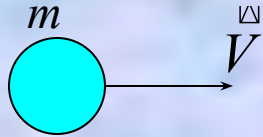


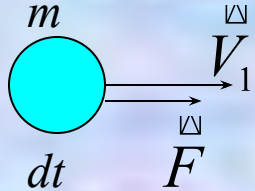
## Лекция № 5

# Законы сохранения и изменения импульса и момента импульса в механике

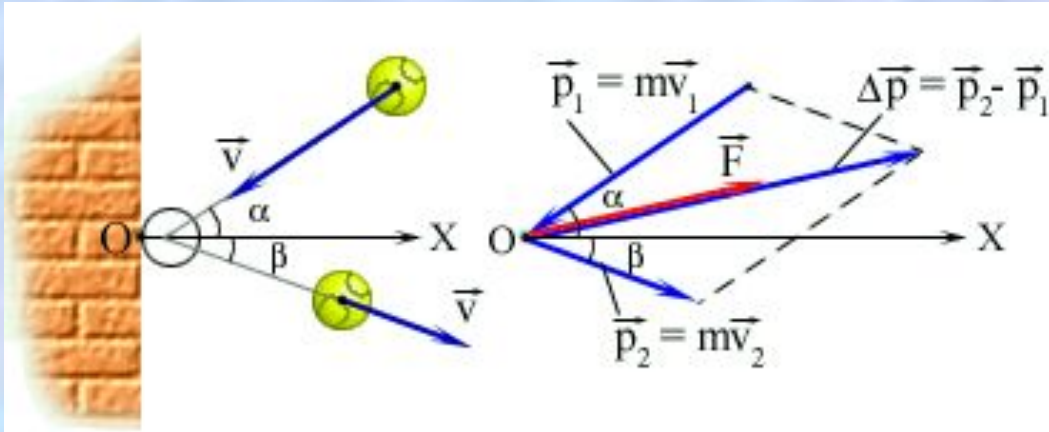
# Импульс тела



$$\vec{P} = m\vec{V} \quad \left( \vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i \right) - \text{импульс материальной точки (системы тел)}$$



$$d\vec{P} = \vec{F} \cdot dt - \text{импульс силы}$$



Изменение импульса

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

# Закон сохранения импульса

Замкнутая система

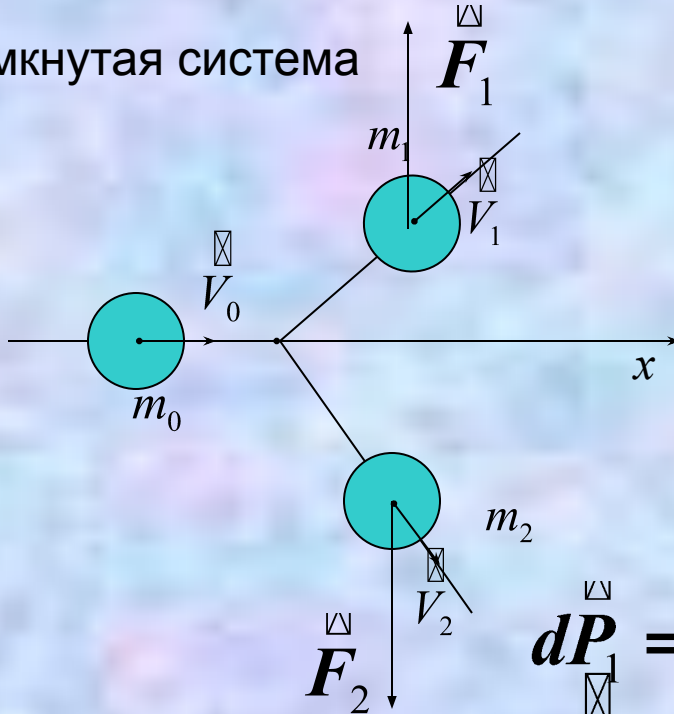
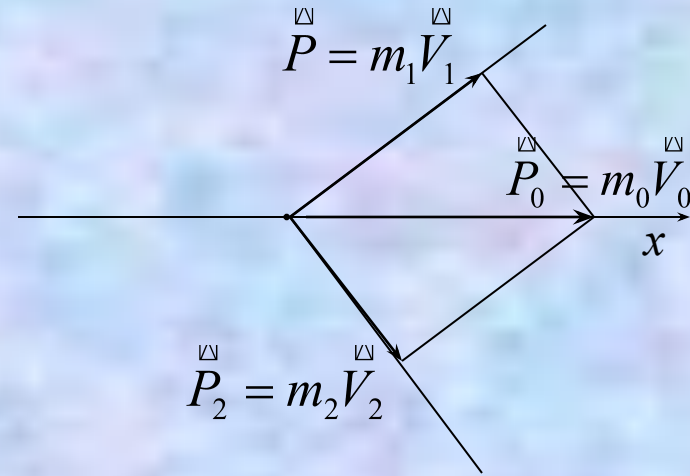


