, равная 2а, т. е.*

$$2a = |r_2 - r_1|,$$

где $r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$ – фокальные радиусы-векторы.

Каноническое уравнение гиперболы

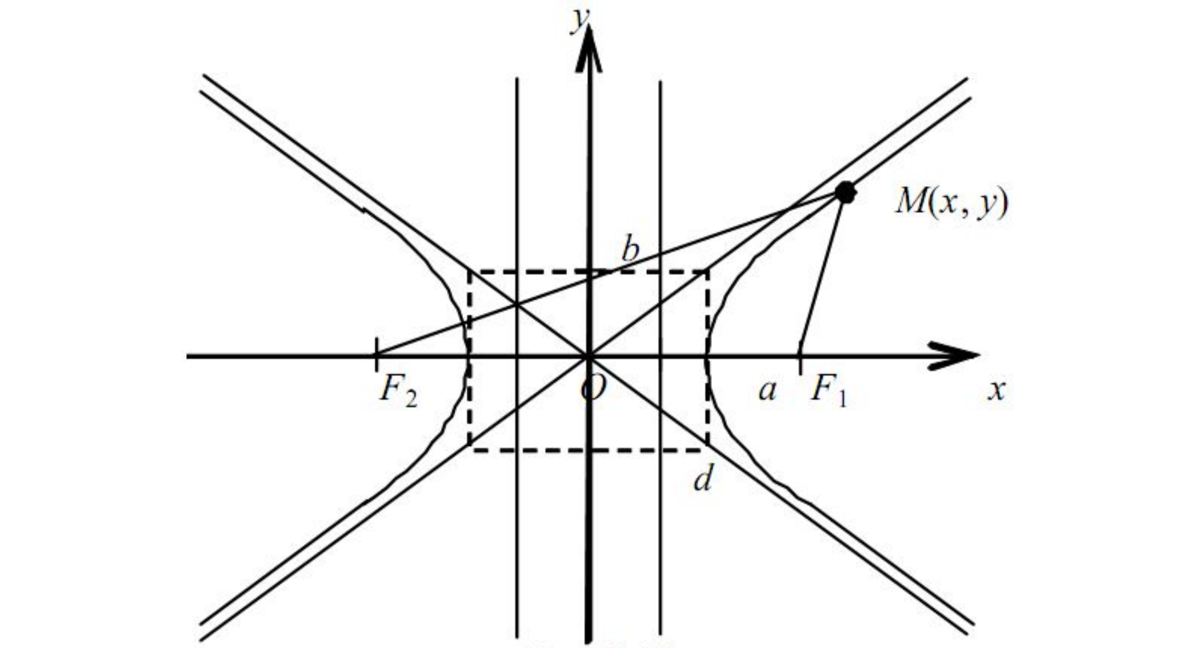


Рис. 3.43

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

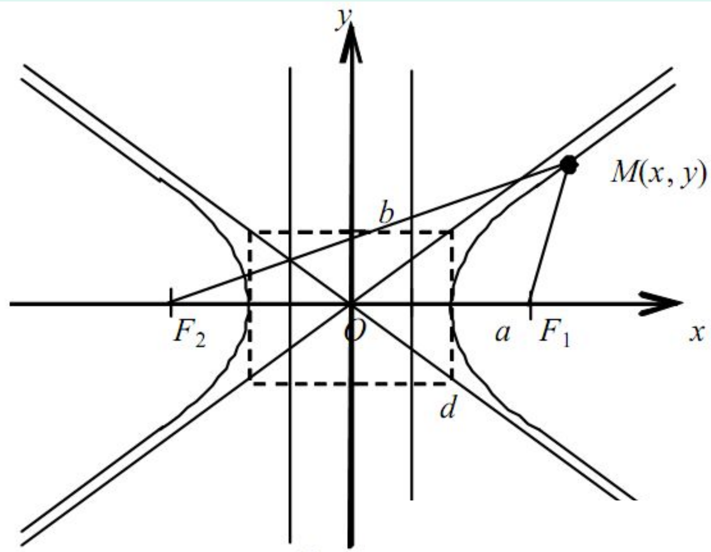


Рис.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где

