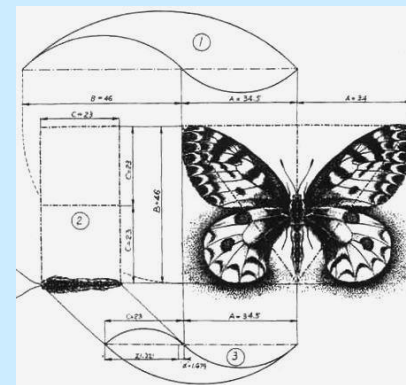
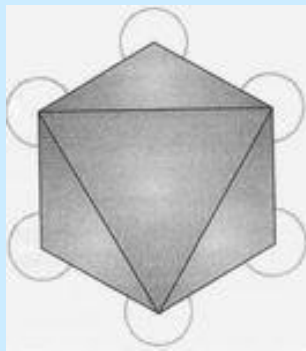


# Развитие конструктивного мышления учащихся при решении задач на нахождение площади, периметра, объема геометрических объектов



## Виды конструктивных задач:

перестраивание  
и разрезание фигур  
(деление фигуры на  
части)

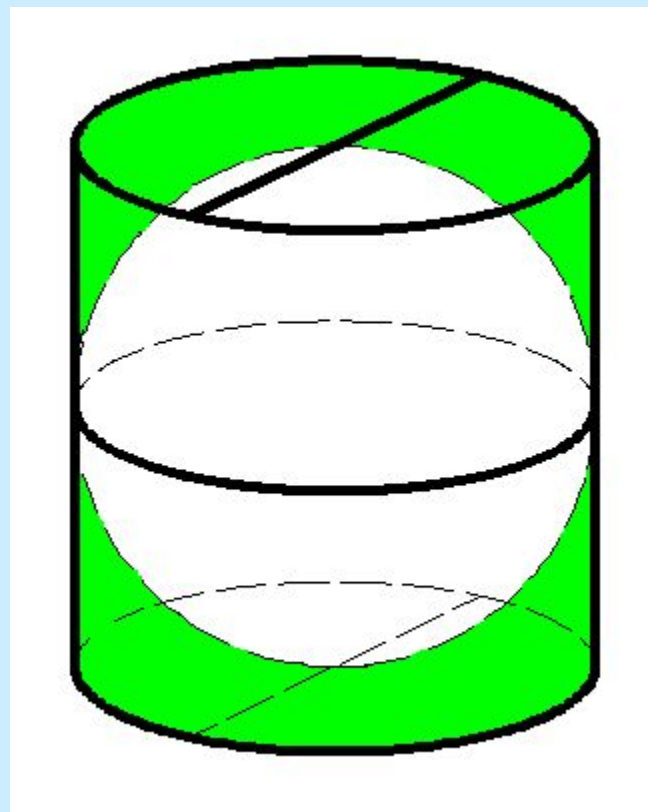
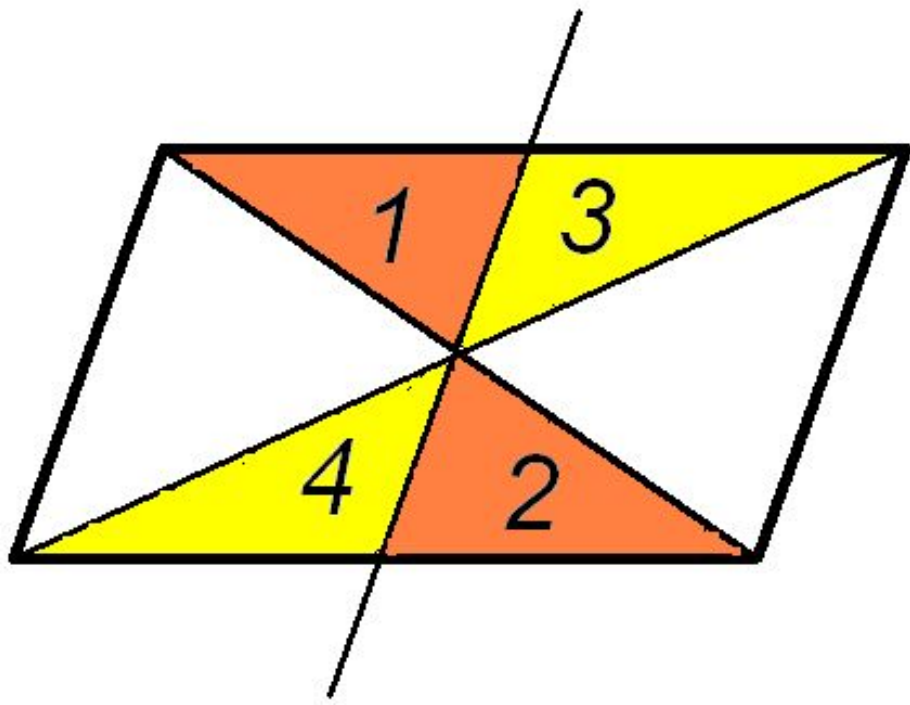
достраивание фигур

### **Решение конструктивных геометрических задач:**

- ✓ активизирует познавательную деятельность учащихся;
- ✓ способствует формированию интеллектуальной культуры школьников;
- ✓ формирует гибкость мышления;
- ✓ развивает способность к обучению на основе теоретических знаний и применению их в нестандартных ситуациях.

**Конструктивные задачи** разного уровня сложности включены в задания внешнего независимого оценивания и государственной итоговой аттестации.

**Геометрические свойства фигур  
и их элементов,  
применяемые при решении  
конструктивных задач**



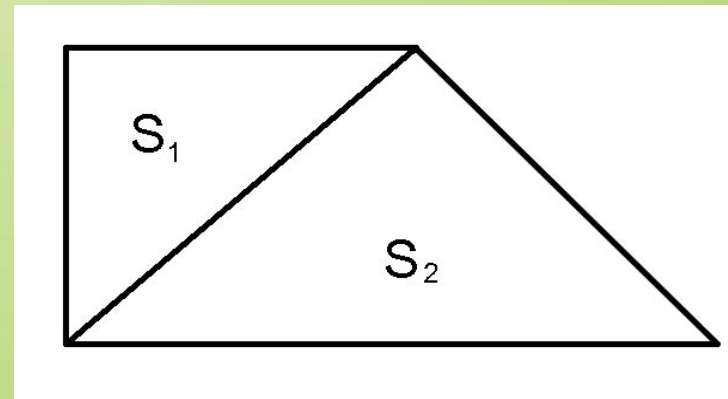
# Основные свойства площадей

1) Равные фигуры имеют равные площади

Если  $F_1 = F_2$ , то  $S_{F_1} = S_{F_2}$

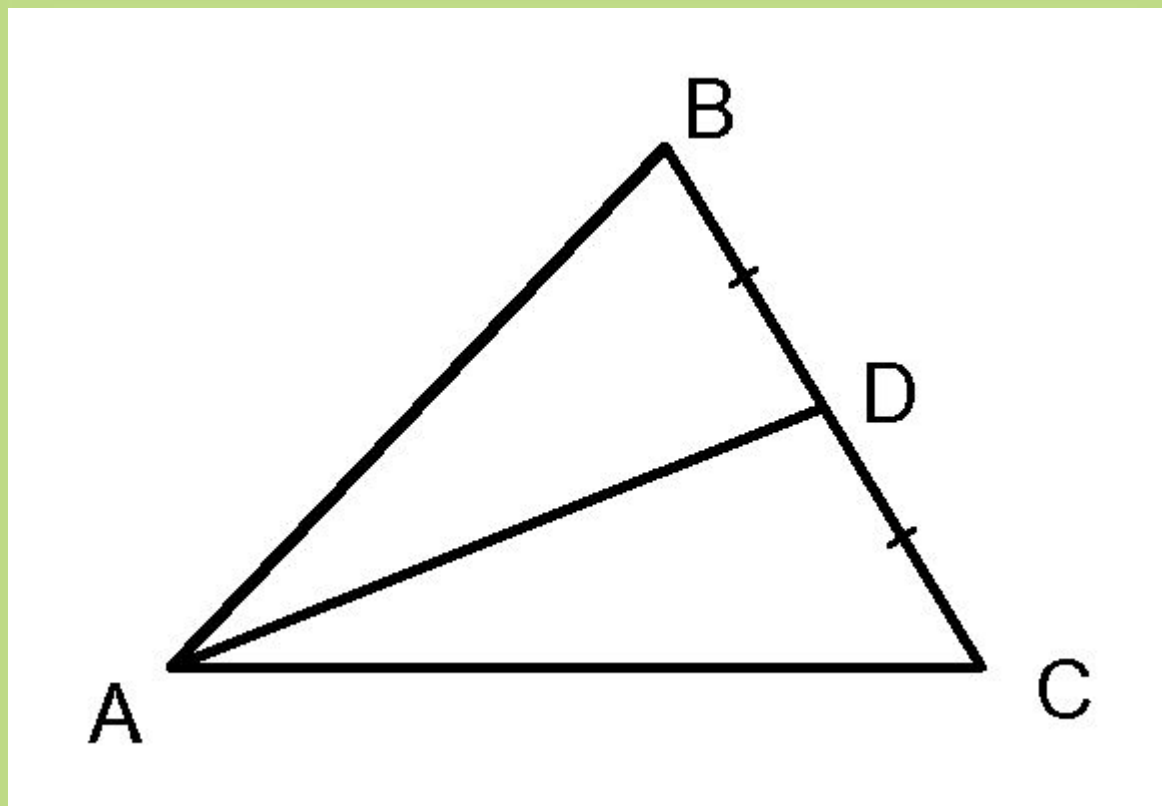
$F_1, F_2$  - равновеликие фигуры

2) Площадь фигуры равна сумме площадей фигур, из которых она состоит



$$S_{\text{о}} = S_1 + S_2$$

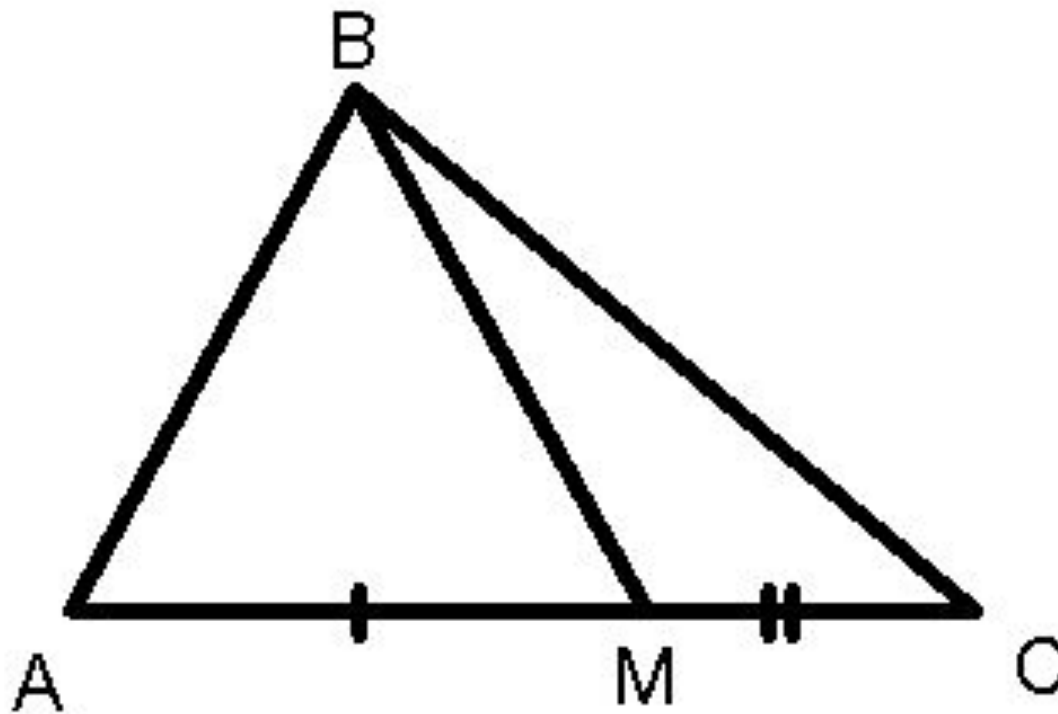
Медиана треугольника делит его на две равновеликие части



