

# **нахождение наибольшего и наименьшего значения величин.**

**(задания для учащихся 8-9 классов,  
углубленное изучение математики)**

**Чупрова О.С.  
Комсомольск-на-Амуре  
МБОУ лицей №1  
2012 год**



# Алгоритм изучения темы

- Знакомство с понятиями прикладных задач математики.
- Схема решения оптимизационных задач.
- Теоремы, применяемые при решении таких задач.
- Методы решения оптимизационных задач:
  - применение некоторых теорем;
  - использование свойств квадратного трехчлена;
  - применение неравенства Коши.

# **Знакомство с понятиями прикладных задач математики.**

**Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений какой-либо величины, часто применяемые в практической деятельности, называются оптимизационными. Для правильного решения таких задач необходимо выполнить их переформулировку, стремясь формализовать условия, первоначально заданные в описательной форме.**

# Схема решения оптимизационных задач

- 1. Проанализировав условие задачи, определить, наибольшее или наименьшее значение какой величины требуется найти (т.е. какую величину нужно оптимизировать).**
- 2. Принять за независимую переменную одну из неизвестных величин и обозначить её буквой  $x$ . Определить её границы изменения.**
- 3. Задать функцию  $y=f(x)$ .**
- 4. Найти средствами математики наибольшее или наименьшее значение на промежутке изменения  $x$ .**
- 5. Интерпретировать результат для рассматриваемой задачи.**

# Пример решения

## ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ.

● Число 36 записать в виде произведения двух натуральных чисел, сумма которых наименьшая.

1. Пусть  $x$  – первый множитель, тогда  $\frac{36}{x}$  – второй множитель, где  $1 < x < 36$ .
2. Составим функцию  $f(x) = x + \frac{36}{x}$ .
3. Анализируя, приходим к выводу, что при  $x=6$  составленная функция принимает наименьшее значение ( $6+6=12$ )
4. Ответ:  $36=6 \cdot 6$

# Теоремы и следствия из них для решения оптимизационных задач .

- **Теорема 1** Произведение двух положительных множителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве множителей (если множители могут иметь равные значения). Т.е.  $\max xy = \frac{1}{4} (x + y)^2$
- **Следствие.** Произведение двух положительных сомножителей  $x$  и  $y$ , связанных соотношением  $mx + ny = a$ , где  $m, n$ -положительные числа, будет наибольшим при  $mx = ny = a$ , т.е. при  $x = a/m$ ;  $y = a/n$ .
- **Теорема 2** Сумма двух положительных слагаемых, произведение которых постоянно, имеет наименьшее значение при равенстве слагаемых.
- **Следствие.** Если произведение  $xy$  постоянно, то  $mx + ny$ , где  $m, n$ -положительные числа, имеет наименьшее значение при  $mx = ny$ .

# Доказательство теорем

- **Теорема 1** Рассмотрим равенство, которое следует из формул сокращенного умножения, т.е.

$xy = \frac{1}{4} ((x + y)^2 - (x - y)^2)$ . (По условию  $x+y$  - постоянно). Произведение  $xy$  будет наибольшее при наименьшем значении  $(x - y)^2$ , т.е. при  $x=y$ . Отметим, что

$$xy = \frac{1}{4} (x + y)^2.$$

- **Теорема 2** Из тождества  $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$  ясно, что  $(x + y)^2$ , а значит и  $x+y$  будет наибольшим, если  $x-y=0$ .
- Теоремы 1 и 2 могут быть обобщены на большее число слагаемых.
- **Теорема 3** *произведение нескольких переменных положительных сомножителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшее значение при равенстве сомножителей (если только множители могут принимать равные значения).*
- **Теорема 4** Если произведение положительных сомножителей  $x_1, x_2, \dots, x_n$  постоянно, то их сумма будет наибольшей, если они равны между собой.

# Решение оптимизационных задач с применением доказанных теорем

- Задача №1 Найти наибольшее значение функции  $y=x^3(a-x)$ , если  $0 < x < a$ .

Решение

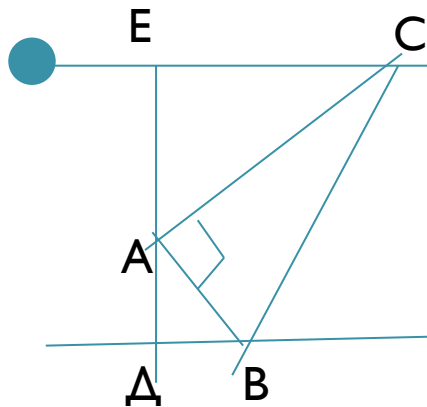
Т.к. сумма  $x^3+a-x$  не является постоянной, то перепишем функцию в виде  $y = \frac{1}{3}(x \cdot x \cdot x(3a-3x))$