Диаграмма импульсов



$$d\vec{P}_1 = \vec{F}_1 dt$$

$$d\vec{P}_2 = \vec{F}_2 dt = -\vec{F}_1 dt$$

$$d\vec{P} = d\vec{P}_1 + d\vec{P}_2 = 0$$

$$\vec{P} = \text{const}$$

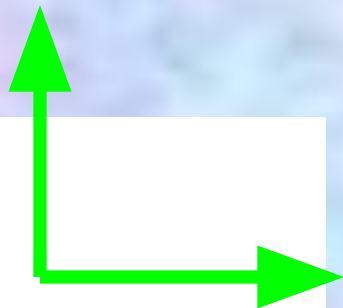
$$\begin{aligned} m_0 &= m_1 + m_2 \\ \vec{P}_0 &= \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \end{aligned}$$

# Движение тел переменной массы

На ракету могут действовать внешние силы (например, сила сопротивления атмосферы), которые на рисунке не показаны

$$\vec{F}^{\text{внешн}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(M\vec{v})}{dt}$$

# Движение тел переменной массы

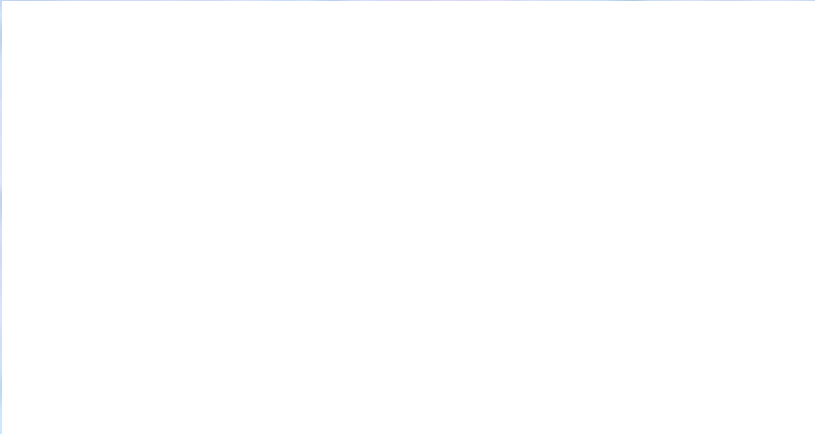


Рассмотрим систему отсчёта, движущуюся равномерно со скоростью, равной скорости ракеты в данный момент

$$\vec{F}^{\text{внешн}} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{u} \cdot \frac{dM}{dt} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \mu \cdot \vec{u}$$