$AD$  -

медиана

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$$

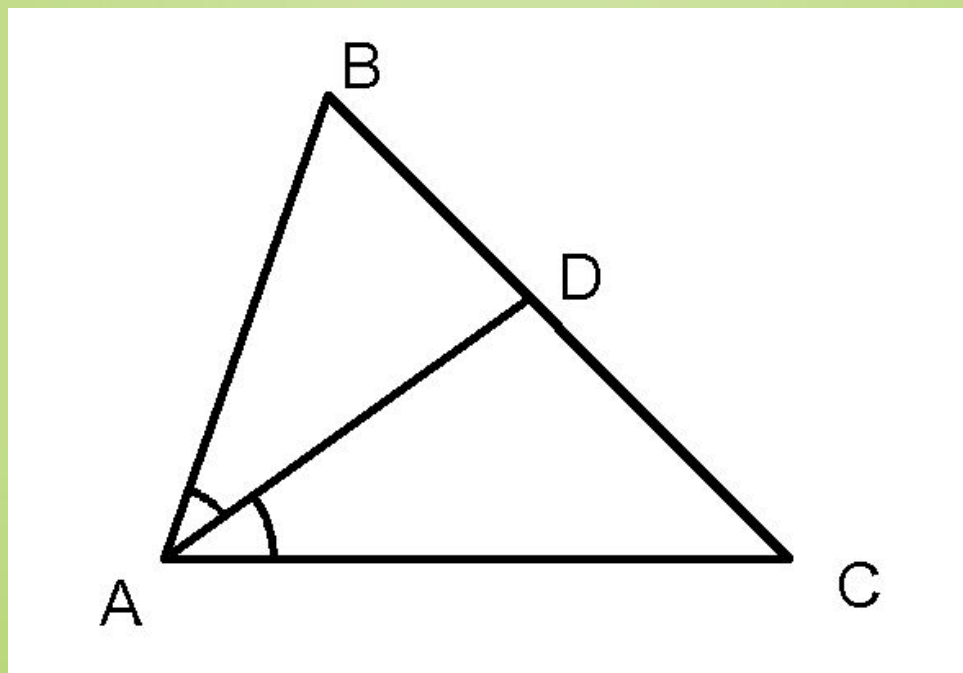


Пусть М – произвольная точка стороны АС  
треугольника АВС, тогда

$$\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{AM}{MC}$$

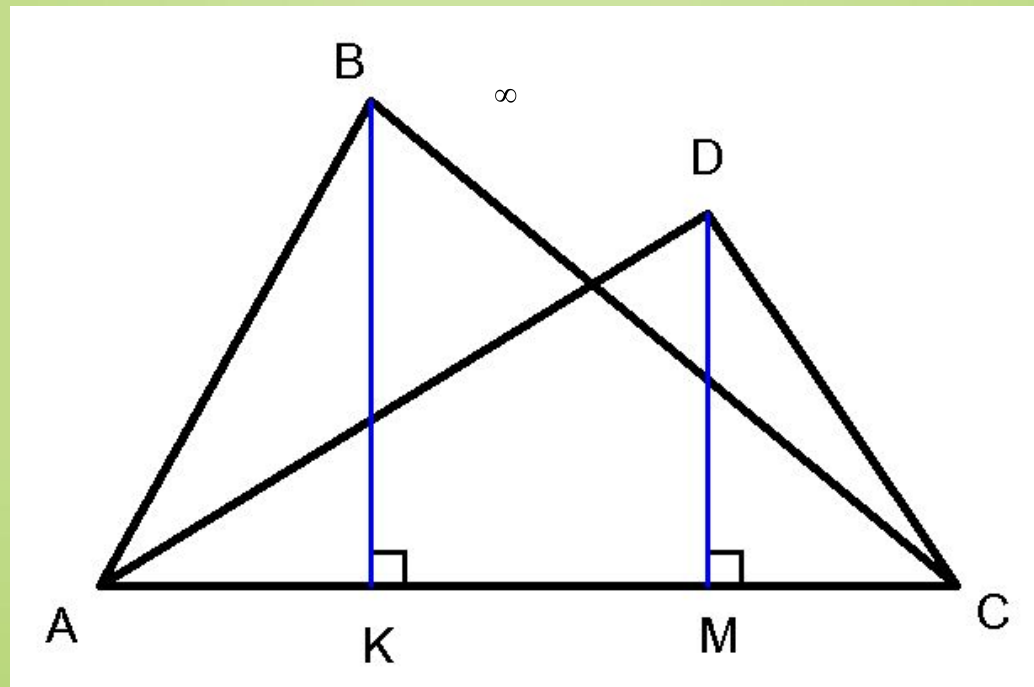
Биссектриса угла треугольника делит его площадь на части, которые пропорциональны прилежащим сторонам угла

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{AB}{AC}$$



Площади треугольников с общим основанием относятся как высоты, проведенные к основанию

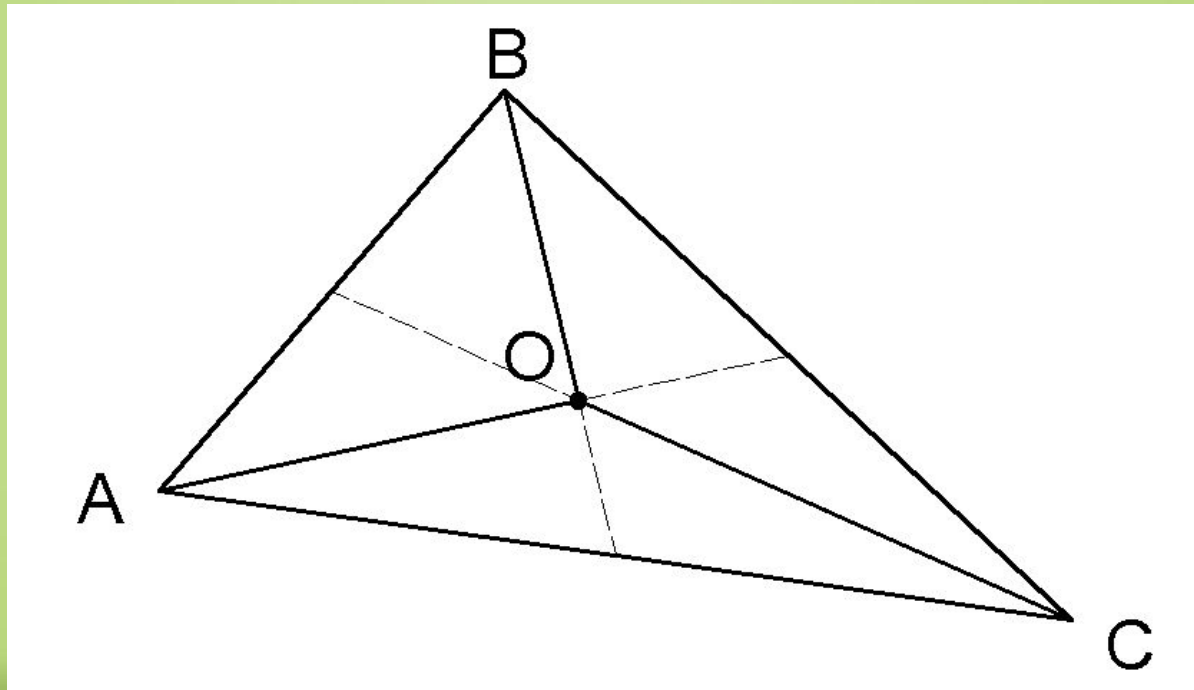
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BK}{DM}$$





В треугольнике точка пересечения медиан соединена с вершинами. Площадь каждого из полученных треугольников составляет третью часть площади данного треугольника

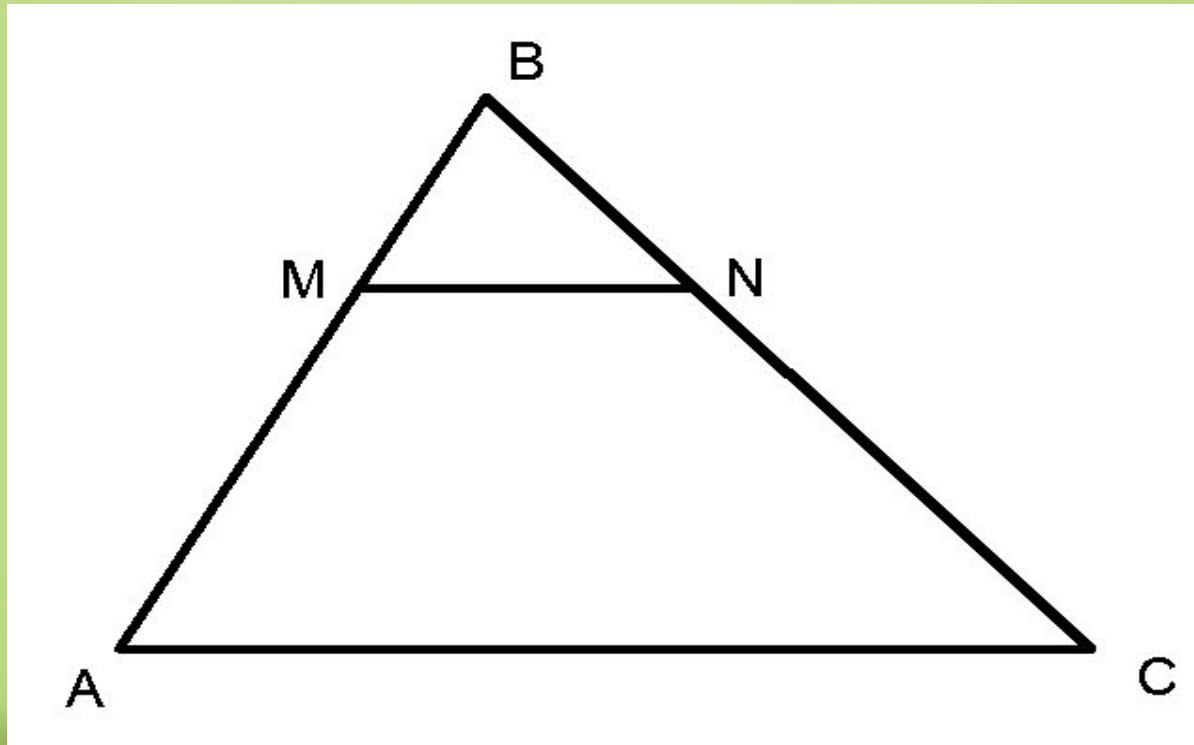
$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$



