Квадратные уравнения

Квадратное уравнение

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c – числа, $a \neq 0$, x – неизвестное.

$$3x^2 - 2x + 7 = 0; \quad -3{,}8x^2 + 67 = 0;$$

$$18x^2 = 0 .$$

Квадратное уравнение называют еще ***уравнением второй степени с одним неизвестным***.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Коэффициенты квадратного уравнения

Числа ***a***, ***b*** и ***c*** называют ***коэффициентами*** квадратного уравнения.

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

старший коэффициент *второй коэффициент* *свободный член*

$$3x^2 + 4x - 8 = 0,$$

старший коэффициент *второй коэффициент* *свободный член*

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Неполное квадратное уравнение

Квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов ***b*** или ***c*** равен нулю, называется ***неполным***.

$$-11x^2 = 0;$$

$$5x^2 + 13x = 0;$$

$$-24x^2 + 1 = 0.$$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"

ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Виды неполных квадратных уравнений и их корни

1. $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$.

Тогда $x^2 = -\frac{c}{a}$

Если $\boxed{\frac{c}{a} < 0}$, то корни

$$\boxed{x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}}$$

Если $\boxed{\frac{c}{a} > 0}$,

то $\boxed{\text{корней нет}}$.

а) $3x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ или $x = \frac{1}{3}$.

б) $-x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow$ нет корней.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Виды неполных квадратных уравнений и их корни

2. $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$.

Тогда $x \cdot (ax + b) = 0$. Корни: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$

а) $2x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x + 7) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ или $2x + 7 = 0$, т.е. $x = -\frac{7}{2}$.

Ответ: 0 и $-3,5$.

б) $-x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow -x \cdot (x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 5$.

Ответ: 0 и 5.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Виды неполных квадратных уравнений и их корни

3. $ax^2 = 0$

Имеем единственный корень $\boxed{x = 0}$.

$128x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$-3{,}8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Метод выделения полного квадрата

Решить уравнение $x^2 + 14x + 24 = 0$.

Решение.

$$x^2 + 14x + 24 = (x^2 + 14x + 49) - 49 + 24 =$$

$$= (x + 7)^2 - 25.$$

$$(x + 7)^2 - 25 = 0,$$

$$(x + 7)^2 = 25.$$

$$x + 7 = -5 \text{ или } x + 7 = 5.$$

$$x_1 = -12; \quad x_2 = -2.$$

Ответ: $-12; \ -2$.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Формула корней квадратного уравнения

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно найти по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac \text{ -}$$

дискриминант квадратного уравнения.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Формула корней квадратного уравнения

Возможны 3 случая:

1. $D > 0$.

Тогда уравнение имеет *2 различных* корня:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0.$$

$$a = 2,\ b = 7,\ c = -4.$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 81 > 0,$$

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -4, \qquad x_2 = \frac{-7+\sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Формула корней квадратного уравнения

2. $D = 0$.

Тогда уравнение имеет ***единственный*** корень:

$$x = \frac{b}{2a}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$x = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Формула корней квадратного уравнения

3. $D < 0$.

Тогда уравнение ***не имеет*** корней,

т. к. не существует $\sqrt{D}$.

$$3x^2 - x + 7 = 0.$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -83 < 0,$$

значит корней нет.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"

ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Если $b = 2k$, то корни уравнения

$ax^2 + 2kx + c = 0$ находятся по формуле

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{2a}$$

где $$D_1 = \frac{d}{4} = k^2 \div ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"

ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Решить уравнение

1. $x^2 + 18x + 32 = 0$.

$a = 1$; $b = 18 \Longrightarrow k = b : 2 = 9$; $c = 32$.

$D_1 = D : 4 = (18 : 2) - 1 \cdot 32 = 49 > 0$,

значит уравнение имеет 2 корня:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{49}}{1} = -16, \quad x_2 = -9 + 7 = -2.$$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Решить уравнения

2. $3x^2 + 2x + 1 = 0$.