a – действительная полуось, b – мнимая полуось,

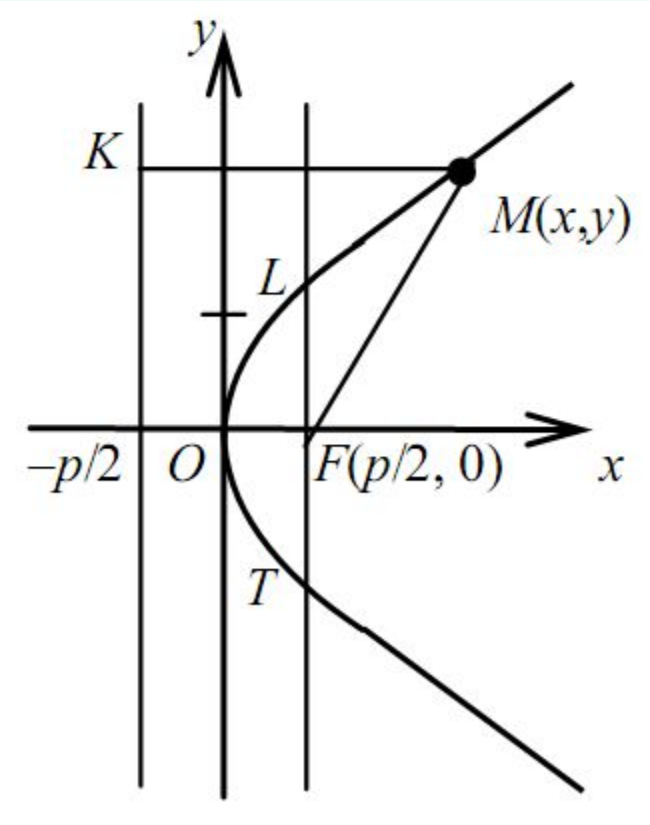
$F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ – фокусы,

$c^2 = a^2 + b^2$, $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ – эксцентриситет,

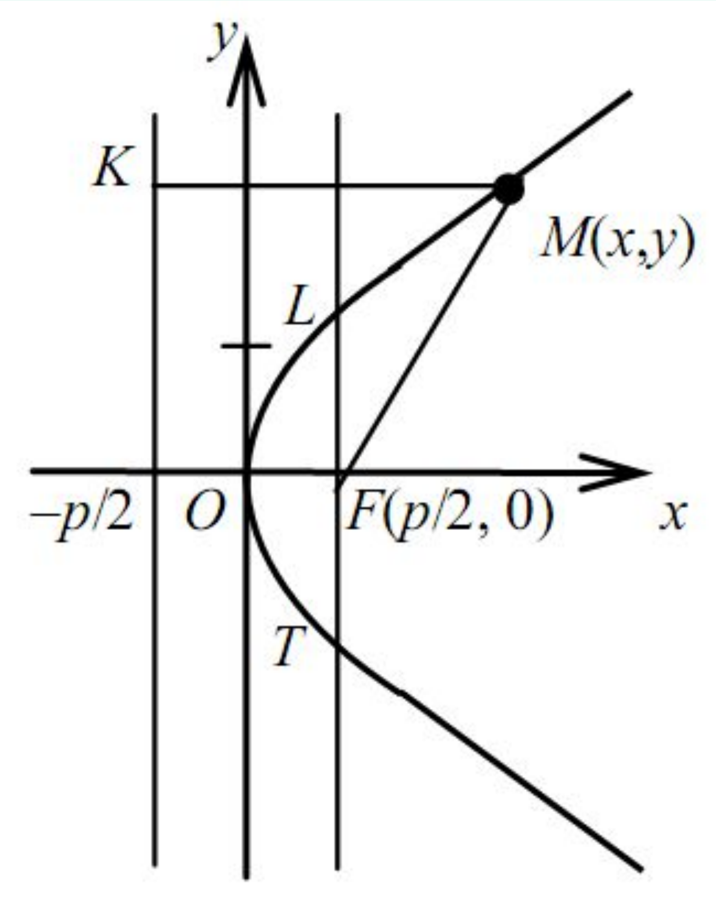
$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис

