

Вычислительная геометрия

Векторное произведение векторов

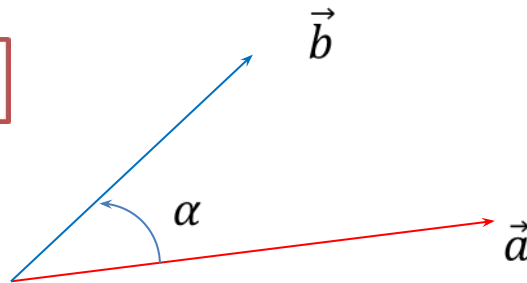
Векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} есть вектор \vec{c} , модуль которого

$$c = a \cdot b \cdot \sin(\alpha),$$

а направление определяется по правилу буравчика

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

\vec{c} направлен к нам



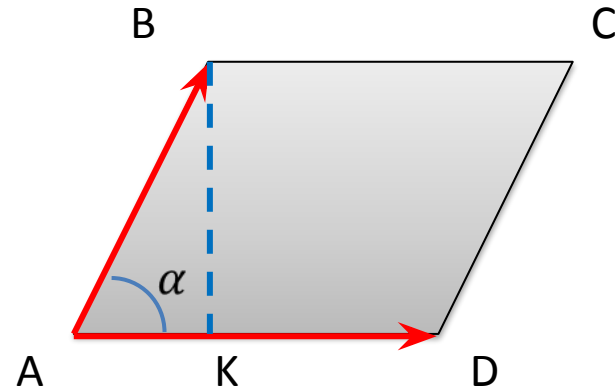
Антикоммутативность:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Модуль векторного произведения

равен

- площади параллелограмма или
- удвоенной площади треугольника, построенного на перемножаемых векторах



$$BK = AB \cdot \sin(\alpha)$$

$$AB \cdot AD \cdot \sin(\alpha) = BK \cdot AD \\ = S_{ABCD}$$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