Отношение площадей подобных треугольников (фигур) равно квадрату коэффициента подобия

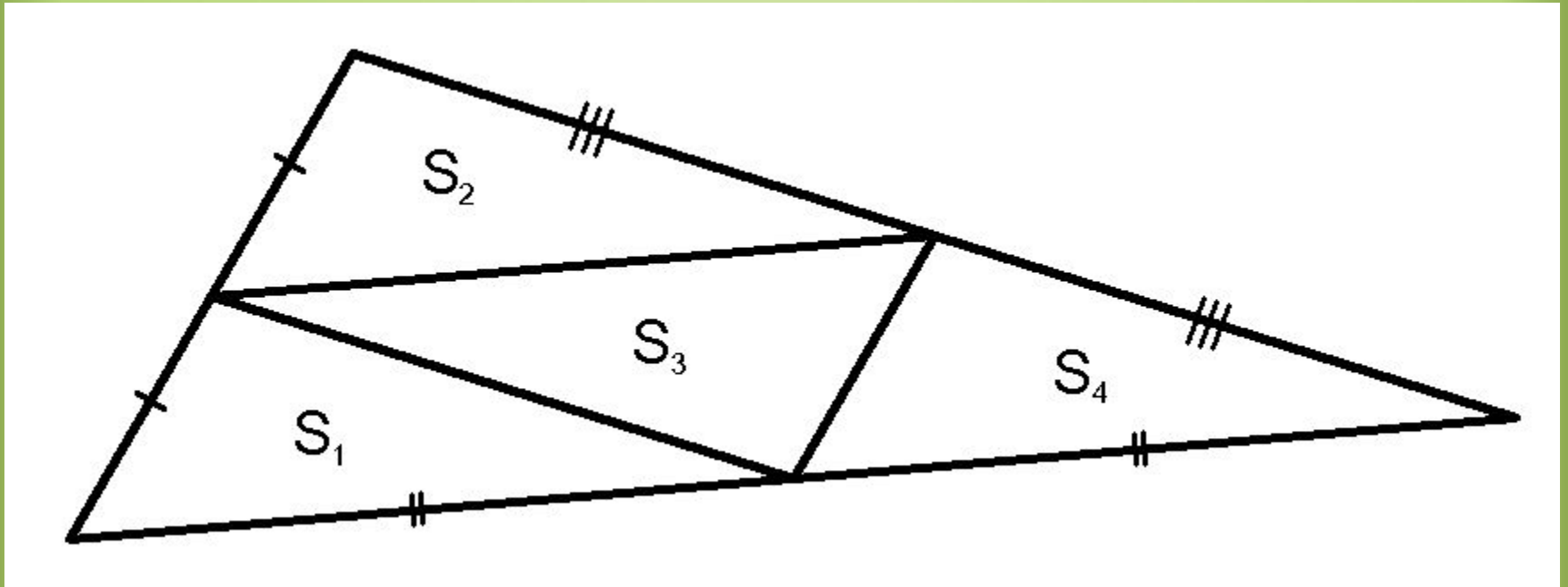
$$\triangle ABC \sim \triangle MBN$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBN}} = k^2$$



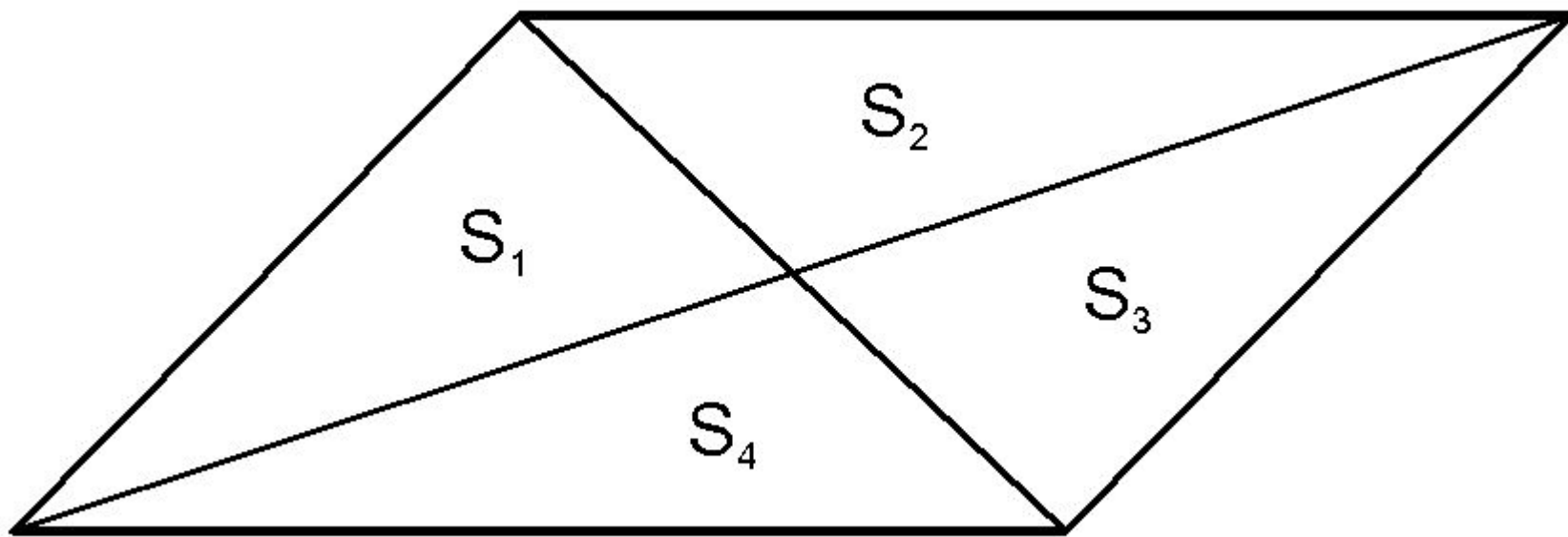
Средние линии треугольника разделяют его на четыре равных треугольника (на четыре равновеликих треугольника)

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$



Диагонали параллелограмма разбивают его на четыре треугольника с равными площадями

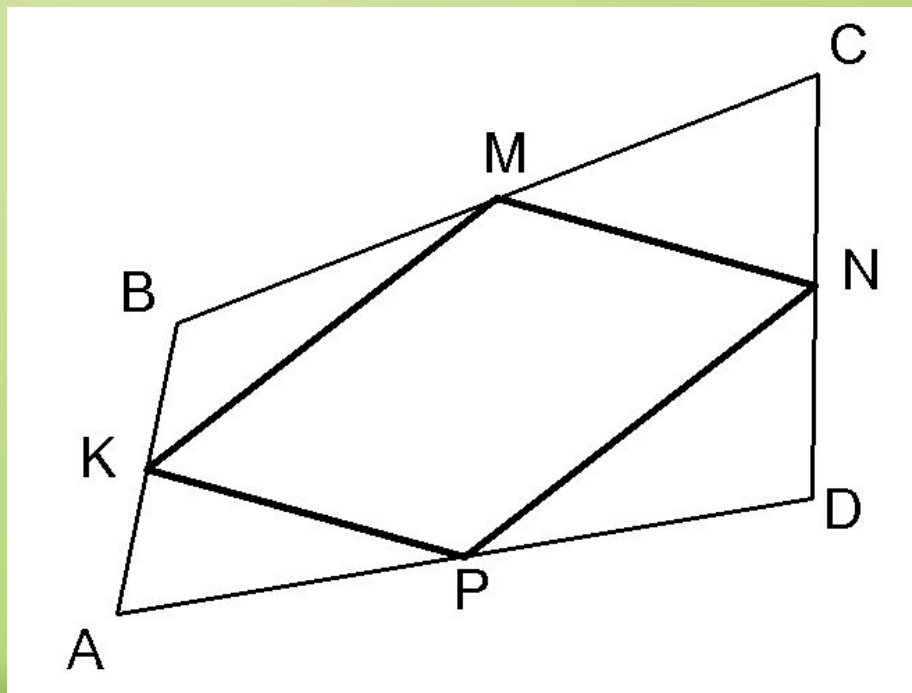
$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$



Средины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, периметр которого равен сумме диагоналей четырехугольника