Парабола

Определение 3.5. *Парабола – это множество точек, равноудалённых от данной точки – фокуса и от прямой, называемой директрисой.*



Каноническое уравнение параболы



$$KM = MF.$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+(0-y)^2}.$$

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$$

$$y^2 = 2px$$

Сопряженная парабола

1. Парабола $x^2 = 2py$ (рис. 3.47) называется сопряжённой по отношению к предыдущей, изображённой на рис. 3.48. Её ось симметрии – ось Оу,

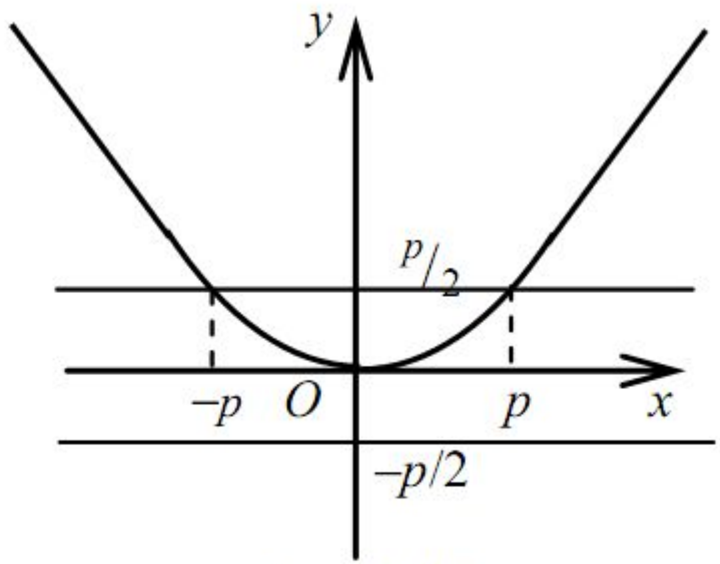
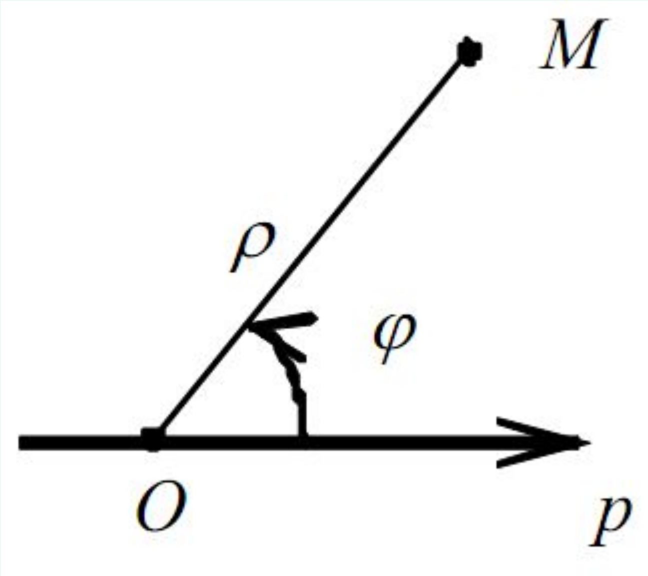


Рис. 3.47

$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ – фокус параболы, $y = -\frac{p}{2}$ – директриса параболы.

Полярная система координат

В полярной системе координат основными посто-янными элементами, по отношению к которым определяется положение точки на плоскости, являются точка О – полюс и ось р, называемая полярной осью