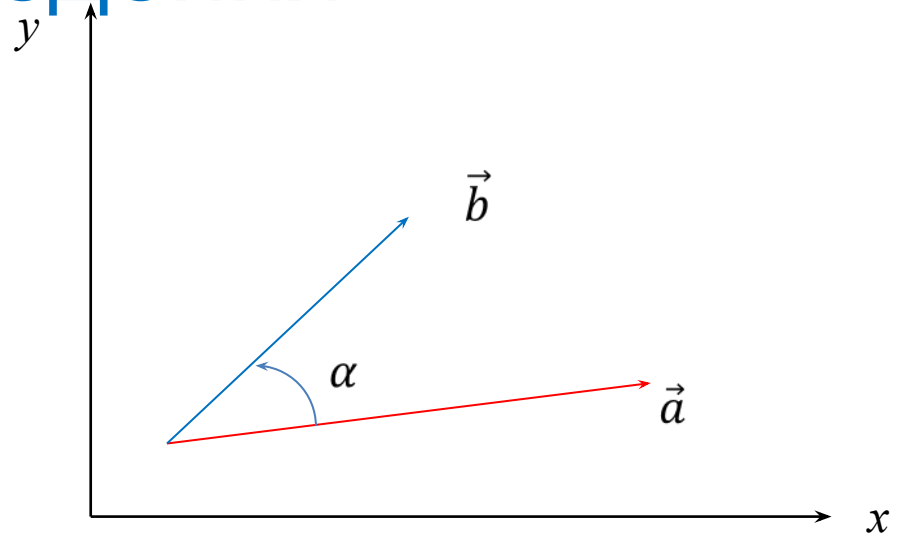
Проекция векторного произведения

Пусть

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Тогда

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$



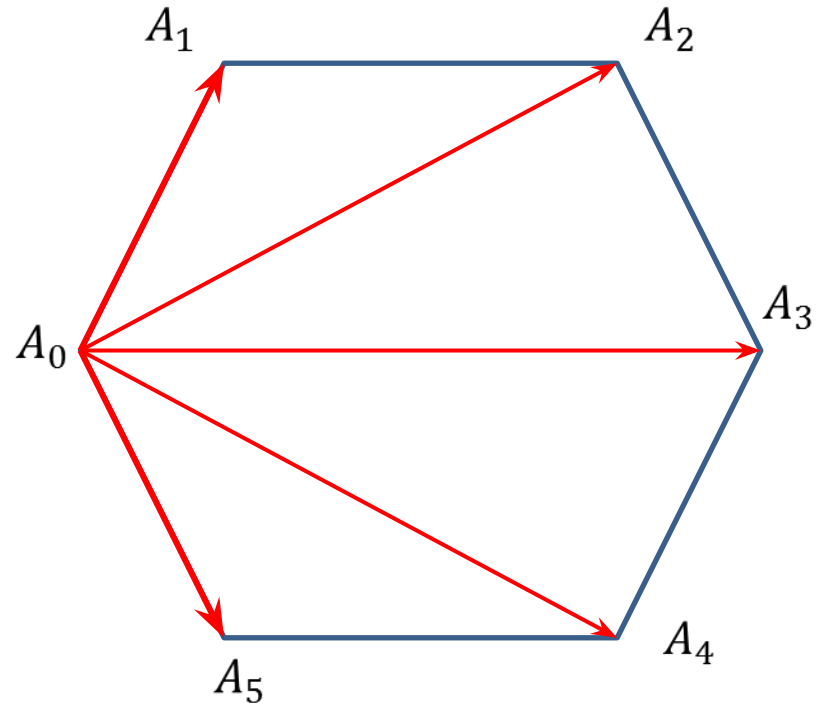
Ось z направлена к нам

Площадь

*Как найти площадь
n-угольника?*

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-2} \overrightarrow{A_0A_i} \times \overrightarrow{A_0A_{i+1}} \right|$$

Модуль суммы,
а не сумма модулей!!!



