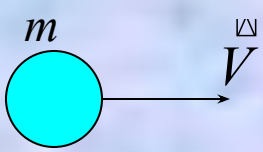
Лекция № 5

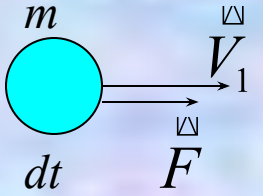
Законы сохранения и изменения импульса и момента импульса в механике

Импульс тела

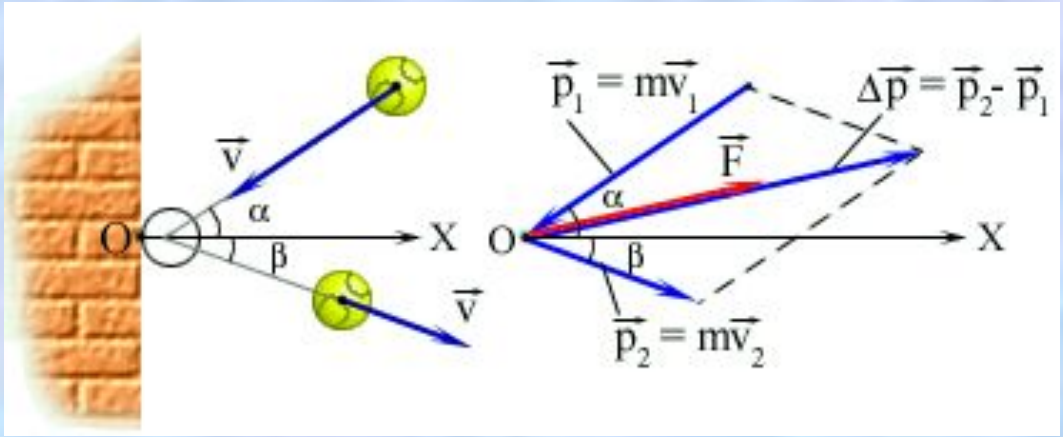


$$\vec{P} = m\vec{V} \qquad (\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i)$$

- *импульс материальной точки (системы тел)*



$$d\vec{P} = \vec{F} \cdot dt - \text{импульс} \quad \text{силы}$$



Изменение импульса

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

Закон сохранения импульса

Замкнутая система

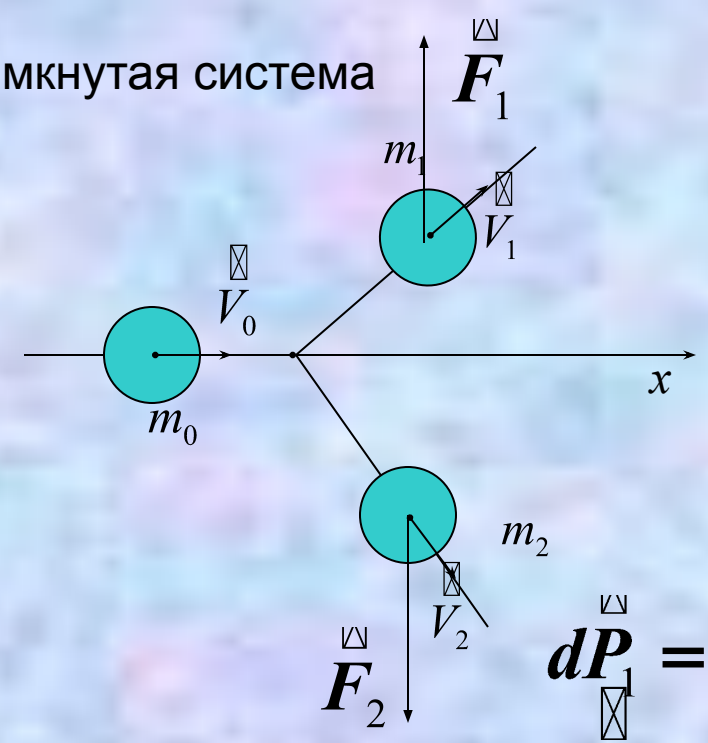
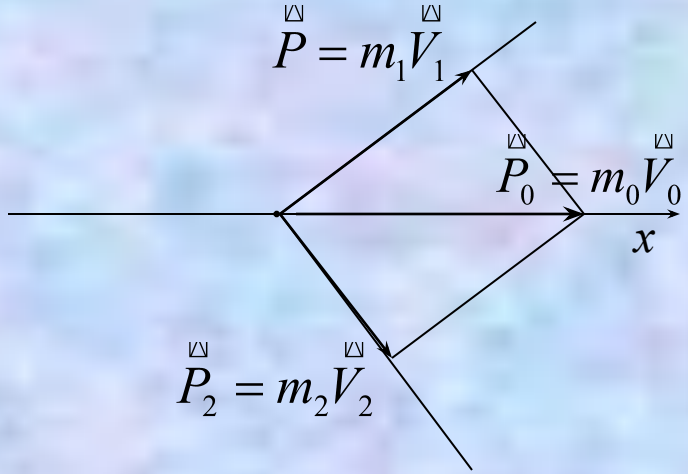