Функция принимает наибольшее значение в том случае, если функция  $z = x \cdot x \cdot x(3a-3x)$  принимает наибольшее значение. Найдем сумму сомножителей:  $x+x+x+3a-3x=3a$  – не зависит от  $x$ , поэтому является постоянной. По теореме 3 функция  $z=x^3(3a-3x)$  (а, значит,  $y=\frac{1}{3}z$ ) принимает наибольшее значение в том случае, если  $x=3a-3x$ . Это получается при  $x=\frac{a}{4}$ .

$$\text{Max } y = y\left(\frac{a}{4}\right) = \left(\frac{a^3}{4}\right) \cdot \left(a - \frac{a}{4}\right) = \frac{3a^4}{256}.$$



Задача №2. Даны две параллельные прямые и точка А между ними, служащая вершиной прямого угла прямоугольного треугольника, у которого две другие вершины лежат на каждой из прямых. Какое положение должен занимать треугольник, чтобы его площадь была наибольшей?



1) Пусть DE- перпендикуляр к данным прямым. Обозначим  $AD=a$ ,  $AE=b$ ,  $EC=x$ . Рассмотрим  $\triangle ABC$ , удовлетворяющий условию задачи.

2) Построим математическую модель задачи. Пусть  $EC=x$ .

Т.к.  $\triangle ABC$  – прямоугольный и проведен перпендикуляр, то  $\angle ECA + \angle EAC = 90^\circ$  и  $\angle EAC + \angle VAD = 90^\circ$ , поэтому  $\angle ECA = \angle VAD$  и  $\angle EAC = \angle AVD \Rightarrow \triangle EAC \sim \triangle VAD$ , поэтому  $\frac{AC}{EC} = \frac{AV}{AD} \Rightarrow \frac{AC}{x} = \frac{AV}{a} \Rightarrow \frac{AC^2}{x} = \frac{AC \cdot AV}{a}$

$$\text{Отсюда } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AV = \frac{1}{2} \frac{a \cdot AC^2}{x} = \frac{a}{2x} (b^2 + x^2) = \frac{a}{2} \left( \frac{b^2}{x} + x \right).$$

Т.к.  $a$  и  $b$ - постоянные, то  $S_{ABC}$  будет наибольшим, если  $\frac{b^2}{x} + x$  будет принимать наибольшее значение. Т.о. требуется найти такое  $x > 0$ , где  $y = \frac{b^2}{x} + x$  принимает наибольшее значение. Т.к.  $\frac{b^2}{x} \cdot x = b^2$  (не зависит от  $x$ ). Отсюда  $\min S$  будет при  $x=b$ , т.е.  $VD=a$ . Т.о. наибольшее значение площади будет тогда и только тогда, когда  $\triangle EAC$  и  $\triangle VAD$  равнобедренные и прямоугольные.

# Теорема об использовании свойств квадратного трехчлена

• Преобразуем квадратичную функцию

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c =$$

$$a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Отсюда следует теорема: а) если  $a > 0$ , то функция  $y = ax^2 + bx + c$  при  $x = -\frac{b}{2a}$  принимает наименьшее значение, равное  $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ;

б) если  $a < 0$ , то функция  $y = ax^2 + bx + c$  при  $x = -\frac{b}{2a}$  принимает наибольшее значение, равное  $\frac{4ac - b^2}{4a}$ .

# Решение задач с использованием свойств квадратного трехчлена

● **Пример №1** Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y = \frac{2x}{1+x^2}$ .

решение

Дана не квадратичная функция. Поэтому рассмотрим более общую задачу: найти множество значений функции. Т.е. переформулируем задание: «При каких  $y$  уравнение

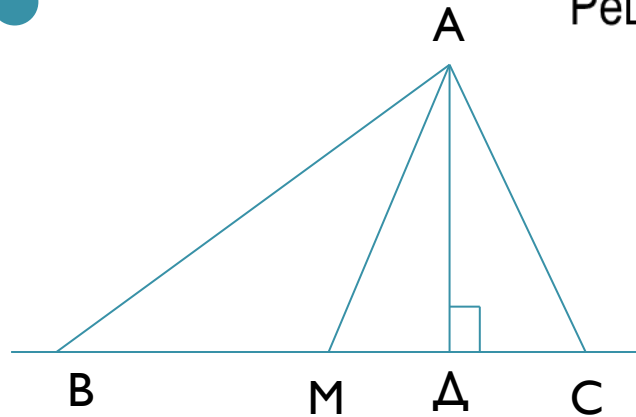
$y = \frac{2x}{1+x^2}$  относительно  $x$  имеет решение?».

$$(y = \frac{2x}{1+x^2}) \Leftrightarrow (x^2y - 2x + y = 0).$$

$y=0$  только при  $x=0$ . Пусть  $y \neq 0$ . Квадратное уравнение  $yx^2 - 2x + y = 0$  в этом случае имеет решение тогда и только тогда, когда  $D \geq 0$ .