$KMNP$  - параллелограмм

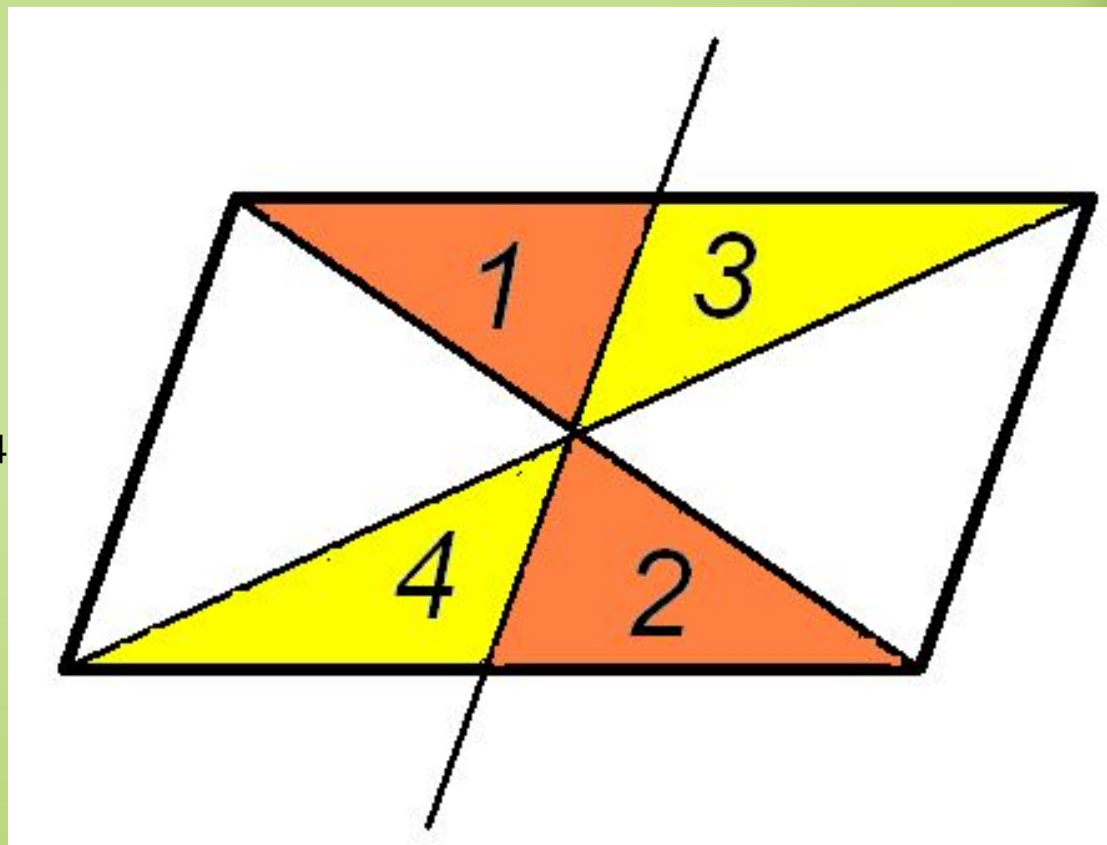
$$P_{KMNP} = AC + BD$$



Прямая, пересекающая противоположные стороны параллелограмма и проходящая через точку пересечения образует пары равных треугольников

$$\Delta_1 = \Delta_2; S_1 = S_2$$

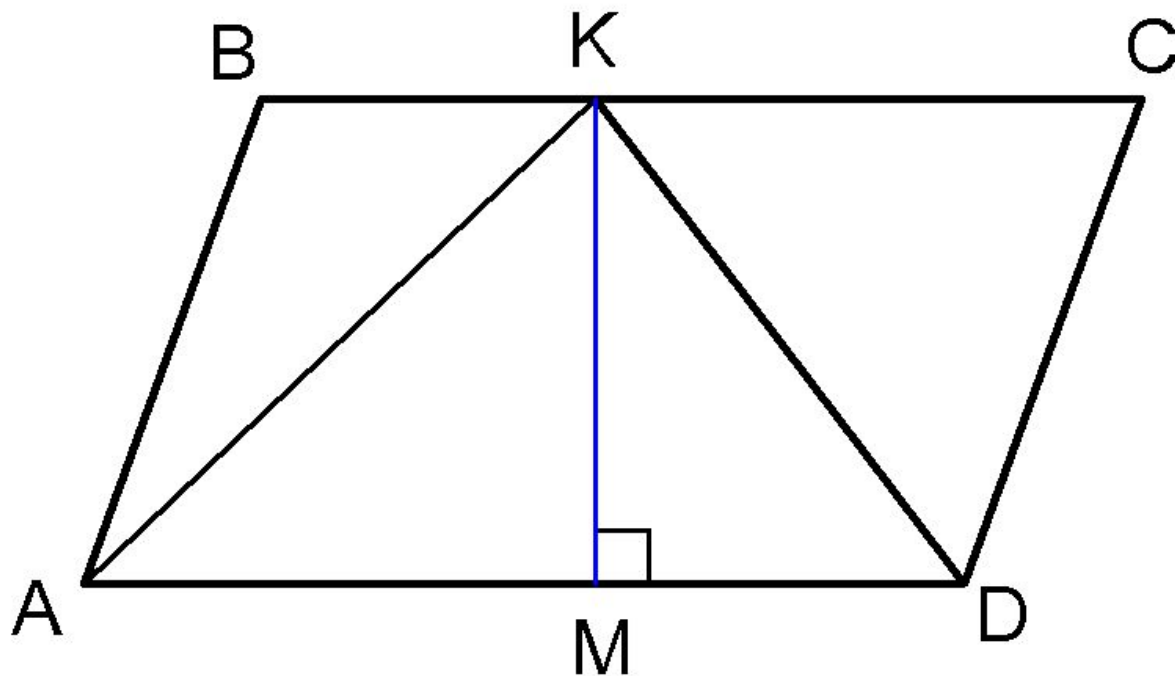
$$\Delta_3 = \Delta_4; S_3 = S_4$$



Если параллелограмм и треугольник имеют общее основание и высоту, то площадь параллелограмма **в 2 раза больше** площади треугольника

$$S_{\triangle AKD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle AKD}$$



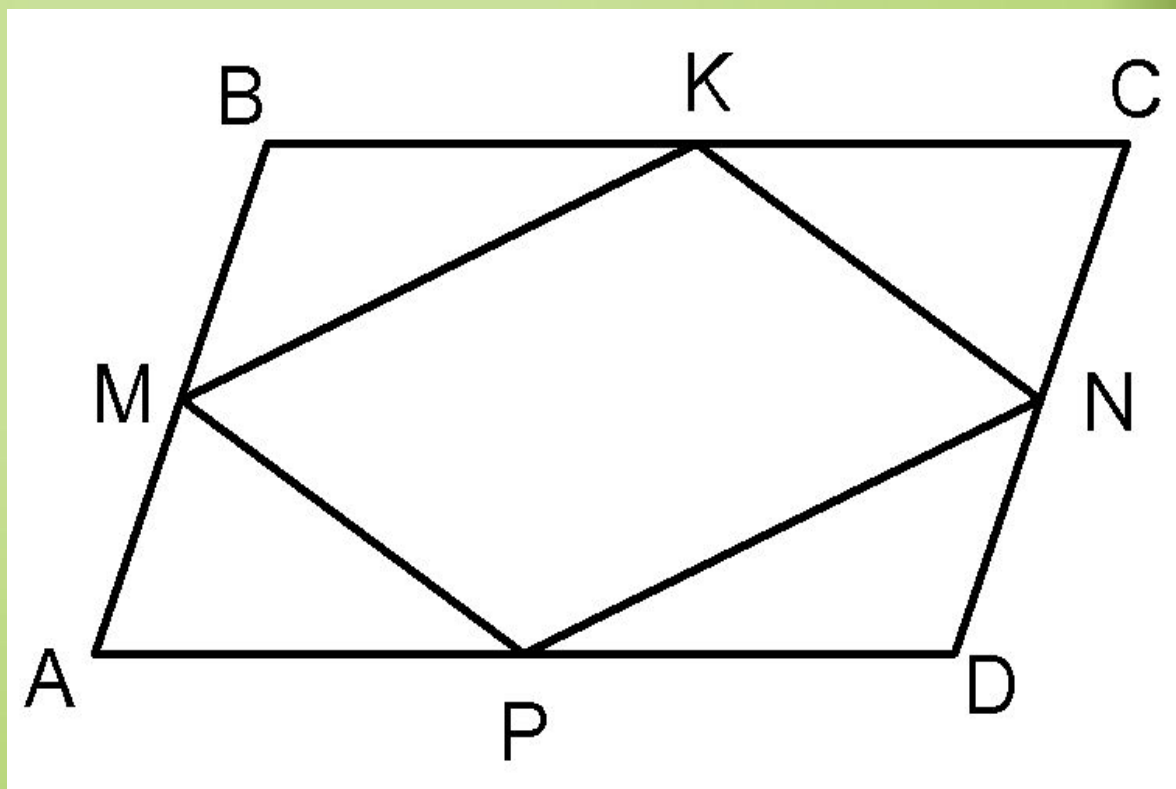
ABCD – параллелограмм

М, К, N, Р – середины сторон параллелограмма

ABCD

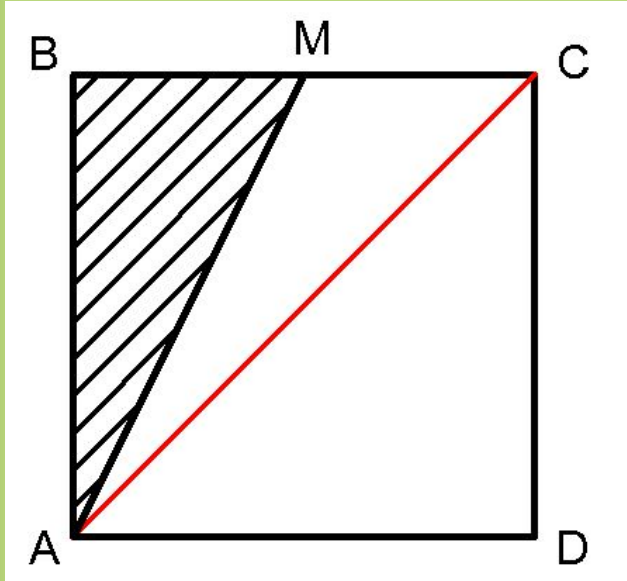
МКNP – параллелограмм

$$S_{ABCD} = 2S_{MKNP}$$





ВНО, 2010



Точка М – середина стороны квадрата ABCD. Площадь заштрихованной части равна

$7 \text{ см}^2$ . Найти площадь всего квадрата.

**Решени**

Дополнительное построение:

AC – диагональ.  $\triangle ABC$ , AM – медиана.

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC}, S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABM}$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot 2S_{\triangle ABM} = 4S_{\triangle ABM}$$

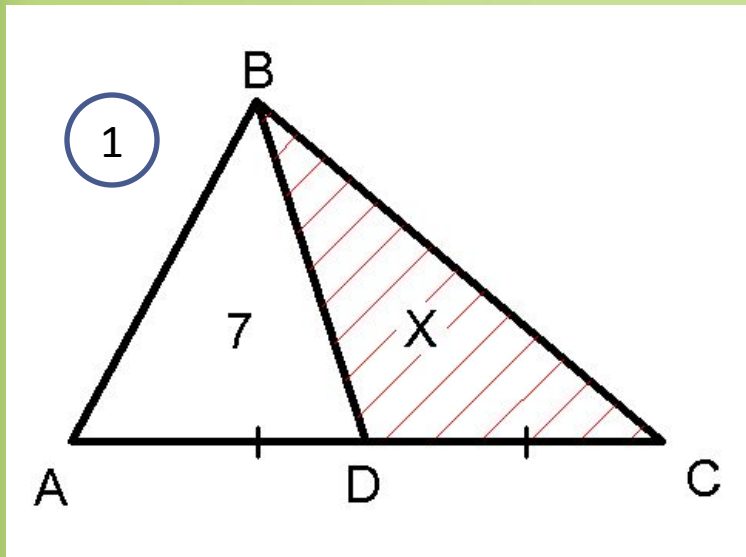
$$S_{ABCD} = 4 \cdot 7 = 28 \text{ (нї}^2 \text{)}.$$

Отве  $S_{ABCD} = 28 \text{ нї}^2$ .