Диаграмма импульсов



$$d\vec{P}_1 = \vec{F}_1 dt$$

$$d\vec{P}_2 = \vec{F}_2 dt = -\vec{F}_1 dt$$

$$d\vec{P} = d\vec{P}_1 + d\vec{P}_2 = 0$$

$$\vec{P} = const$$

$$m_0 = m_1 + m_2$$

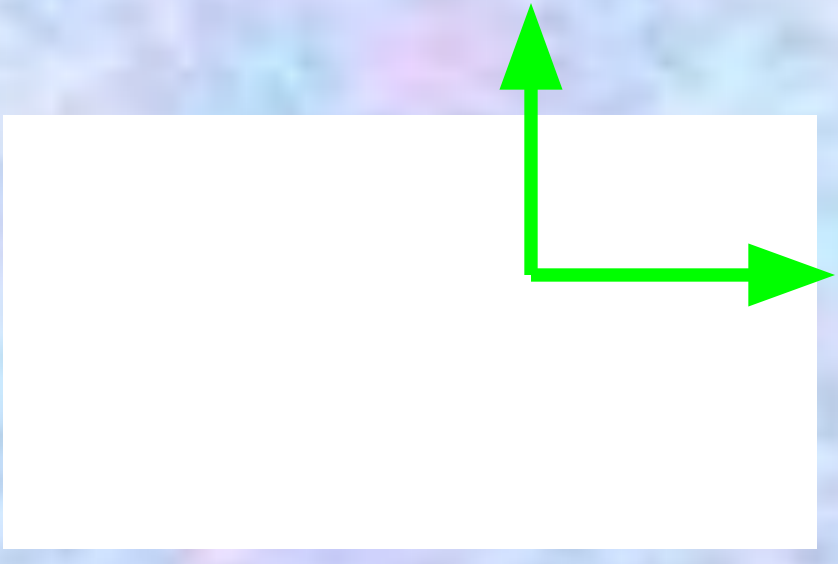
$$\vec{P}_0 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

Движение тел переменной массы

На ракету могут действовать внешние силы (например, сила сопротивления атмосферы), которые на рисунке не показаны

$$\vec{F}^{внешн} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(M\vec{v})}{dt}$$

Движение тел переменной массы



Рассмотрим систему отсчёта, движущуюся равномерно со скоростью, равной скорости ракеты в данный момент

$$\vec{F}^{внешн} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{u} \cdot \frac{dM}{dt} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \mu \cdot \vec{u}$$