$(D \geq 0) \Leftrightarrow (4 - 4yy \geq 0) \Leftrightarrow (y^2 \leq 1) \Leftrightarrow (-1 \leq y \leq 1)$ . Тогда множество значений данной функции совпадает с отрезком  $[-1; 1]$ . Отсюда получаем:  $\min y = y(-1) = -1$ ;  $\max y = y(1) = 1$ .

Пример №2. На плоскости даны три точки А, В, С, не лежащие на одной прямой. Найти на прямой ВС такую точку М, сумма квадратов расстояний которой до А, В и С была бы наименьшей.



Решение.

Проведем  $AD \perp BC$  и введем обозначения  $AD=a$ ,  $BD=b$ ,  $DC=c$  ( $a$ ,  $b$  и  $c$  считать неизвестными)

$$MD=x, y=AM^2+BM^2+CM^2,$$

$$\text{отсюда } AM^2=AD^2+MD^2=x^2+a^2; BM^2=(BD-MD)^2=(b-x)^2;$$

$MC^2=(c+x)^2$ . Получили выражение для  $y$ :

$$y=(a^2+x^2)+(b-x)^2+(c+x)^2=3x^2-2(b-c)x+b^2+c^2 - \text{это квадратичная функция. Преобразуем её: } Y=3\left(x - \frac{(b-c)^2}{3}\right)^2 + a^2+b^2+c^2 - \frac{(b-c)^2}{3}.$$

При  $x = \frac{(b-c)^2}{3}$  функция имеет наименьшее значение,

$$\text{равное } a^2+b^2+c^2 - \frac{(b-c)^2}{3}.$$

# Классическое неравенство Коши

- **Теорема.** Если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — неотрицательные числа, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$
 при

этом равенство выполняется тогда и только тогда, когда  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Частный случай:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

# Применение неравенства Коши

Из всех равновеликих треугольников найти треугольник наименьшего периметра.

Пусть  $x, y, z$  - стороны треугольника, тогда имеет место:  $x+y+z = \frac{3}{4} \left( \frac{x+y+z}{3} + \frac{x+y-z}{1} + \frac{x-y+z}{1} + \frac{-x+y+z}{1} \right)$ . Каждое из выражений в скобках положительно, поэтому к числам  $\frac{x+y+z}{3}; \frac{x+y-z}{1}; \frac{x-y+z}{1}; \frac{-x+y+z}{1}$  применим неравенство Коши при  $n=4$ . Получим:

$$\begin{aligned} x+y+z &\geq 3 \cdot \sqrt[4]{\frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{x+y-z}{1} \cdot \frac{x-y+z}{1} \cdot \frac{-x+y+z}{1}} = \\ &= 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\frac{x+y+z}{2} \cdot \frac{x+y-z}{2} \cdot \frac{x-y+z}{2} \cdot \frac{-x+y+z}{2}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} S = \sqrt{3} S \end{aligned}$$

Отсюда следует, что наименьшее значение периметра равно  $\sqrt{3}S$  и достигается при  $x=y=z$ .

# Решить самостоятельно.

1. Окно имеет форму прямоугольника, завершеного полукругом. Дан периметр фигуры. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света? (ответ:  $\frac{2P}{4+\pi}$  ;  $\frac{2P}{4+\pi}$ ).
2. Найти наименьшее значение функции  $y = \frac{x}{x^2+1}$ ,  $x > 0$ . (ответ:  $\min y = -1/2$  при  $x = -1$ ).
3. Найти наименьшее значение функции  $y = x^2 - 6x + 5$ . (ответ:  $\min y = -4$  при  $x = 3$ ).
4. Через точку  $M$ , лежащую внутри заданного угла, проводятся различные прямые. Определить ту из прямых, которая отсекает от сторон угла треугольник наименьшей площади. (ответ:  $\min S = -\sqrt{(\max z)^2} = y(3) = -4$ ).
5. Используя неравенство Коши, найти: а) наименьшее значение функции  $y = x + \frac{4}{x}$ , где  $x > 0$ ; б) наибольшее значение функции
6.  $y = \frac{2x}{1+x^2}$  (ответ: а) при  $x = 2$   $\min y = 4$  ; б)  $\max y = 1$  при  $x = 1$ )

## Используемая литература.

- И.Я. Виленкин и др. Алгебра и математический анализ для 9 класса. М. Просвещение. 1983.
- В.В. Мельников и др. Начала анализа. М. Наука. 1990.
- Н.И. Зильберберг. Алгебра и начала анализа в 10 классе. Для углубленного изучения математики. Псков. 1994.