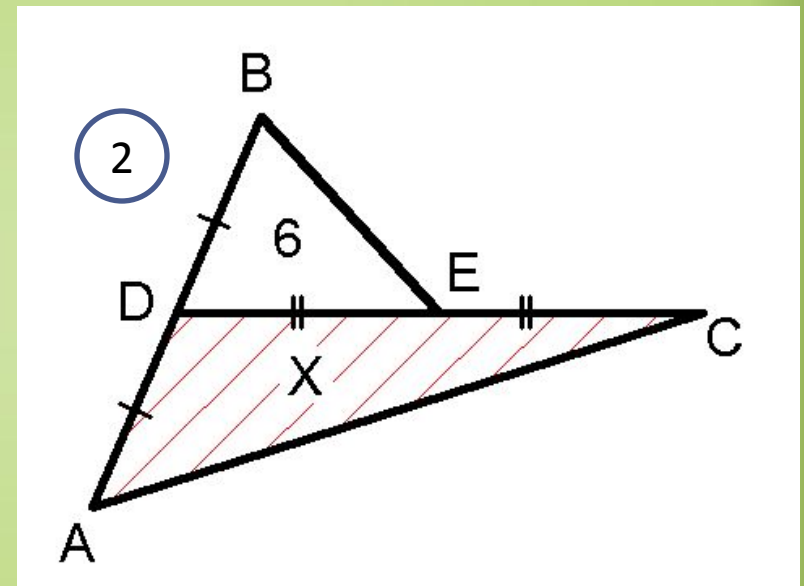
Т:

# Задачи на готовых чертежах

Найти площадь X



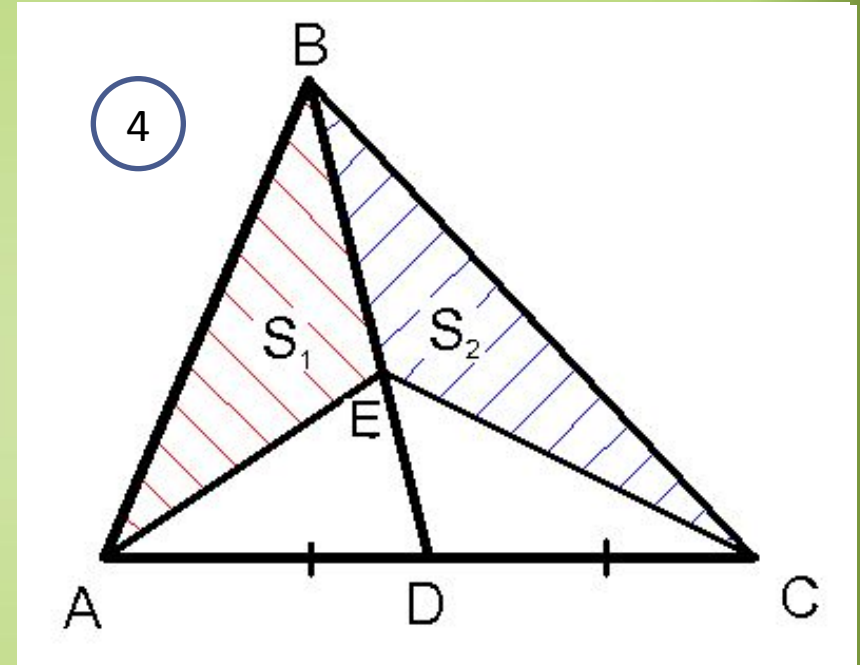
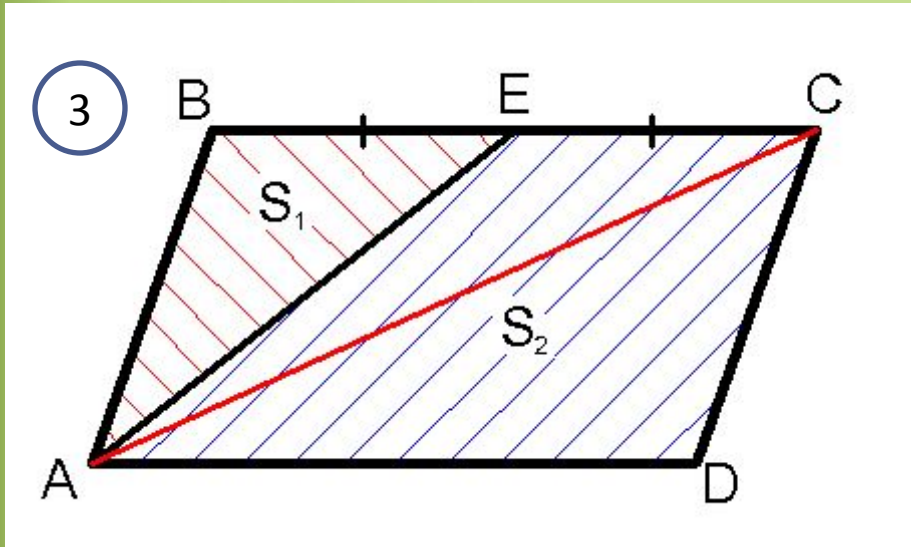
$$\tilde{O} = 7 \text{ еá.ä.ä.}$$



$$\begin{aligned} \tilde{O} &= S_{\triangle DBC} = 2S_{\triangle BDE} = \\ &= 2 \cdot 6 = 12 \text{ (еá.ä.ä.)} \end{aligned}$$

Найти отношения площадей  $S_1$  :  
 $S_2$

Дано: ABDC - параллелограмм

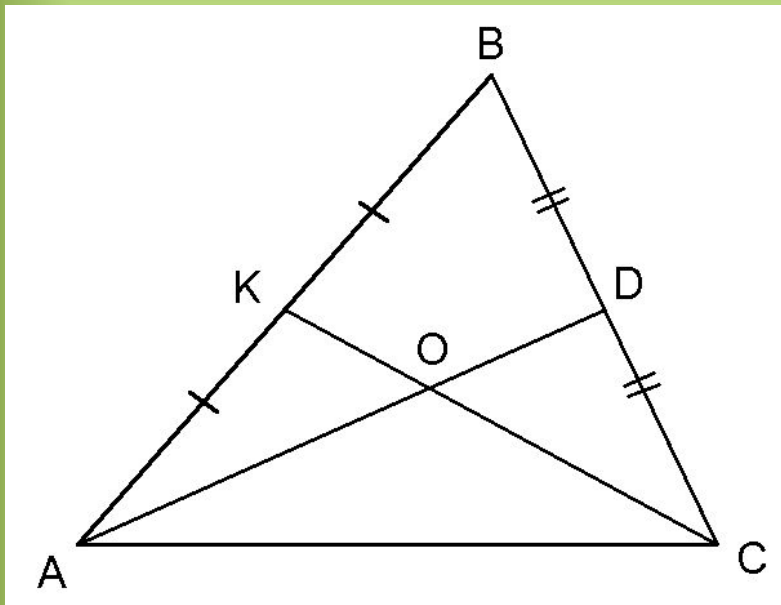


$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$$

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDC}, S_{\triangle AED} = S_{\triangle DEC}$$

$$S_1 = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AED}, S_2 = S_{\triangle BDC} - S_{\triangle DEC}$$

$$S_1 = S_2, \frac{S_1}{S_2} = 1$$



Одна из сторон треугольника равна 20 см, а медианы, проведенные к двум другим сторонам равны 18 см и 24 см. Найти площадь треугольника.

## Решени

$$1) \Delta AOC : AC = 20 \text{ нì }.$$

$$AO = \frac{2}{3} \cdot AD = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12 (\text{нì}).$$

$$NO = \frac{2}{3} \cdot NK = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16 (\text{нì}).$$

$$S_{\Delta AOC} = \sqrt{p(p-AC)(p-AO)(p-CO)}.$$

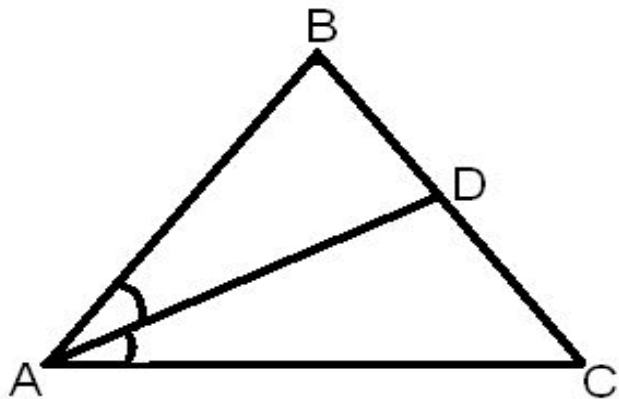
$$p = \frac{20 + 16 + 12}{2} = 24 (\text{нì}).$$

$$S_{\Delta AOC} = \sqrt{24 \cdot (24 - 20) \cdot (24 - 12) \cdot (24 - 16)} = 96 (\text{нì}^2).$$

$$2) S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta AOC} = 3 \cdot 96 = 288 (\text{нì}^2).$$

**Отве**  $S_{\Delta ABC} = 288 \text{ нì}^2.$

Т:



В равнобедренном треугольнике основание равно 66 см. Биссектриса угла при основании делит боковую сторону на отрезки 5:6, начиная от вершины. Найдите площадь частей треугольника, на которые делит его биссектриса.

