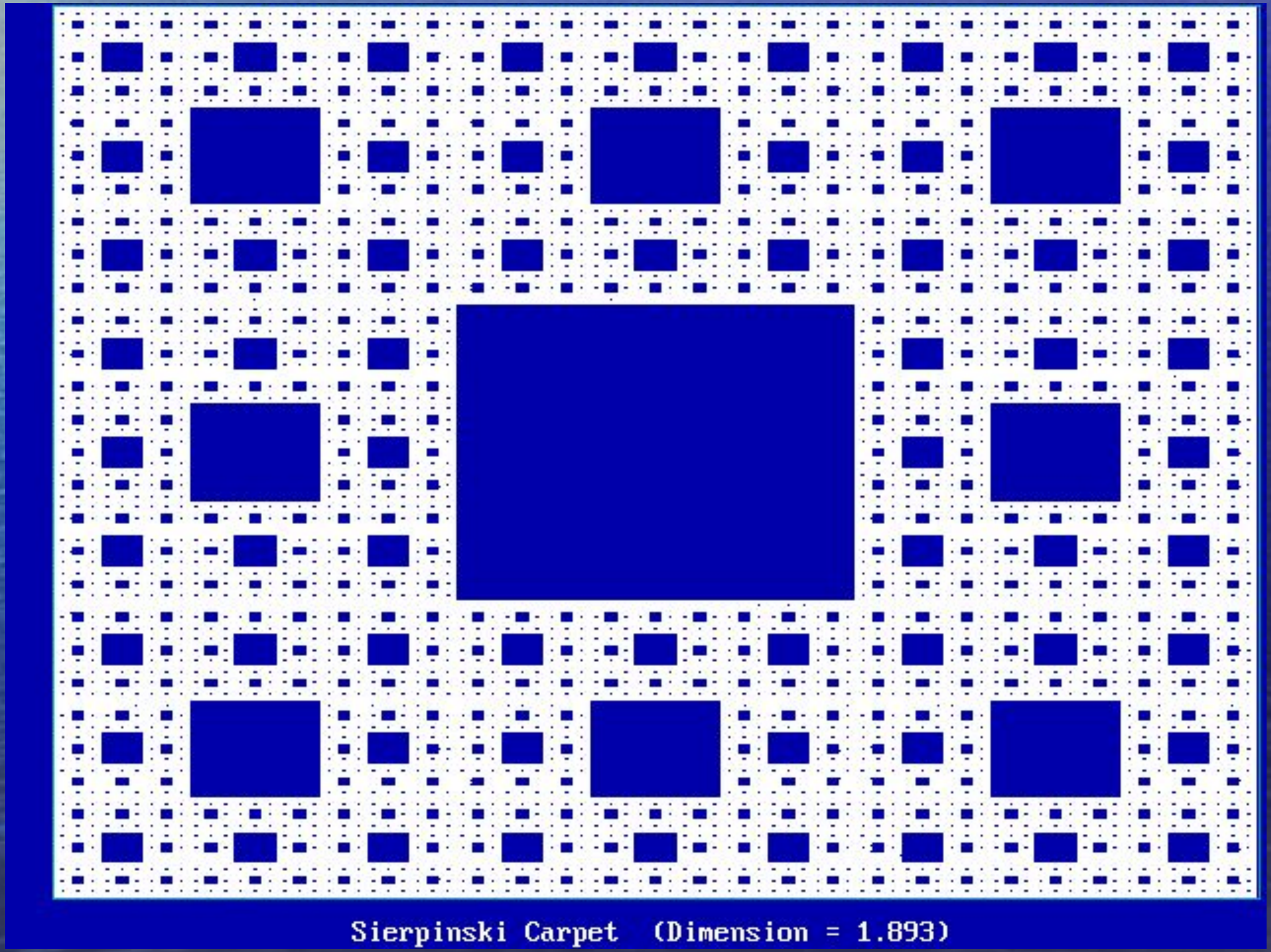
Ф Р А К Т А Л Ы

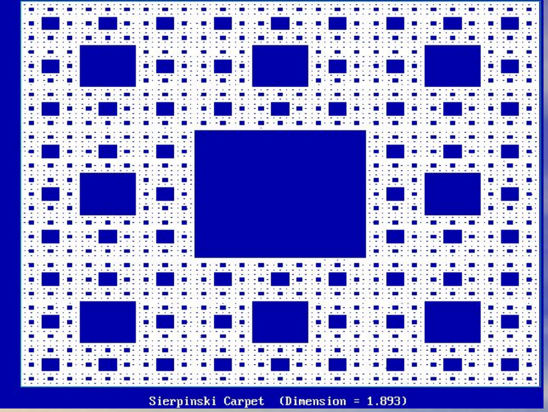
Как известно, понятие фрактала появилось в научной литературе в середине 60-х годов. Фрактал – это множество, обладающее свойством масштабной инвариантности с размерностью, большей его топологической размерности

Свойство масштабной инвариантности (самоподобия) означает, что фрактал состоит из частей, которые в некотором смысле подобны целому, т.е. фрактал выглядит одинаково в каком бы масштабе его не наблюдать.

Из-за масштабной инвариантности, фрактальные кривые сильно изрезаны и их длина может быть сколь угодно большой, в зависимости от выбора масштаба измерения. В научно-популярной литературе в качестве классического примера фрактального множества приводятся береговые линии, размерность которых занимает промежуточное положение между размерностями гладкой линии и поверхности. При этом фрактальная размерность, будучи основной характеристикой фрактала, количественно определяет степень его изрезанности.

Простейший способ объяснить, что такое слон - сначала показать его изображение. Вы указываете и говорите, " Смотрите. Слон. " Так вот, здесь рисунок фрактала, иногда еще называемый ковром Серпенского (Sierpenski carpet)





Обратите внимание, что имеется сплошной синий квадрат в центре, с 8 дополнительными меньшими квадратами вокруг центрального.