$$\mu = -\frac{dM}{dt} - \text{быстрота истечения газов}$$

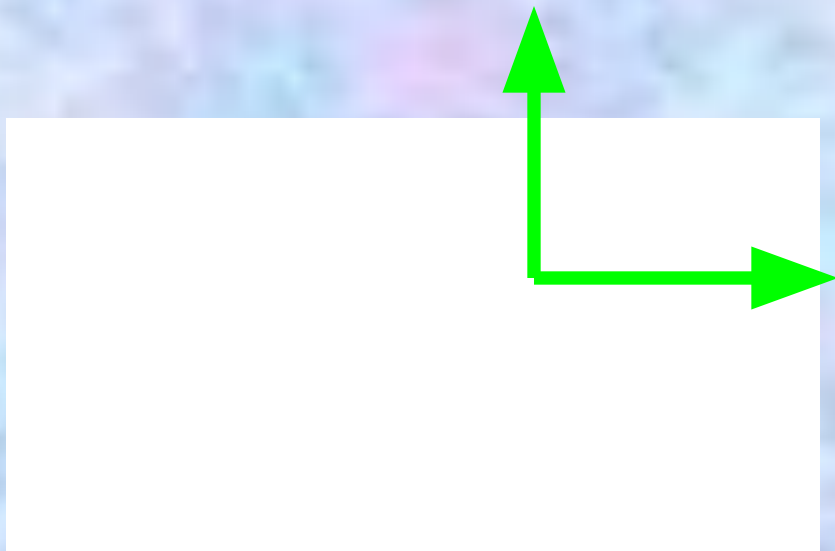
# Движение тел переменной массы


$$\vec{F}^{\text{реакт}} = \mu \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F}^{\text{внешн}} + \vec{F}^{\text{реакт}} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = M \cdot \vec{a}$$

- уравнение Мещерского

# Движение тел переменной массы



Пусть

$$\vec{F}^{\text{внешн}} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \mu \cdot \vec{u} = 0$$