Решени

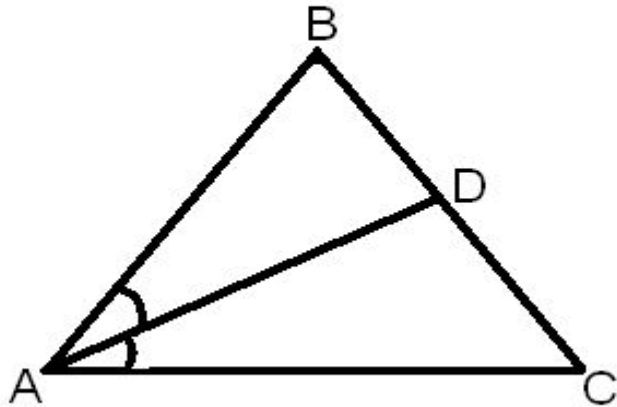
е:

1) По свойству биссектрисы  
треугольника

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}, \quad AB = BC = BD + DC = 5 + 6 = 11 \text{ (см)}$$

$$\frac{11\delta}{66} = \frac{5\delta}{6\delta}; \quad 11\delta \cdot 6 = 66 \cdot 5; \quad \delta = 5 \text{ см}$$

$$AD = BC = 11 \cdot 5 = 55 \text{ (см)}$$



2) Найдем площадь треугольника ABC по формуле Герона

$$p = \frac{55 \cdot 2 + 66}{2} = \frac{176}{2} = 88 \text{ (сì )}.$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{88 \cdot (88 - 55)(88 - 55)(88 - 66)} = \\ &= \sqrt{88 \cdot 33 \cdot 33 \cdot 22} = 33\sqrt{4 \cdot 22 \cdot 22} = \\ &= 33 \cdot 22 \cdot 2 = 1452 \text{ (ñì }^2 \text{)}. \end{aligned}$$

3) По свойству биссектрисы  
треугольника

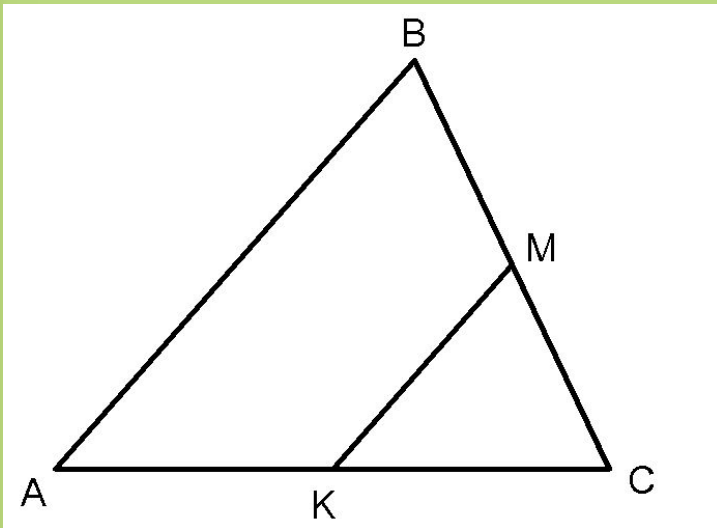
$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{5}{6}; S_{\Delta ABD} = \frac{5}{11} S_{\Delta ABC} = \frac{5 \cdot 1452}{11} = 5 \cdot 132 = 660 \text{ (ñì }^2 \text{)}.$$

$$3) S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABD} = 1452 - 660 = 792 \text{ (ñì }^2 \text{)}.$$

Отве  $S_{\Delta ABD} = 660 \text{ ñì }^2, S_{\Delta ADC} = 792 \text{ ñì }^2.$

Т:

ВНО, 2008



МК – средняя линия треугольника ABC.  
Площадь треугольника ABC равна 20 см<sup>2</sup>.  
Найдите площадь четырехугольника ABMK.

Решени

1)  $МК \parallel AB$  по свойству средней линии треугольника.

$$\triangle MKC \sim \triangle BAC,$$

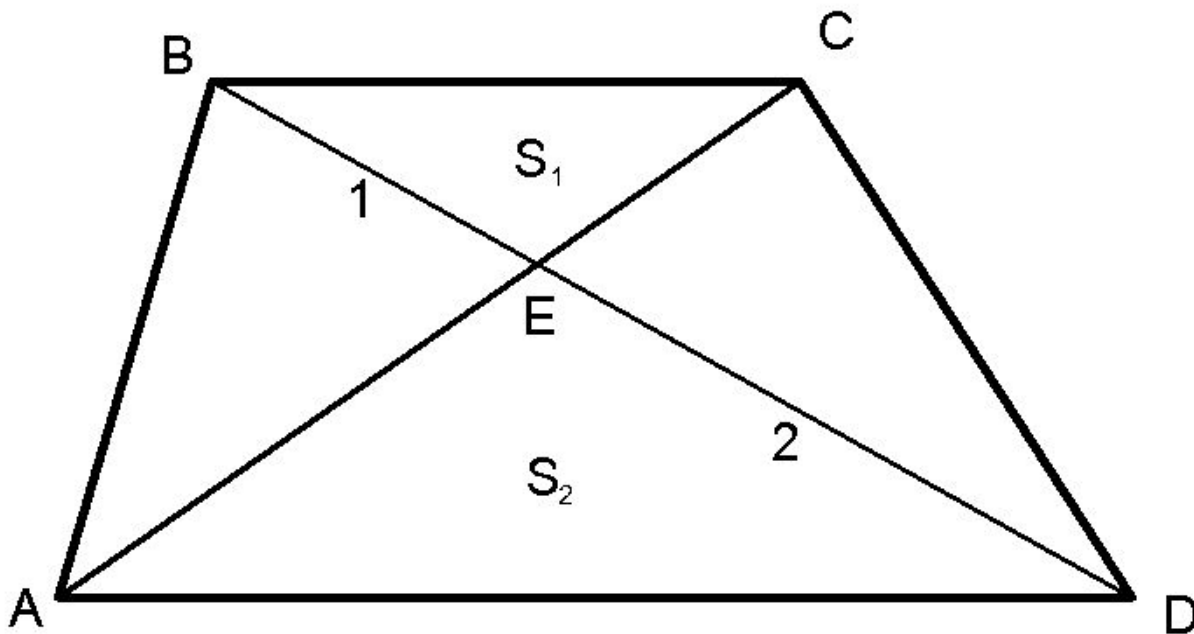
$$AB : KM = 2 = k.$$

$$S_{\triangle BAC} : S_{\triangle MKC} = k^2 = 4. \quad S_{\triangle MKC} = 20 : 4 = 5 \text{ (н\i}^2 \text{)}.$$

$$2) S_{ABMK} = S_{\triangle BAC} - S_{\triangle MKC} = 20 - 5 = 15 \text{ (н\i}^2 \text{)}.$$

Отве  $S_{ABMK} = 15 \text{ н\i}^2.$

Т:



ABCD –  
 трапеция.  
 Найти:  $S_1:S_2$ .

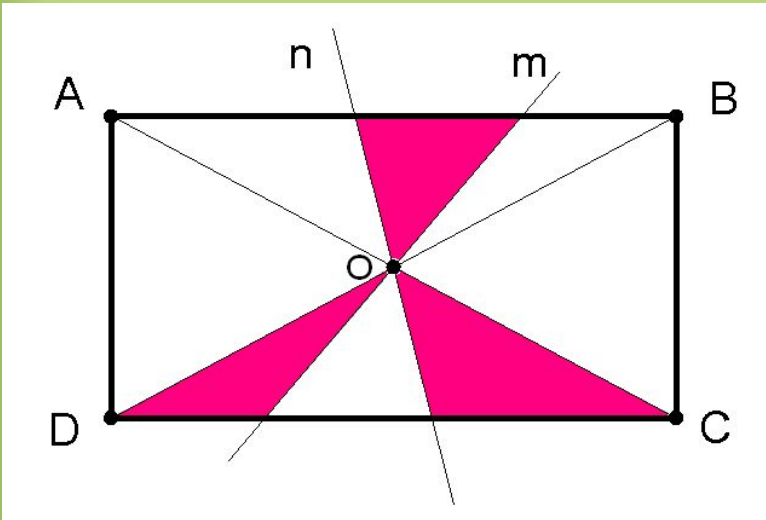
## Решени

$\triangle BEC \sim \triangle DEA$  по двум равным  
 углам.

$$k = \frac{BE}{DE} = \frac{1}{2}. \quad S_1 : S_2 = k^2 = \frac{1}{4}.$$



ВНО, 2010



В прямоугольнике ABCD прямые  $m$  и  $n$  проходят через точку пересечения диагоналей. Площадь фигуры, которая состоит из трех закрашенных треугольников, равна  $12 \text{ см}^2$ .

Вычислите площадь прямоугольника ABCD.

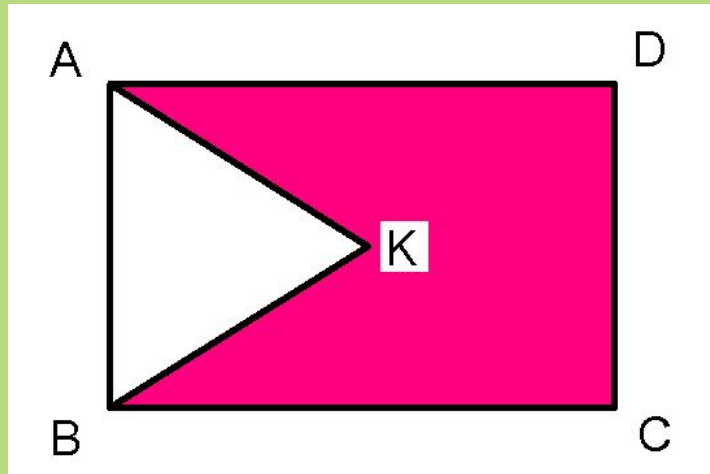
Решени

$$e: S_{\triangle AOB} = 12 \tilde{n}^2, S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle AOB} = 4 \cdot 12 = 48 (\tilde{n}^2).$$

Отве  $S_{ABCD} = 48 \tilde{n}^2$ .

Т:

ВНО, 2010



На рисунке изображен прямоугольник ABCD и равносторонний треугольник ABK, периметры которых соответственно равны 20 см и 12 см. Найдите периметр пятиугольника AKBCD.

Решени

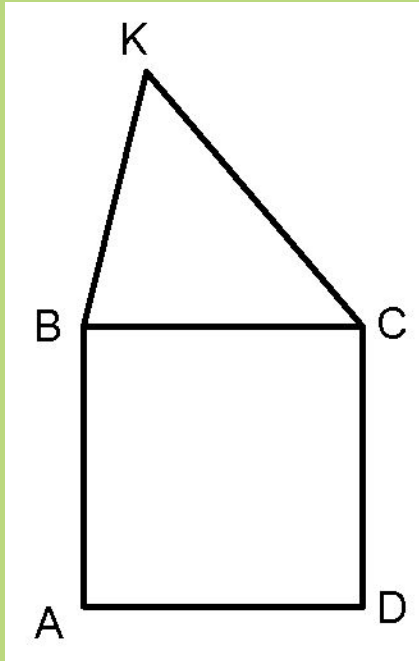
е:  
 $AB = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$  (ñì)  $\triangle ABK$  -  
равносторонний

$$P_{AKBCD} = P_{ABCD} + P_{ABK} - 2 \cdot AB = 20 + 12 - 2 \cdot 4 = 24 \text{ (ñì)}.$$

Отве  $P_{AKBCD} = 24 \text{ ñì}$  .

Т:

ВНО, 2010



На рисунке изображен квадрат ABCD и треугольник BKC, периметры которых соответственно равны 24 см и 20 см. Найдите периметр пятиугольника ABKCD.