Каждый из 8 меньших квадратов выглядит точно так же, как первоначальный. Умножьте каждую сторону меньшего квадрата на 3 (увеличение области 3 x 3 = 9), и Вы получите первоначальный квадрат. Или, наоборот, поделите каждую сторону большего квадрата на 3, и Вы получите один из 8 меньших квадратов. С масштабом 3, все квадраты выглядят одинаковыми (оставим пока в стороне центральный квадрат).

этим определяется фрактальная размерность

log 8 / log 3 = 1.8927.

Каждый из меньших квадратов может точно также быть разделен: центральный синий квадрат, окруженный 8 *еще меньшими квадратами*. Так исходные 8 маленьких квадратов могут быть поделены на 64 *еще меньших* квадратов, каждый из которых похож на исходный большой квадрат, если умножить его стороны на 9. Так что фрактальная размерность - log 64 / log 9 = 1.8927. (Вы ведь не ожидали, что размерность изменится, а?) Во фрактале этот процесс происходит всегда

Тем временем, пока без понимания, мы только что определили *фрактальную (или Гаусдорфову)* размерность. Если число маленьких квадратов - N при масштабе r, то эти два числа связаны фрактальной размерностью **D**:

$$\mathbf{N = r^D}$$

Или, беря логарифмы, мы имеем D = log N / log r.

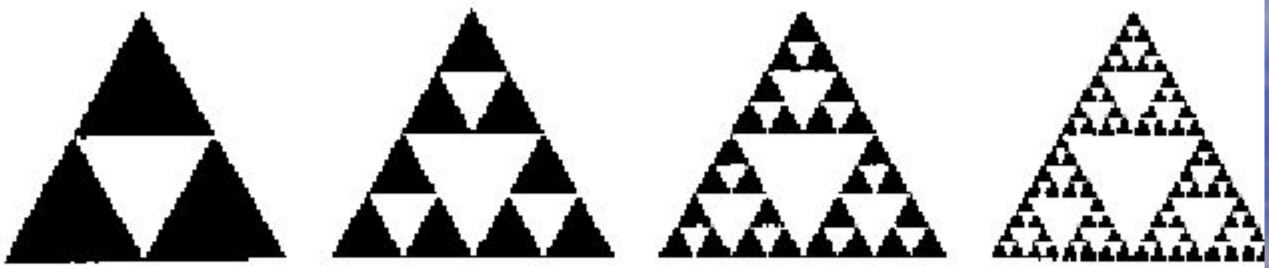


РИС. 2.15. Построение треугольной салфетки Серпинского. Затравка – треугол
ник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из затравк
центральный треугольник. *Справа*: четвертое поколение предфракталов; фра
тальная кривая получается в пределе при бесконечно большом числе поколени
и имеет фрактальную размерность $D = \ln 3/\ln 2 = 1{,}58\ldots$.