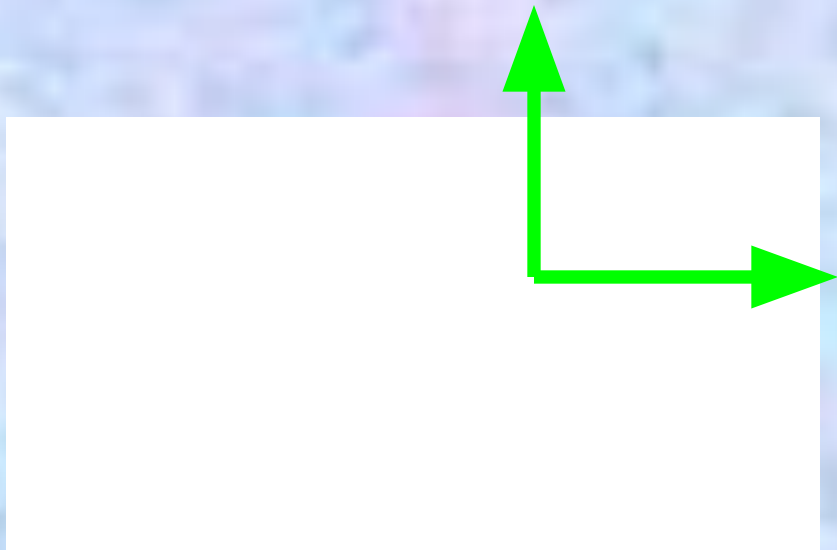
Тогда

$$M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u} \cdot \frac{dM}{dt}$$

Поскольку задача одномерная

$$M \cdot dv = -u \cdot dM$$

# Движение тел переменной массы



$$M \cdot dv = -u \cdot dM$$

$$dv = -u \cdot \frac{dM}{M}$$

$$\int_0^v dv = -u \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}$$

$$v = -u(\ln M - \ln M_0)$$

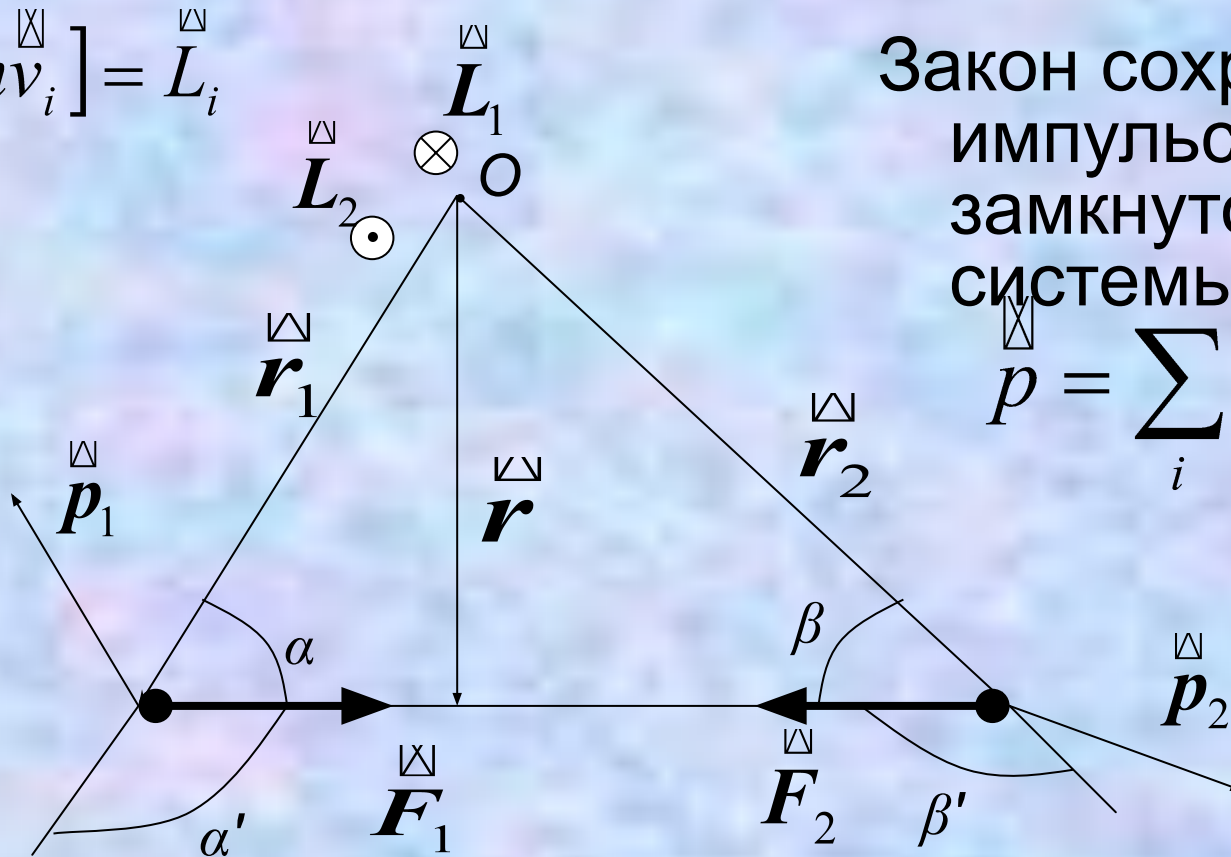
$$v = u \cdot \ln \frac{M_0}{M} = u \cdot \ln \frac{M_0}{M_0 - M_{to}}$$