Решени

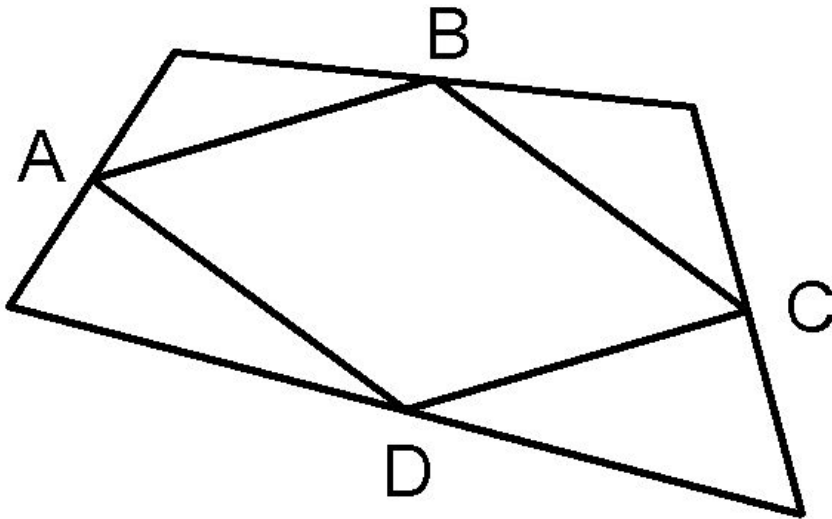
е:  $B\tilde{N} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$  (  $\tilde{n}\grave{i}$  ), ABCD – квадрат

$$P_{ABKCD} = P_{ABCD} + P_{BKN} - 2 \cdot B\tilde{N} = 24 + 20 - 2 \cdot 6 = 32(\tilde{n}\grave{i}).$$

Отве  $P_{ABKCD} = 32 \tilde{n}\grave{i}$ .

Т:

ВНО, 2009



В четырехугольнике диагонали равны 8 см и 5 см. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.

Решени

е:  
ABCD –

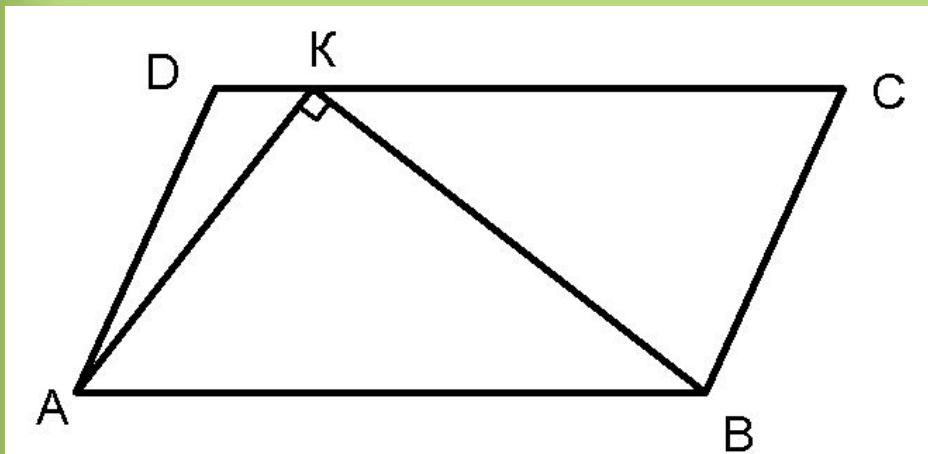
параллелограмм

$$P_{ABCD} = 8 + 5 = 13 \text{ (нì )}.$$

Отве  $P_{ABCD} = 13 \text{ нì} .$

T:

ВНО, 2008



Точка К лежит на стороне DC параллелограмма ABCD. Известно, что угол АКВ прямой, АК = 8 см, KB = 5 см. Найдите площадь параллелограмма.

Решени

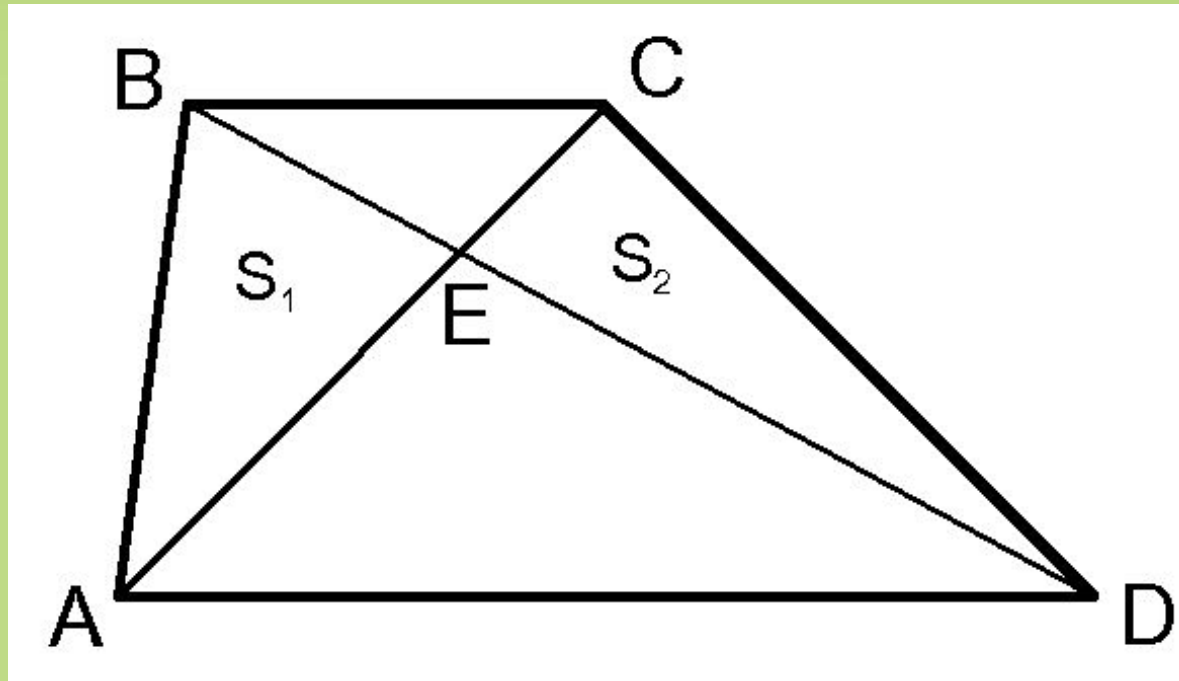
е:

$$S_{\Delta AKB} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot KB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20 (\tilde{n}i^2).$$

$$S_{AB\tilde{N}\hat{A}} = 2 \cdot S_{\Delta AKB} = 2 \cdot 20 = 40 (\tilde{n}i^2).$$

Отве  $S_{ABCD} = 40 \tilde{n}i^2.$

Т:



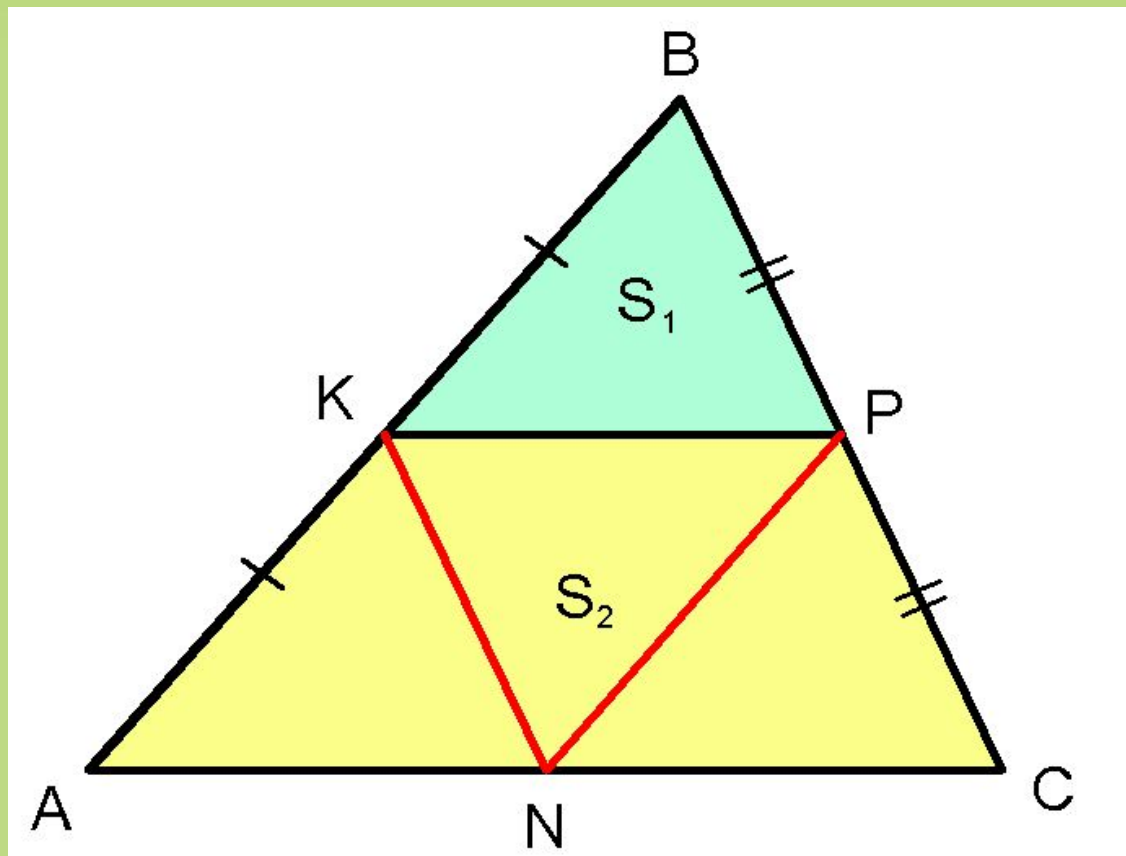
Дано: ABCD – трапеция  
 Найти:  $S_1 : S_2$ .  
 Решение:  $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$   
 как площади  
 треугольников с общим  
 основанием AD и высотой  
 h.

$$S_1 = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AED}$$

$$S_2 = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AED}$$

$$S_1 = S_2, \text{ следовательно,}$$

$$S_1 : S_2 = 1.$$



Найти:  $S_1:S_2$ .