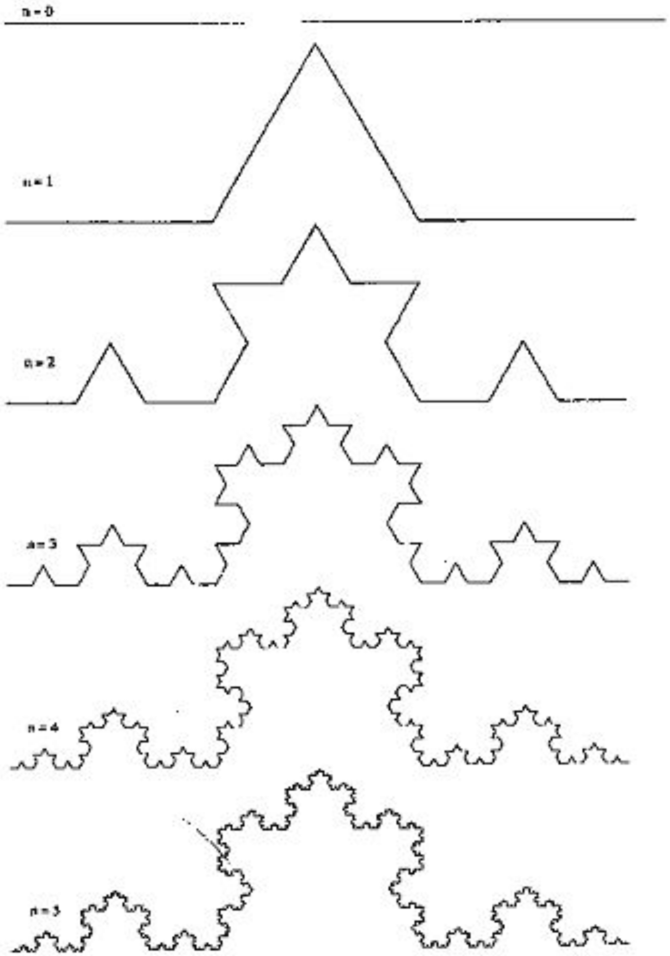


РИС. 2.8. Построение триадной кривой Кох.

На рис. 2.8 показано, как построить триадную кривую Кох. Триадная кривая Кох – один из стандартных примеров, приводимых в подтверждение того, что кривая может иметь фрактальную размерность $D > 1$.

Построение кривой Кох начинается с прямолинейного отрезка единичной длины $L(1) = 1$. Этот исходный отрезок называется *затравкой* и может быть заменен каким-нибудь многоугольником, например равносторонним треугольником, квадратом. Затравка – это 0-е поколение кривой Кох. Построение кривой Кох продолжается: каждое звено затравки мы заменяем *образующим элементом*, обозначенным на

по 1/3. Длина всей кривой 1-го поколения составляет величину $L(1/3) = 4/3$. Следующее поколение получается при замене каждого прямолинейного звена уменьшенным образующим элементом. В результате мы получаем кривую 2-го поколения, состоящую из $N = 4^2 = 16$ звеньев, каждое длиной $\delta = 3^{-2} = 1/9$. Длина кривой 2-го поколения равна $L(1/9) = (4/3)^2 = 16/9$. Заменяя все звенья предыдущего поколения кривой уменьшенным образующим элементом, получаем новое поколение кривой. Кривая n-го поколения при любом конечном n называется *предфракталом*.