- формула Циолковского



# Закон сохранения момента импульса

$$[\vec{r}_i m \vec{v}_i] = \vec{L}_i$$

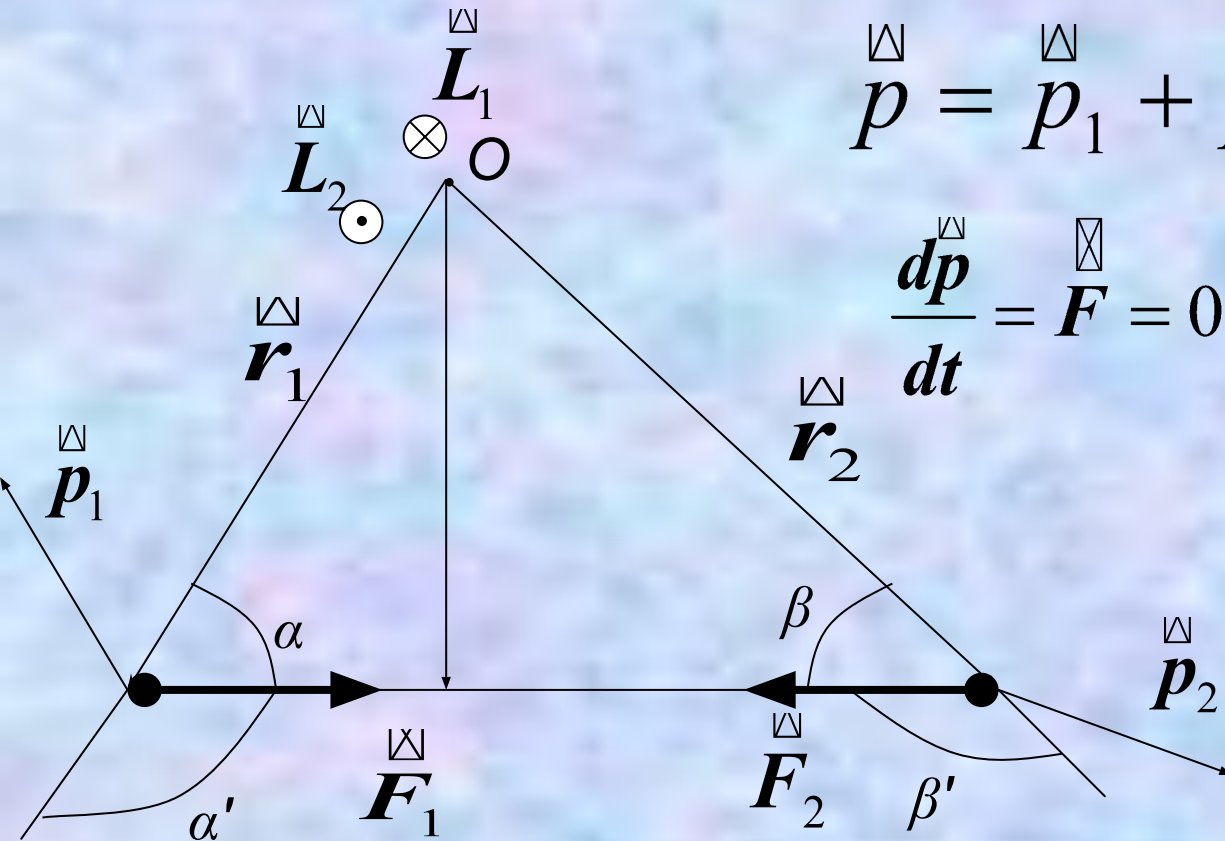


Закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \overrightarrow{const}$$

Видно, что  $\sin \alpha = \sin \alpha'$ ,  $\sin \beta = \sin \beta'$ ,  
 $r = r_1 \sin \alpha = r_2 \sin \beta$ .

# Закон сохранения момента импульса



$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = 0 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\vec{L} = m_1 [\vec{r}_1; \vec{v}_1] + m_2 [\vec{r}_2; \vec{v}_2]$$

# Закон сохранения момента импульса

$$\overset{\Delta}{\mathbf{L}} = m_1 [\overset{\Delta}{\mathbf{r}}_1; \overset{\Delta}{\mathbf{v}}_1] + m_2 [\overset{\Delta}{\mathbf{r}}_2; \overset{\Delta}{\mathbf{v}}_2]$$

$$\frac{d\overset{\Delta}{\mathbf{L}}}{dt} = m_1 \frac{d}{dt} [\overset{\Delta}{\mathbf{r}}_1; \overset{\Delta}{\mathbf{v}}_1] + m_2 \frac{d}{dt} [\overset{\Delta}{\mathbf{r}}_2; \overset{\Delta}{\mathbf{v}}_2] =$$

$$= m_1 [\overset{\Delta}{\mathbf{v}}_1; \overset{\Delta}{\mathbf{v}}_1] + m_1 \left[ \overset{\Delta}{\mathbf{r}}_1; \frac{d\overset{\Delta}{\mathbf{v}}_1}{dt} \right] + m_2 [\overset{\Delta}{\mathbf{v}}_2; \overset{\Delta}{\mathbf{v}}_2] + m_2 \left[ \overset{\Delta}{\mathbf{r}}_2; \frac{d\overset{\Delta}{\mathbf{v}}_2}{dt} \right] =$$

$$= [\overset{\Delta}{\mathbf{r}}_1; \overset{\Delta}{\mathbf{F}}_1] + [\overset{\Delta}{\mathbf{r}}_2; \overset{\Delta}{\mathbf{F}}_2]$$

$$\left| \frac{d\overset{\Delta}{\mathbf{L}}}{dt} \right| = -r_1 F_1 \sin \alpha - r_2 F_2 \sin \beta = rF - rF = 0$$

# Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$\vec{L} = \text{const}$  - для замкнутой системы тел  
в инерциальной системе отсчёта