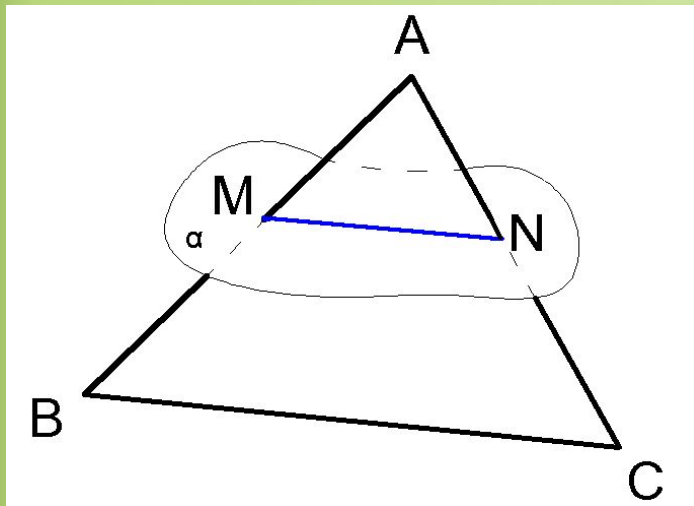
Решение: дополнительные построения KN, NP –  
средние линии треугольника, следовательно:  $S_1:S_2=1:3$ .

№256 Геометрия, 10 класс, Бевз Г.П. и

др,

профильный уровень

В треугольнике ABC через точку M – середину стороны AB – проведена плоскость  $\alpha$ ,  $\alpha \parallel BC$ ,  $\alpha \cap AC = N$ . Найдите: а) BC, если  $MN = a$ ; б)  $S_{BMNC} : S_{MAN}$ .



1)  $\alpha \cap (ABC) = MN, BC \subset (ABC), BC \not\subset \alpha,$

$BC \parallel MN;$

2)  $\triangle ABC, MN$  – средняя линия,

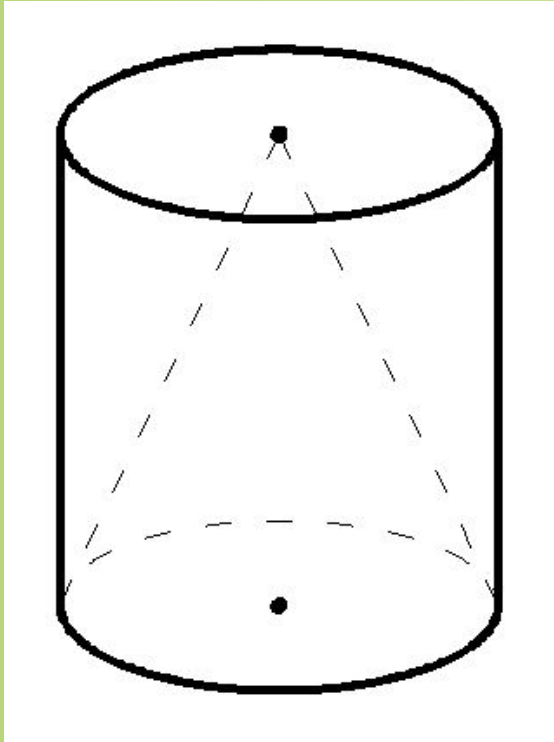
$$MN = \frac{1}{2} BC, BC = 2MN = 2a;$$

3)  $S_{BMNC} : S_{MAN} = 3 : 1.$



ВНО, 2010

Из цилиндра выточен конус так, что его основание совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина с центром другого основания цилиндра. Найдите отношение объема сточенной части цилиндра к объему конуса.



Решени

е:

$$V_{\text{сточенной}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{цилиндра}}$$

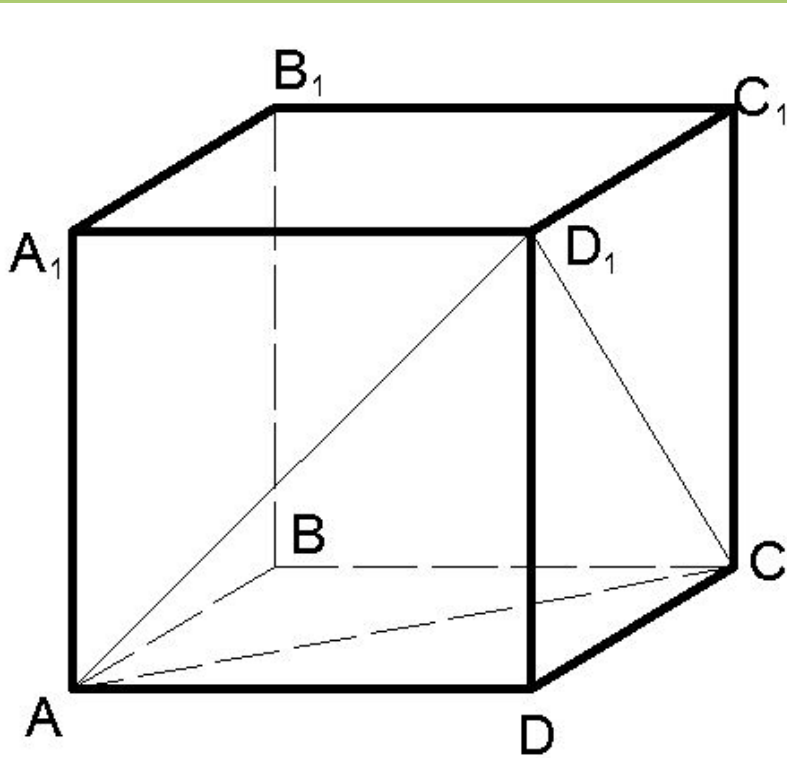
$V' - \text{объем сточенной части} = \text{объем цилиндра} - \text{объем конуса}$

$$V' = V_{\text{цилиндра}} - V_{\text{конуса}} = \frac{2}{3} V_{\text{цилиндра}}$$

$$V' : V_{\text{конуса}} = \frac{2}{3} V_{\text{цилиндра}} : \frac{1}{3} V_{\text{цилиндра}} = 2 : 1$$

ВНО, 2010

Объем куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен  $216 \text{ см}^3$ . Найдите объем пирамиды  $D_1 ACD$ .



Решени

$$V_{ACDA_1C_1D_1} = 3 \cdot V_{D_1ACD};$$

$$V_{\text{куба}} = 2V_{ACDA_1C_1D_1};$$

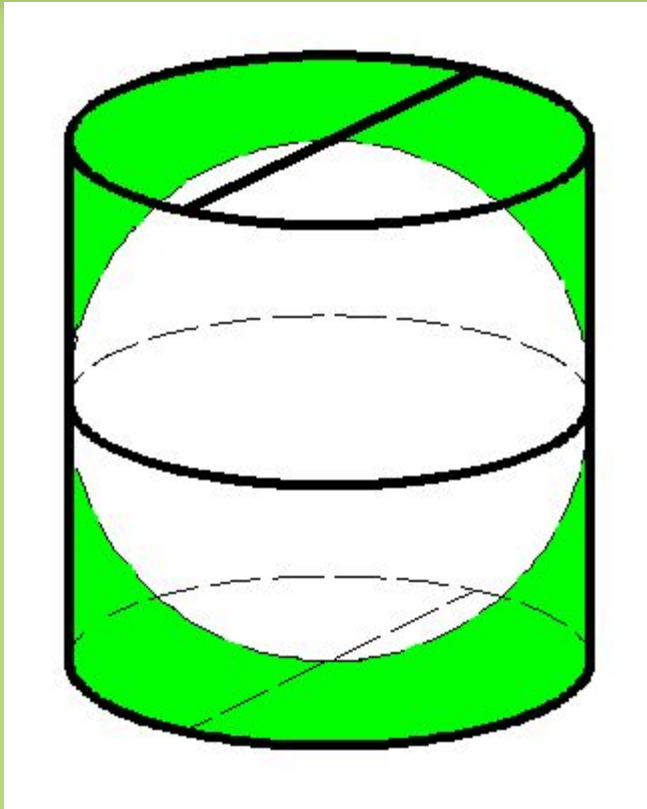
$$V_{\text{куба}} = 6V_{D_1ACD};$$

$$V_{D_1ACD} = \frac{1}{6} V_{\text{куба}}; \quad V_{D_1ACD} = \frac{1}{6} \cdot 216 = 36 \text{ (см}^3 \text{)}.$$

Отве  $V_{D_1ACD} = 36 \text{ см}^3$ .

Т:

ВНО, 2008



В сосуд цилиндрической формы, наполненный водой доверху, положили металлический шар, который касается дна и стенок. Определите отношение объема воды, которая осталась в сосуде, к объему воды, которая вылилась.

Решение:

$V_1$  – объем воды, которая осталась;

$V_2$  – объем вылившейся воды.

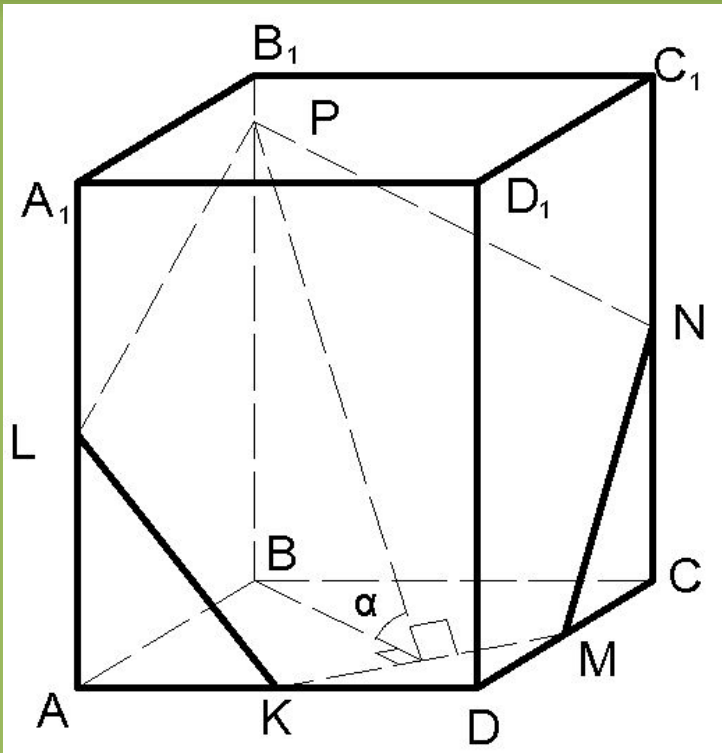
$$V_1 = V_{\text{общ}} - V_{\text{шар}}.$$

$$V_2 = V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_1 = \pi R^2 \cdot 2R - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3;$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

№16. П. 19 Многогранники. Геометрия,  
Погорелов А.В.



В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом  $\alpha$ . Сторона основания равна  $a$ . Найдите площадь полученного сечения.

Решение: ортогональной проекцией сечения KMNPL на плоскость основания является пятиугольник ABCMK.

$$S_{ABCMK} = S_{ABCD} - S_{\Delta KDM} = a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{7}{8}a^2.$$

$$S_{\text{н.с.}} = \frac{S_{ABCMK}}{\cos \alpha} = \frac{7a^2}{8 \cos \alpha}.$$