В виде исключения проследим во всех подробностях за тем, как получается выражение для D. Длина предфрактала n-го поколения определяется формулой

$$L(\delta) = (4/3)^n.$$

Длина каждого звена составляет

$$\delta = 3^{-n}.$$

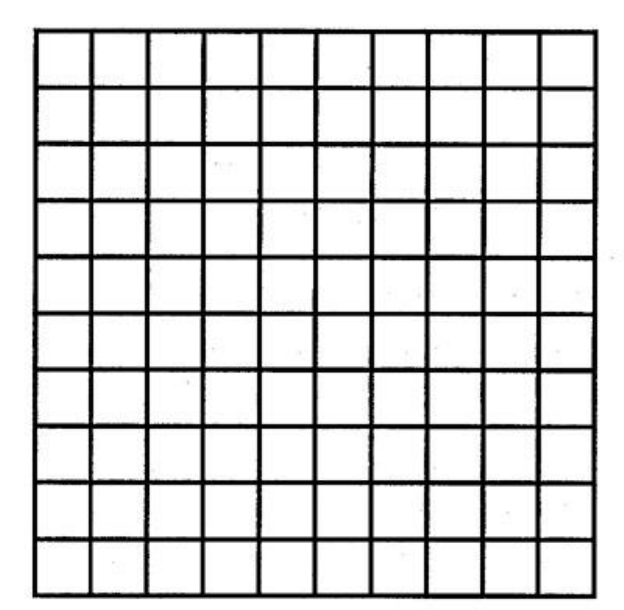
Замечая, что число поколений n представимо в виде

$$n = -\ln\delta/\ln 3$$

Обычно, когда мы что-либо измеряем, мы используем повседневные измерения (или по крайней мере те, с которыми мы знакомы из элементарной простой геометрии). Точка имеет нулевое измерение. Линия имеет одно измерение. Плоскость(квадрат) имеет два измерения. Куб имеет три измерения. Эти основные измерения иногда упоминаются, как ***топологические измерения***.

Мы говорим, что комната размером столько-то "квадратных футов". В этом случае мы используем двумерную концепцию площади. Мы говорим, что земля размером столько-то "акров". Здесь, опять таки, мы используем двумерную концепцию площади, но с другими единицами (в "акре" 43,560 "квадратных футов"). Мы говорим, что цистерна содержит столько-то "галлонов". Здесь мы используем меру объема (в "галлоне" 231 "кубический дюйм" в США, или .1337 "кубических фута").

Предположим, Ваша комната имеет размер 10 на 10 футов, или 100 квадратных футов. Сколько ковра потребуется, чтобы ее покрыть? Хорошо, Вы говорите, 100 квадратных футов ковра, конечно. И это истинно, для обычного ковра.



Мы получили 100 частей. То есть, если мы делим с коэффициентом масштаба 10, мы получаем 100 меньших квадратов, каждый из которых напоминает большой квадрат. Если мы умножаем любой из меньших квадратов на 10, мы получаем первоначальный большой квадрат.

Давайте вычислим измерение для этого квадрата. Используем ту же самую формулу, которую мы использовали для ковра Серпинского:

$$N = r^D .$$

Мы имеем N = 100 частей и r = 10, так что мы получаем измерение D как

$$D = \log(100)/\log(10) = 2.$$

Мы назвали измерение D рассчитанное таким образом (а именно, с**равнивая число подобных объектов N, которые мы получили в различных масштабах с коэффициентом масштаба r**) *Хаусдорфовой размерностью*. В этом случае, Хаусдорфово измерение 2 - то же самое, что и обычное или топологическое измерение 2.

Но представьте, что Вы покрыли пол ковром Серпинского. Сколько ковра Вам тогда понадобится?

Мы видели, что ковер Серпинского имеет Хаусдорфову размерность D = 1.8927… На ковер Серпинского с каждой стороной в 10 футов пошло бы лишь N = 101.8927 = 78.12 квадратных футов материала.

Вспомните, что, когда мы разделили стороны ковра Серпинского на 3, мы получили только 8 копий оригинала, потому что мы выбросили центральный квадрат. Так что, он имел Хаусдорфову размерность D = log 8/ log 3 = 1.8927.