$\mu = -\frac{dM}{dt}$ - быстрота истечения газов

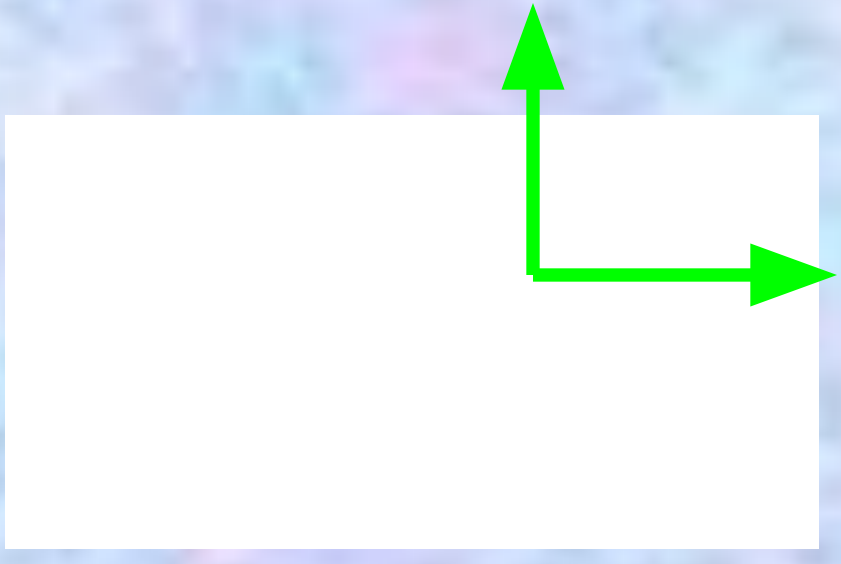
Движение тел переменной массы

$$\vec{F}^{\,реакт} = \mu \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F}^{\,внешн} + \vec{F}^{\,реакт} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = M \cdot \vec{a}$$

- уравнение Мещерского

Движение тел переменной массы



Пусть

$$\vec{F}^{внешн} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \mu \cdot \vec{u} = 0$$

