нахождение наибольшего и наименьшего значения величин.

(задания для учащихся 8-9 классов, углубленное изучение математики)

Чупрова О.С.
Комсомольск-на-Амуре
МБОУ лицей №1
2012 год

Алгоритм изучения темы

- Знакомство с понятиями прикладных задач математики.
- Схема решения оптимизационных задач.
- Теоремы, применяемые при решении таких задач.
- Методы решения оптимизационных задач:
  - применение некоторых теорем;
  - использование свойств квадратного трехчлена;
  - применение неравенства Коши.

Знакомство с понятиями прикладных задач математики.

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений какой-либо величины, часто применяемые в практической деятельности, называются оптимизационными. Для правильного решения таких задач необходимо выполнить их переформулировку, стремясь формализировать условия, первоначально заданные в описательной форме.

Схема решения оптимизационных задач

1. **Проанализировав условие задачи, определить, наибольшее или наименьшее значение какой величины требуется найти (т.е. какую величину нужно оптимизировать).**
2. **Принять за независимую переменную одну из неизвестных величин и обозначить её буквой х. Определить её границы изменения.**
3. **Задать функцию $y=f(x)$.**
4. **Найти средствами математики наибольшее или наименьшее значение на промежутке изменения х.**
5. **Интерпретировать результат для рассматриваемой задачи.**

Пример решения оптимизационных задач.

- ***Число 36 записать в виде произведения двух натуральных чисел, сумма которых наименьшая.***

1. Пусть x – первый множитель, тогда $\frac{36}{x}$– второй множитель, где $1<x<36$.
2. Составим функцию $f(x)=x+\frac{36}{x}$.
3. Анализируя, приходим к выводу, что при x=6 составленная функция принимает наименьшее значение (6+6=12)
4. Ответ: 36=6·6

Теоремы и следствия из них для решения оптимизационных задач .

- ***Теорема 1*** **Произведение двух положительных множителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве множителей**

(если множители могут иметь равные значения). Т.е. max xy=¼ $(x + y)^2$

- ***Следствие.*** ***Произведение двух положительных сомножителей x и y, связанных соотношением mx+ny=a, где m,n-положительные числа, будет наибольшим при mx=ny=a, т.е. при x=a/m; y=a/n.***
- ***Теорема 2*** ***Сумма двух положительных слагаемых, произведение которых постоянно, имеет наименьшее значение при равенстве слагаемых.***
- ***Следствие.*** ***Если произведение xy постоянно, то mx+ny, где m,n-положительные числа, имеет наименьшее значение при mx=ny.***

Доказательство теорем

- ***Теорема 1*** Рассмотрим равенство, которое следует из формул сокращенного умножения, т.е.

xy =$\frac{1}{4}$ $((x+y)^2$- $(x-y)^2)$.(По условию x+y- постоянно). Произведение xy будет наибольшее при наименьшем значении $(x-y)^2$, т.е. при x=y. Отметим, что xy =$\frac{1}{4}$ $(x+y)^2$.

- *Теорема 2* Из тождества $(x+y)^2 = (x-y)^2$+4xy ясно, что $(x+y)^2$, а значит и x+y будет наибольшим, если x-y=0.
- Теоремы 1 и 2 могут быть обобщены на большее число слагаемых.
- ***Теорема 3 произведение нескольких переменных положительных сомножителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшее значение при равенстве сомножителей (если только множители могут принимать равные значения).***
- *Теорема 4* **Если произведение положительных сомножителей x_1, x_2,..., x_n постоянно, то их сумма будет наибольшей, если они равны между собой.**

Решение оптимизационных задач с применением доказанных теорем

- Задача №1 Найти наибольшее значение функции $y=x^3(a-x)$, если $0<x<a$.

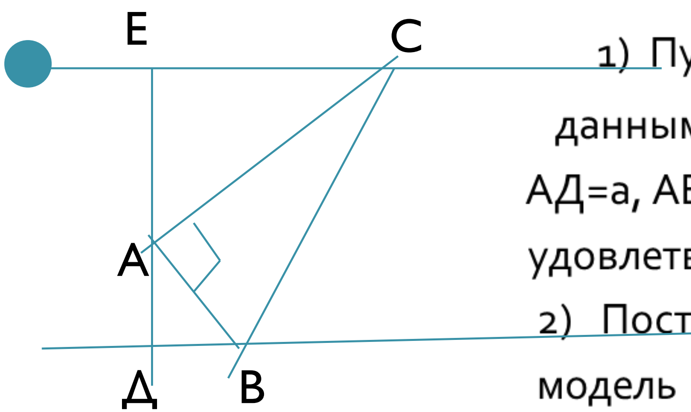
Решение

Т.к. сумма x^3+a-x не является постоянной, то перепишем функцию в виде $y = \frac{1}{3}(x \cdot x \cdot x(3a-3x))$