Затем мы разделили каждую из 8 копий снова на 3, еще раз выбросив центральные квадраты, оставив 64 копии оригинала. Деление дважды на 3 есть то же самое, что деление на 9, так что, пересчитав наше измерение, мы получаем D = log 64/ log 9 = 1.8927.

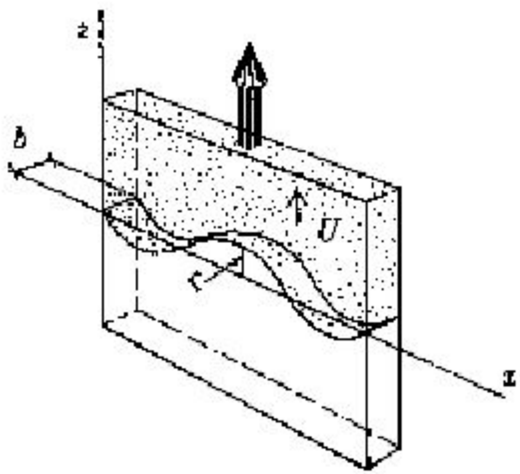
Обычный ковер имеет Хаусдорфову размерность 2 и топологическую (обычную) размерность 2. Ковер Серпинского имеет Хаусдорфову размерность 1.8927, а вот топологическую размерность 2.

Mandelbrot определил ***фрактал*** как объект, у которого **Хаусдорфова размерность отличается от его топологической размерности**. Так что, ковер Серпинского - фрактал. Обычный ковер - нет.

Образование вязких пальцев в пористых средах

Проблема образования так называемых вязких пальцев в пористых средах имеет первостепенное значение для добычи нефти. Она представляет интерес и для гидродинамики, и для физики пористых сред. Недавно было показано, что вязкие пальцы в пористых средах имеют фрактальную природу [36, 122, 123]. Мы начинаем с введения в проблему образования вязких пальцев в двумерной геометрии (ячейке Хеле-Шоу) и приводим некоторые из соответствующих экспериментальных результатов. Затем мы излагаем экспериментальные результаты относительно образования вязких пальцев в *пористых* средах и, в частности, обсуждаем самые последние данные о том, что вязкие пальцы имеют *фрактальную* природу.

Хеле-Шоу.



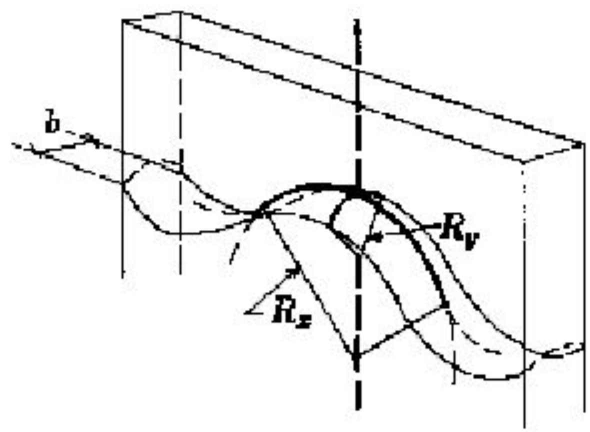


РИС. 4.2. Геометрия поверхности раздела жидкость – жидкость.

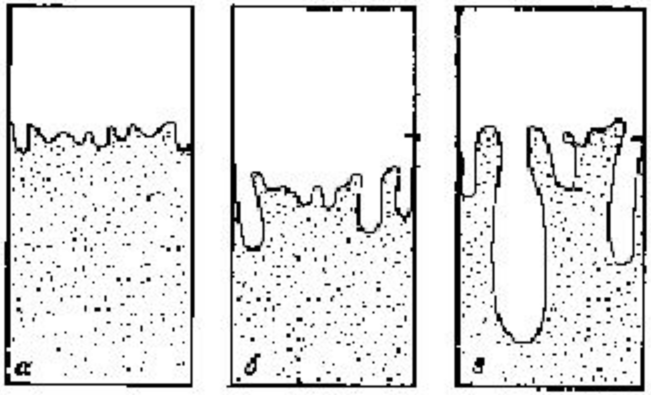


РИС. 4.3. Образование вязких пальцев в вертикальной ячейке при вытеснении воздухом глицерина (темный цвет) сверху вниз. $U = 0.1$ см/с и $\lambda_c = 1,2$ см. Ранняя стадия с наблюдаемым средним $\lambda \approx 2,2$ см. Более поздняя стадия: начало образования пальцев. Поздняя стадия: более длинные пальцы тормозят рост соседей [189].