Проводить векторы можно
из *любой* точки, не
обязательно из вершины

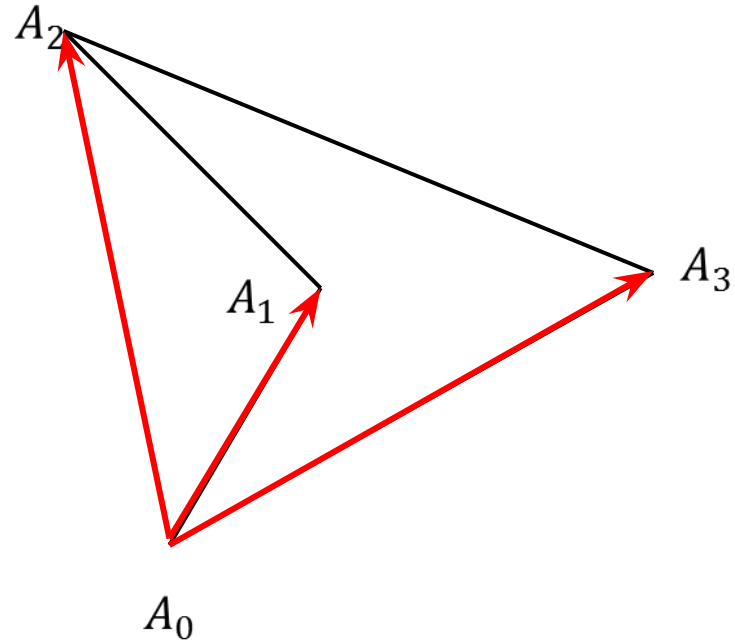
Если многоугольник не выпуклый

Это тоже
работает

$$S = -S_{A_0A_1A_2} + S_{A_0A_2A_3}$$

$$\overrightarrow{A_0A_1} \times \overrightarrow{A_0A_2} \text{ *к* нам}$$

$$\overrightarrow{A_0A_2} \times \overrightarrow{A_0A_3} \text{ *от* нас}$$



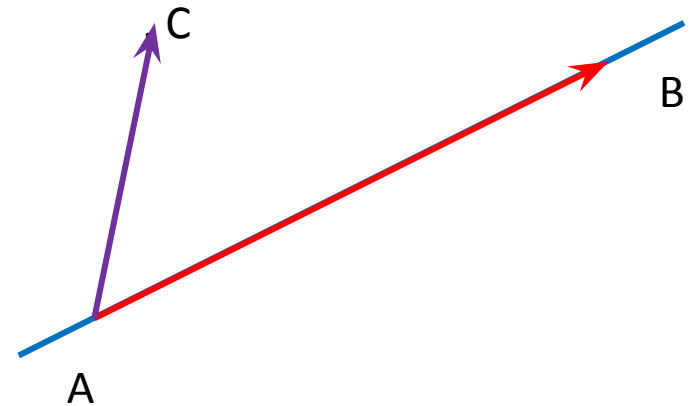
А если вычислять
сумму модулей?

Точка и прямая

Даны координаты точек A, B, C.

Как расположена точка C относительно прямой AB:

- выше прямой;
- ниже прямой;
- на прямой?



Рассмотрите $\vec{AB} \times \vec{AC}$

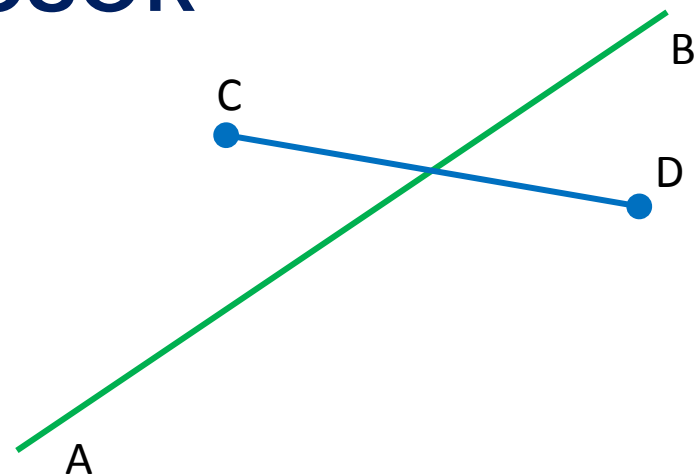
Вектор направлен

- к нам – точка выше прямой
- от нас – точка ниже прямой
- равен нулю – точка на прямой

Точка и отрезок

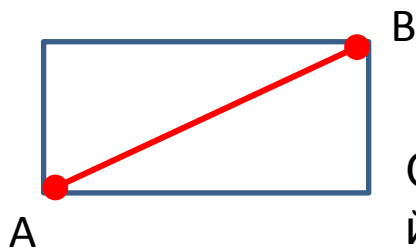
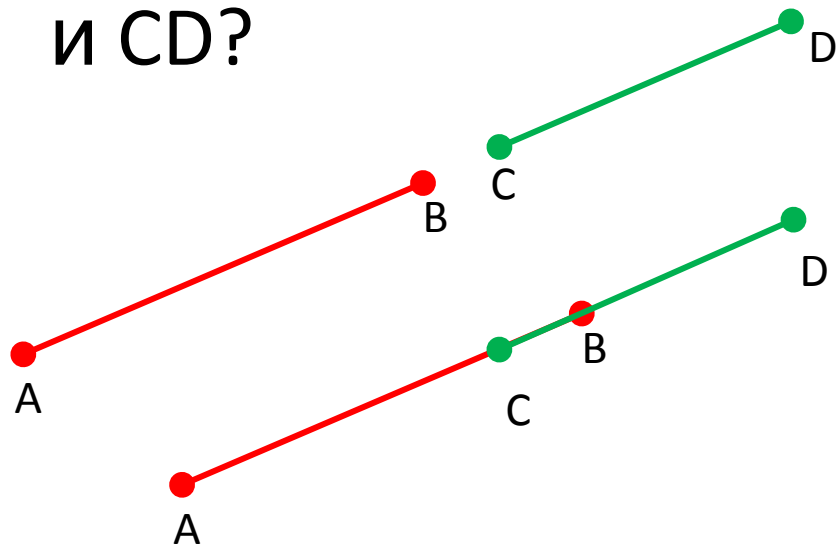
Пересекает ли прямая
AB отрезок CD?

Ответ. Нет, если оба конца
отрезка расположены по одну
сторону от прямой.