Функция принимает наибольшее значение в том случае, если функция $z= x \cdot x \cdot x(3a-3x)$ принимает наибольшее значение. Найдем сумму сомножителей: $x+x+x+3a-3x=3a$ – не зависит от x, поэтому является постоянной. По теореме 3 функция $z=x^3(3a-3x)$(a, значит, $y=\frac{1}{3}z$) принимает наибольшее значение в том случае, если $x=3a-3x$. Это получается при $x=\frac{a}{4}$.

Max $y=y(\frac{a}{4}) = (\frac{a^3}{4}) \cdot (a - \frac{a}{4}) = \frac{3a^4}{256}$.

Задача №2. Даны две параллельные прямые и точка А между ними, служащая вершиной прямого угла прямоугольного треугольника, у которого две другие вершины лежат на каждой из прямых. Какое положение должен занимать треугольник, чтобы его площадь была наибольшей?



1) Пусть ДЕ- перпендикуляр к данным прямым. Обозначим АД=a, АЕ=b, ЕС=x. Рассмотрим ΔABC, удовлетворяющий условию задачи.

2) Построим математическую модель задачи. Пусть ЕС=x.

Т.к. ΔABC – прямоугольный и проведен перпендикуляр, то $\angle$ECA+ $\angle$EAC=90° и $\angle$EAC+ $\angle$ВАД=90°, поэтому $\angle$ECA= $\angle$ВАД и $\angle$EAC= $\angle$АВД =>ΔЕАС≈ΔДАВ, поэтому $\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{АД}$ => $\frac{AC}{x}=\frac{AB}{a}$ => $\frac{AC^2}{x}=\frac{AC\cdot AB}{a}$

Отсюда $S_{ABC}=½AC\cdot AB=½\frac{a\cdot AC^2}{x}=\frac{a}{2x}(b^2+x^2)=\frac{a}{2}(\frac{b^2}{x}+x)$.

Т.к. a и b- постоянные, то S_{ABC} будет наибольшим, если $\frac{b^2}{x}$+x будет принимать наибольшее значение. Т.о. требуется найти такое x>0, где y= $\frac{b^2}{x}$+x принимает наибольшее значение. Т.к. $\frac{b^2}{x}\cdot x=b^2$(не зависит от x). Отсюда min S будет при x=b, т.е.ВД=a. Т.о. наибольшее значение площади будет тогда и только тогда, когда ΔЕАС и ΔДАВ равнобедренные и прямоугольные.

Теорема об использовании свойств квадратного трехчлена

- Преобразуем квадратичную функцию

$y=ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{bx}{a}) + c =$

$a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c = a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$

Отсюда следует теорема: а) если $a>0$, то функция $y=ax^2+bx+c$ при $x=-\frac{b}{2a}$ принимает наименьшее значение, равное $\frac{4ac-b^2}{4a}$;

б)если $a<0$, то функция $y=ax^2+bx+c$ при $x=-\frac{b}{2a}$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Решение задач с использованием свойств квадратного трехчлена

- ***Пример №1*** ***Найти наименьшее и наибольшее значения функции*** $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

решение

Дана не квадратичная функция. Поэтому рассмотрим более общую задачу: найти множество значений функции Т.е. переформулируем задание: «При каких у уравнение

$y=\frac{2x}{1+x^2}$ относительно x имеет решение? ".

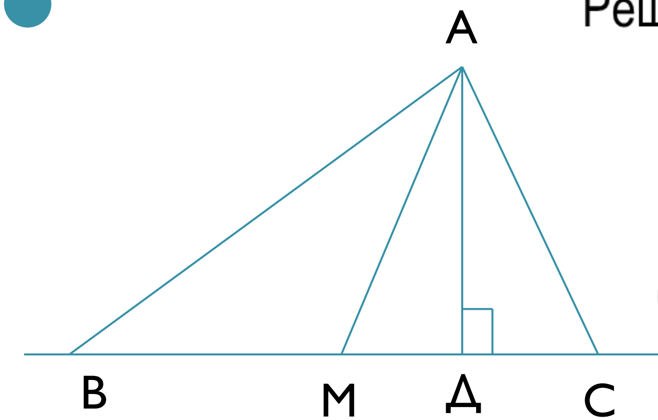
$(y=\frac{2x}{1+x^2})\Leftrightarrow(x^2y-2x+y=0)$.