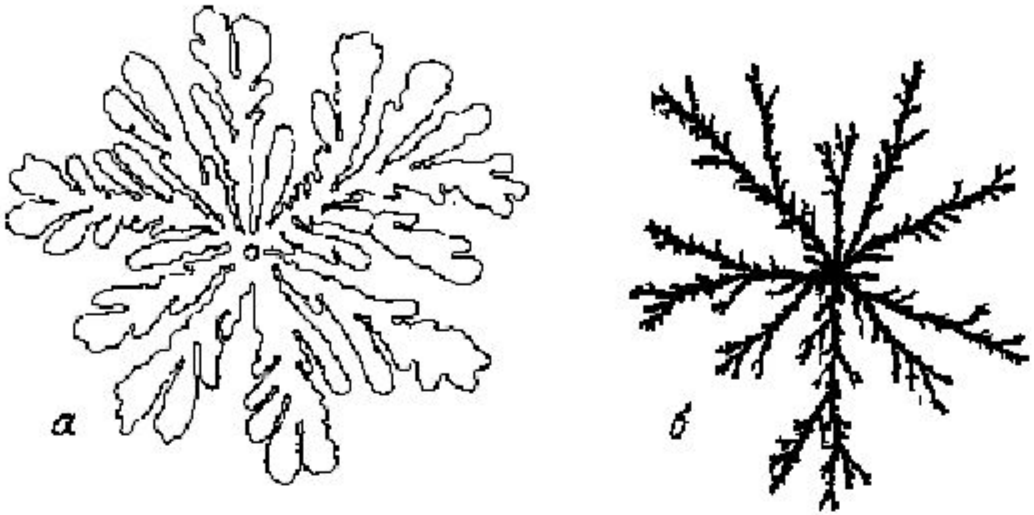


РИС. 4.5. Радиальное образование вязких пальцев в круглой ячейке Хеле-Шоу: *а* – воздух вытесняет глицерин при $Ca = 0,1$ [123]; *б* – вода вытесняет неньютоновскую смесь склероглютана с водой, обладающую высокой вязкостью. Эта структура фрактальна с $D = 1,70 \pm 0,05$ [44].

Ван Мейрс [209] и ван Мейрс и ван дер Поль [210] наблюдали рост вязких пальцев в пористых средах при вытеснении нефти водой с отношением вязкостей, равным 80, на прозрачных моделях, изготовленных из уплотненного пирексового порошка. Результаты представлены на рис. 4.15.