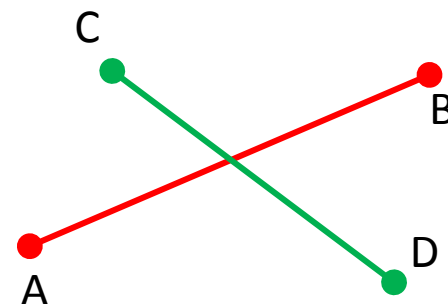
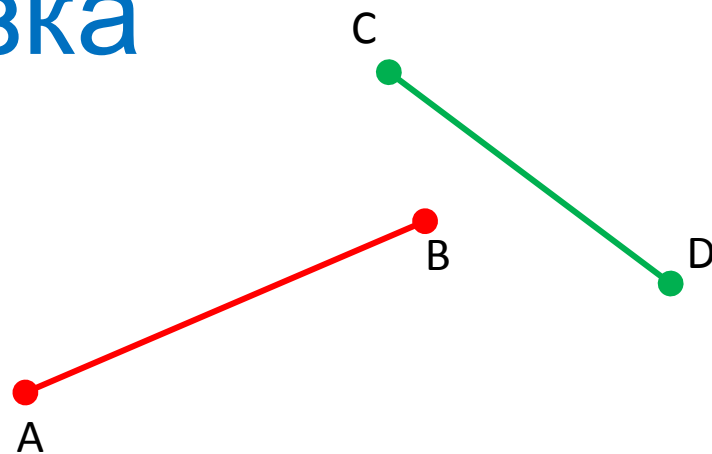


Два отрезка

Пересекаются ли отрезки АВ и CD?



Ограничивающий прямоугольник



Ответ. Пересекаются, если одновременно выполняются условия

1. Прямая АВ пересекает отрезок CD
2. Прямая CD пересекает отрезок АВ
3. Пересекаются ограничивающие прямоугольники

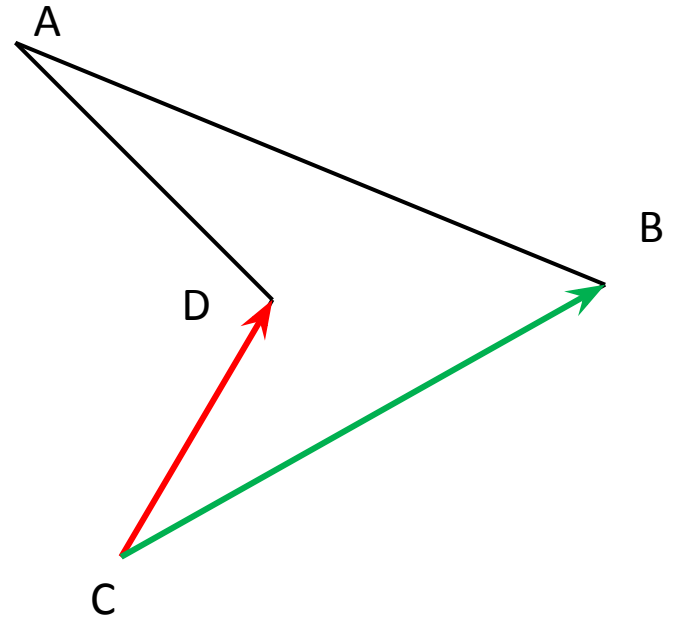
Направление обхода

В каком порядке: по часовой стрелке или против – заданы вершины многоугольника? (ABCD, ADCB)

Вариант решения

1. Найти выпуклую вершину
2. Провести из неё векторы в 2 соседние
3. Найти векторное произведение проведённых векторов

Одной из выпуклых вершин будет самая нижняя. Если самых нижних несколько, то самая левая из них.



Выпуклый?

Заданы координаты вершин простого многоугольника в направлении обхода по или против часовой стрелки. Определить, является ли он выпуклым.

Ответ. Если, обходя многоугольник вдоль границы, всё время поворачиваем в одну сторону (всё время направо или всё время налево), то многоугольник выпуклый.

Осторожно со звёздами!