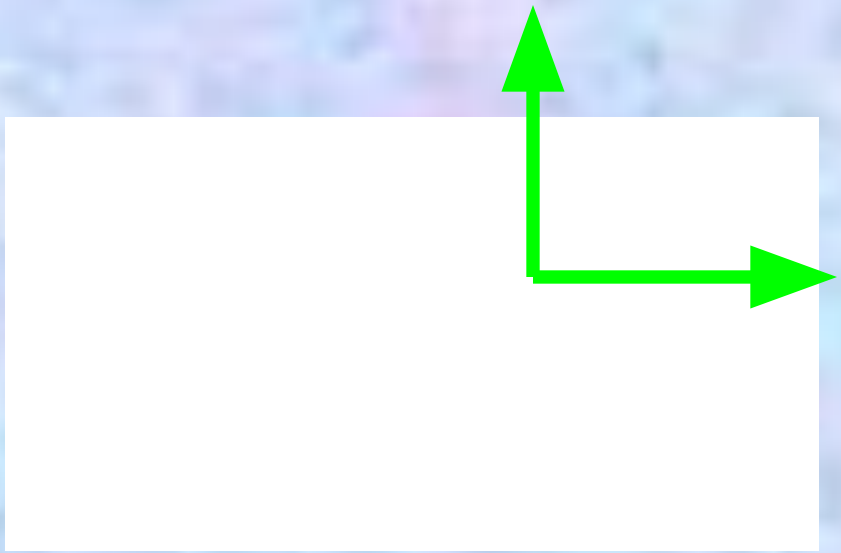
Тогда

$$M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u} \cdot \frac{dM}{dt}$$

Поскольку задача одномерная

$$M \cdot dv = -u \cdot dM$$

Движение тел переменной массы



$$M \cdot dv = -u \cdot dM$$

$$dv = -u \cdot \frac{dM}{M}$$

$$\int_0^v dv = -u \int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M}$$

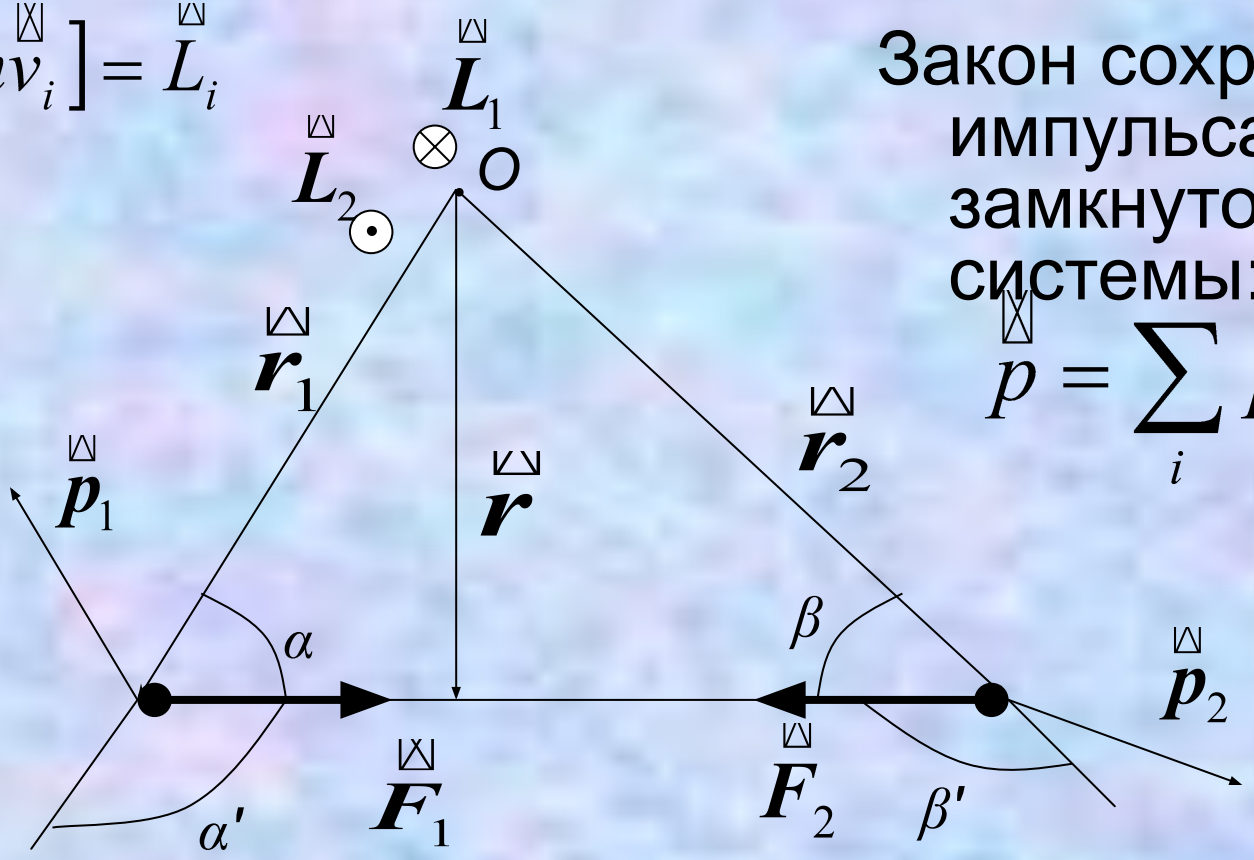
$$v = -u(\ln M - \ln M_0)$$

$$v = u \cdot \ln \frac{M_0}{M} = u \cdot \ln \frac{M_0}{M_0 - M_{mo}}$$

- формула Циолковского

Закон сохранения момента импульса

$$[\vec{r}_i m\vec{v}_i] = \vec{L}_i$$



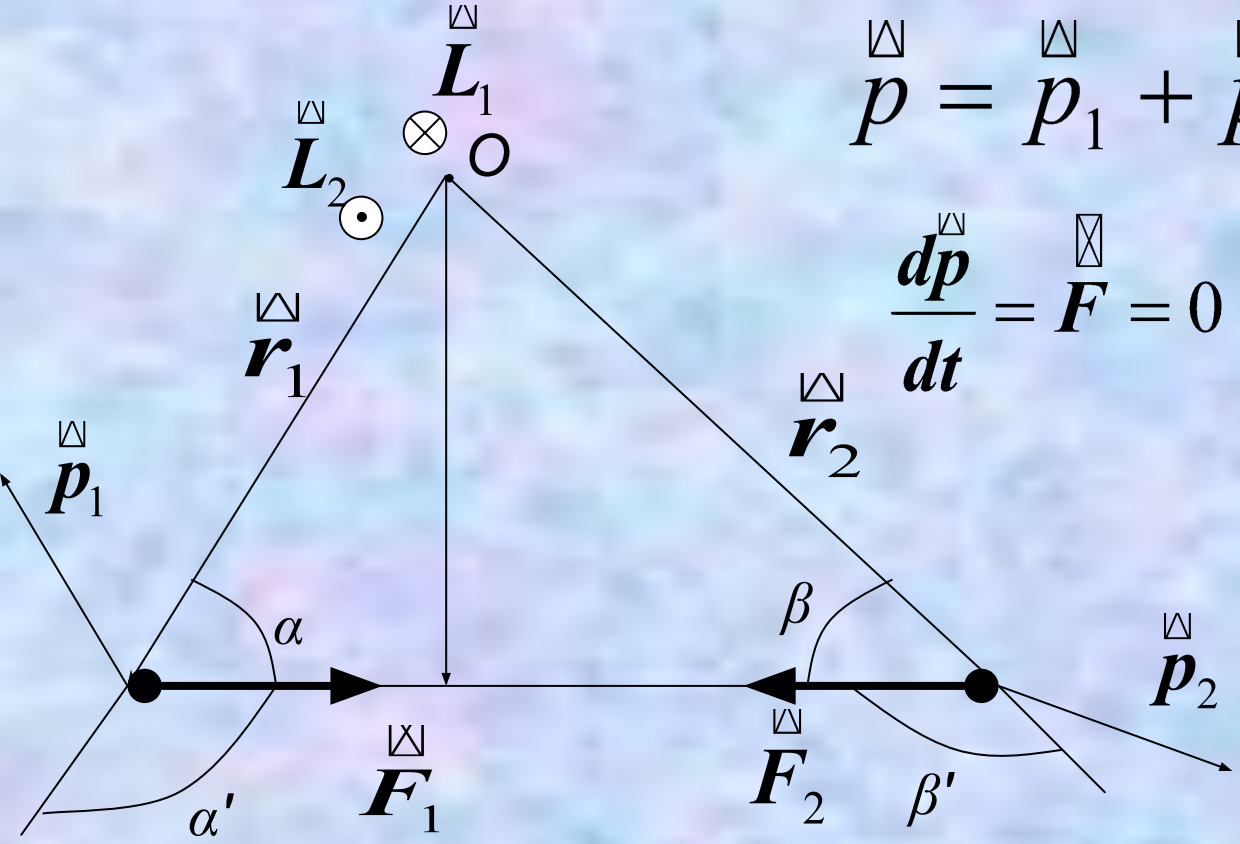
Закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \overrightarrow{const}$$

Видно, что $\sin\alpha = \sin\alpha'$, $\sin\beta = \sin\beta'$,

$r = r_1 \sin\alpha = r_2 \sin\beta$.

Закон сохранения момента импульса



$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = 0 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\vec{L} = m_1\left[\vec{r}_1;\vec{v}_1\right] + m_2\left[\vec{r}_2;\vec{v}_2\right]$$

Закон сохранения момента импульса

$$\vec{L} = m_1[\vec{r}_1;\vec{v}_1] + m_2[\vec{r}_2;\vec{v}_2]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m_1\frac{d}{dt}[\vec{r}_1;\vec{v}_1] + m_2\frac{d}{dt}[\vec{r}_2;\vec{v}_2] =$$

$$= m_1[\vec{v}_1;\vec{v}_1] + m_1\left[\vec{r}_1;\frac{d\vec{v}_1}{dt}\right] + m_2[\vec{v}_2;\vec{v}_2] + m_2\left[\vec{r}_2;\frac{d\vec{v}_2}{dt}\right] =$$

$$= [\vec{r}_1;\vec{F}_1] + [\vec{r}_2;\vec{F}_2]$$

$$\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = -r_1F_1\sin\alpha - r_2F_2\sin\beta = rF - rF = 0$$

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$\vec{L} = \overrightarrow{const}$ - для замкнутой системы тел в инерциальной системе отсчёта