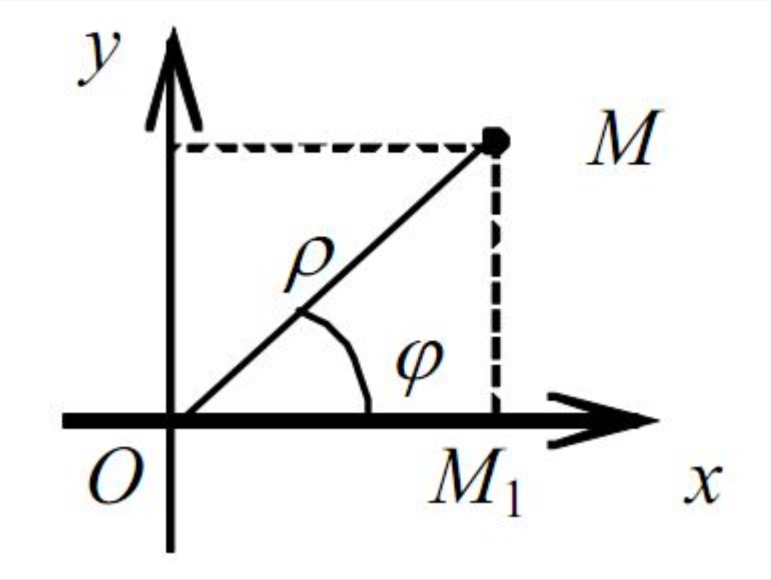


Полярные координаты

- из произвольной точки О на плоскости проведём полупрямую р. Положение любой точки М на плоскости, не совпадающей с полюсом О, определим заданием двух чисел:
- ρ – расстояние от точки до полюса, выраженное в единицах
- масштаба,
- ϕ – угол, на который нужно повернуть полярную ось против часовой стрелки, чтобы она совпала с лучом ОМ.
- Числа ρ и ϕ называются полярными координатами точки М;
- ρ – полярный радиус (или радиус-вектор), ϕ – полярный угол.

Связь между декартовой и полярной системами координат

$x = \rho \cos\varphi$ $\qquad$ $y = \rho \sin\varphi$



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

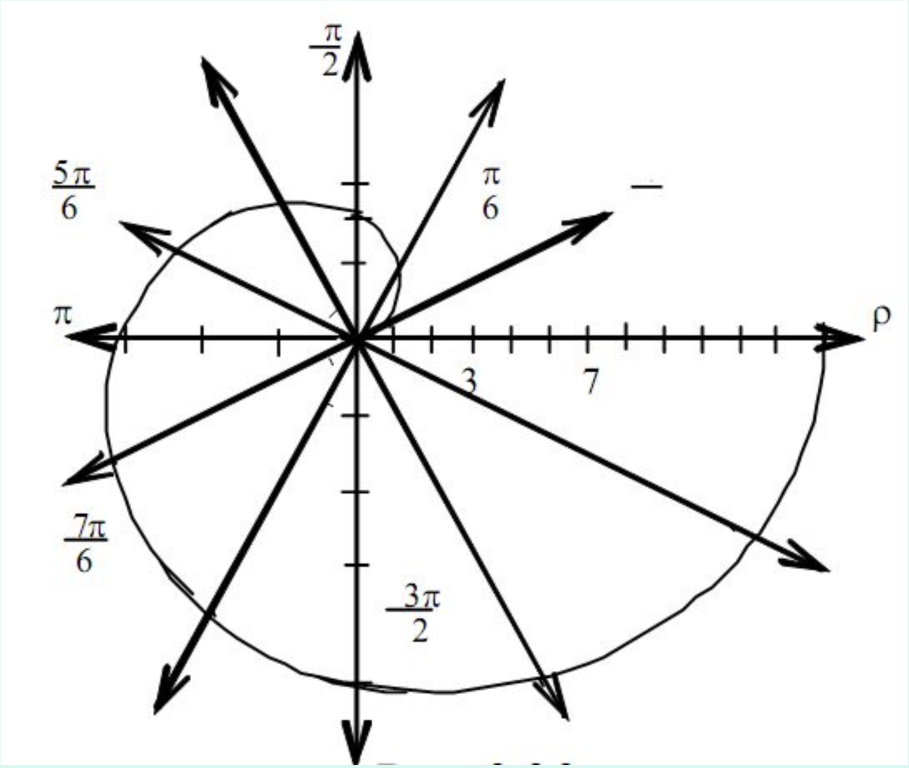
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

Пример

Построить в полярной системе координат линию $\rho = 3(1 - \sin \phi)$, записать её уравнение в декартовых координатах.

Строим таблицу

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	3	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	6	3



Кардиоида