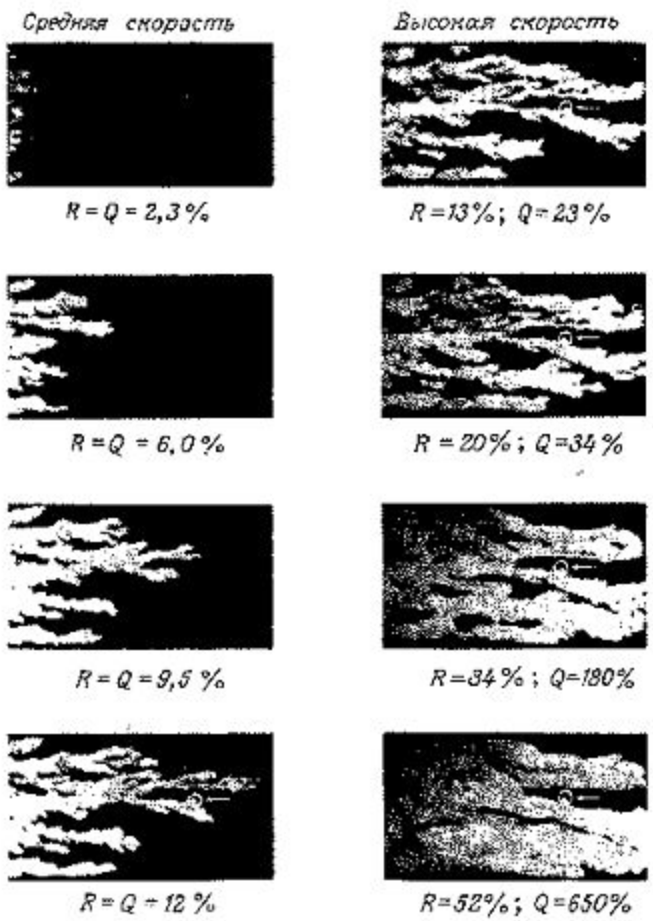


РИС. 4.15. Линейное вытеснение нефти водой при отношении вязкостей нефти и воды, равном 80, в трехмерной пористой среде. Q - общий объем инжектированной жидкости, R - объем «вытеснения», выраженный в процентах от общего объема пор [209, 210].

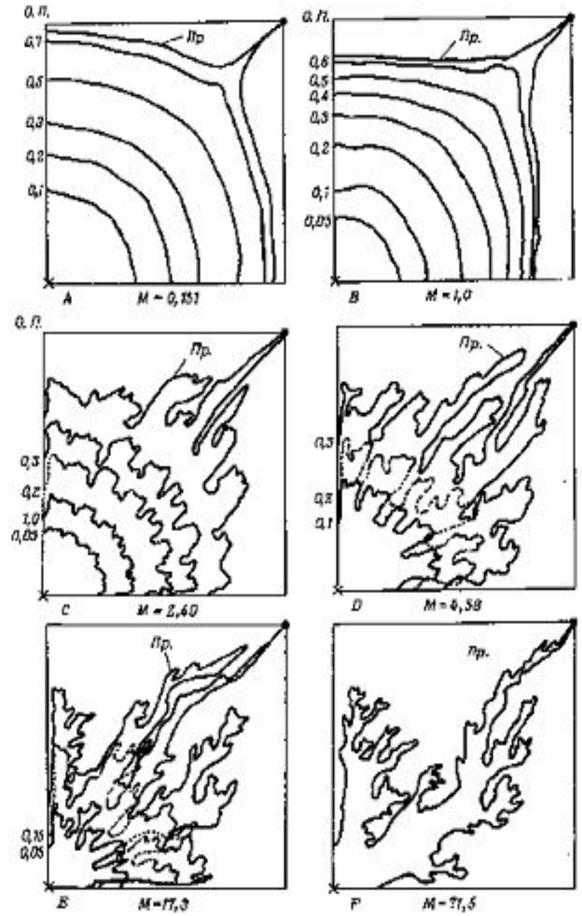


РИС. 4.16. Фронты вытеснения при различных отношениях подвижностей M и объемов заполненных пор (О. П.) до прорыва (Пр.) [78].

Если в начале к фрактальной геометрии относились лишь как к теории, которая на очень красивом языке говорит об известном и не понятно было какие новые результаты можно получить с ее помощью, то развитие компьютерной техники сделало возможным применение фрактальной теории во многих областях естествознания

Возможности фрактальной геометрии успешно применяются также и при решении различных задач нефтегазодобычи. Так было установлено, что при вытеснении высоковязкой жидкости (нефти) слабовязкой жидкостью (водой) в пористой среде образуются вязкие пальцы, имеющие фрактальную геометрию и фрактальная размерность позволяет количественно оценить меру неустойчивости границы раздела нефть-вода

ОСОБЕННОСТИ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Законам фрактальной геометрии подчиняются также и временные ряды, для которых масштабная инвариантность проявляется, когда в течении одного и того же периода времени процесс замеряется с различными шагами и кривая дополняется новыми точками

Фрактальность можно наблюдать в поведении таких временных процессов нефтегазодобычи, как колебания дебита, давления и т.д., когда при уменьшении шага замеров выявляются все новые особенности изучаемых параметров. Характер их колебаний зависит как от внешних воздействий, так и от неравновесных процессов фильтрации многофазных систем и несет в себе информацию о состоянии и поведении пластовой системы