У=0 только при x=0. Пусть у≠0. Квадратное уравнение

$yx^2-2x+y=0$ в этом случае имеет решение тогда и только тогда, когда $D\geq0$.

$(D\geq0)\Leftrightarrow(4-4yy\geq0)\Leftrightarrow((y^2\leq1)\Leftrightarrow(-1\leq y\leq1)$. Тогда множество значений данной функции совпадает с отрезком[-1;1]. Отсюда получаем: $\min y=y(-1)=-1$; $\max y=y(1)=1$.

Пример №2. На плоскости даны три точки А,В,С, не лежащие на одной прямой. Найти на прямой ВС такую точку М, сумма квадратов расстояний которой до А,В и С была бы наименьшей.



Решение.

Проведем $АД \perp ВС$ и введем обозначения АД=a, ВД=b, ДС=c (a, b и c считать неизвестными)

МД=x, $y=AM^2+BM^2+CM^2$, отсюда $AM^2= AД^2+MД^2=x^2+a^2$; $BM^2=(BД-MД)^2=(b-x)^2$; $MC^2=(c+x)^2$. Получили выражение для y:

$y=(a^2+x^2)+(b-x)^2+(c+x)^2=3x^2-2(b-c)x+b^2+c^2$ - это квадратичная функция. Преобразуем её: $У=3(x - \frac{(b-c)^2}{3})^2+ a^2+b^2+c^2 - \frac{(b-c)^2}{3}$.

При $x=\frac{(b-c)^2}{3}$ функция имеет наименьшее значение, равное $a^2+b^2+c^2 - \frac{(b-c)^2}{3}$.

Классическое неравенство Коши

- <u>***Теорема.***</u> Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – неотрицательные числа, то $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, при этом равенство выполняется тогда и только тогда, когда $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Частный случай: $\frac{а+в}{2} \geq \sqrt{ав}$.

Применение неравенства Коши

Из всех равновеликих треугольников найти треугольник наименьшего периметра.

Пусть x, y, z - стороны треугольника, тогда имеет место : $x+y+z=\frac{3}{4}\left(\frac{x+y+z}{3}+\frac{x+y-z}{1}+\frac{x-y+z}{1}+\frac{-x+y+z}{1}\right)$*. Каждое из выражений в скобках положительно, поэтому к числам* $\frac{x+y+z}{3};\ \frac{x+y-z}{1};\ \frac{x-y+z}{1};\ \frac{-x+y+z}{1}$ *применим неравенство Коши при n=4. Получим:*

$$x+y+z\geq 3\cdot\sqrt[4]{\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{x+y-z}{1}\cdot\frac{x-y+z}{1}\cdot\frac{-x+y+z}{1}}=$$

$$=3\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{\frac{x+y+z}{2}\cdot\frac{x+y-z}{2}\cdot\frac{x-y+z}{2}\cdot\frac{-x+y+z}{2}}=3\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}S=\sqrt{3}S$$

Отсюда следует, что наименьшее значение периметра равно $\sqrt{3S}$ ***и достигается при x=y=z.***

Решить самостоятельно.

1. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Дан периметр фигуры. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света? (ответ:$\frac{2P}{4+\pi}$; $\frac{2P}{4+\pi}$).
2. Найти наименьшее значение функции y= $\frac{x}{x^2+1}$, $x > 0$. (ответ: min y=-1/2 при x=-1).
3. Найти наименьшее значение функции y= x^2 - 6x + 5. (ответ: min y=-4 при x=3).
4. Через точку М, лежащую внутри заданного угла, проводятся различные прямые. Определить ту из прямых, которая отсекает от сторон угла треугольник наименьшей площади. (ответ: min S=-$\sqrt{(\max z)^2}$ = y(3)= -4).
5. Используя неравенство Коши, найти: а)наименьшее значение функции y=x+ $\frac{4}{x}$, где x>0; б) наибольшее значение функции
6. y= $\frac{2x}{1+x^2}$(*ответ: а) при* $x=2$ min y=4 ; б) max y=1 при x=1)

Используемая литература.

- И.Я. Виленкин и др. Алгебра и математический анализ для 9 класса. М. Просвещение. 1983.
- В.В. Мельников и др. Начала анализа. М. Наука. 1990.
- Н.И. Зильберберг. Алгебра и начала анализа в 10 классе. Для углубленного изучения математики. Псков. 1994.