$a = 3$; $b = 2 \Longleftrightarrow k = b : 2 = 1$; $c = 1$.

$D_1 = D : 4 = 1^2 - 1 \cdot 3 = -2 < 0$,

значит корней нет.

3. $196x^2 - 28x + 1 = 0$.

$a = 196$; $b = -28 \Longleftrightarrow k = b : 2 = -14$; $c = 1$.

$D_1 = D : 4 = (-14)^2 - 196 = 0$,

значит уравнение имеет 1 корень $x = \frac{14}{196} = \frac{1}{14}$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Приведенное квадратное уравнение

Приведенное квадратное уравнение – это уравнение вида $x^2 + px + q = 0$.

$$x^2 + 14x + 24 = 0.$$

Для каждого квадратного уравнения можно записать равносильное ему приведенное уравнение, разделив обе части квадратного на старший коэффициент.

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 0{,}6x - 0{,}4 = 0.$$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Формула корней приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

$$p = -1,\ q = -6,$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2},$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3.$$

Теорема Виета

Теорема. Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

← *формулы Виета*

$x_1 = -1$; $x_2 = 3$ – корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$p = -2$, $q = -3$.

$x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2 = -p$,

$x_1 \cdot x_2 = -1 \cdot 3 = q$.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Теорема Виета для квадратного уравнения общего вида

Теорема. Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 2$ – корни уравнения $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3{,}5, \\ x_1 \cdot x_2 = 3. \end{cases}$$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Теорема, обратная теореме Виета

Теорема. Если числа x_1, x_2, p и q связаны условиями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

то x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Составим квадратное уравнение по его корням

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \quad \text{и} \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

$$-p = x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow p = -4;$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1.$$

Искомое уравнение имеет вид $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Квадратный трехчлен

Квадратным трехчленом называется многочлен вида $a x^2 + bx + c$,

где a, b, c – числа, $a \neq 0$, x – переменная.

$3x^2 - 2x + 7$;

Корни квадратного трехчлена $a x^2 + bx + c$ – это корни уравнения $a x^2 + bx + c = 0$.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"

ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Теорема. Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Разложить на множители $12x^2 - 5x - 2$.

$x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{2}{3}$ – корни уравнения $12x^2 - 5x - 2 = 0$.

Значит $12x^2 - 5x - 2 =$

$$= 4 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot 3\left(x - \frac{2}{3}\right) = (4x + 1)(3x - 2).$$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Неприводимый многочлен

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней, то соответствующий многочлен $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ (со старшим коэффициентом 1) называется ***неприводимым многочленом второй степени*** (так как его невозможно разложить на множители меньшей степени).

Квадратный трехчлен $5x^2 + 3x + 2$ не имеет корней.

Его невозможно разложить на множители первой степени. Можно вынести числовой коэффициент за скобки $5x^2 + 3x + 2 = 5(x^2 + 0,6x + 0,4)$.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

Схема решения:

1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
3. Решить получившееся уравнение.
4. Исключить из его корней те числа, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

$$\frac{t}{t+1} - \frac{t+2}{t-2} = 1$$

Общий знаменатель: $(t + 1)(t - 2)$.

Умножим на него обе части уравнения:

$$t(t - 2) - (t + 2)(t + 1) = 1\cdot(t + 1)(t - 2) \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 2t - t^2 - 3t - 2 = t^2 - t - 2 \Leftrightarrow$$

$$t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t(t + 4) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -4.$$

Ни одно из чисел не обращает в нуль общий знаменатель.

Ответ: $0; -4$.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

$$\frac{2}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-3x}=\frac{6-x}{x(x+3)}$$

Общий знаменатель: $x(x-3)(x+3)$. Тогда:

$2x-(x-3)=(6-x)(x-3) \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow$

$x_1=3$ – посторонний корень, так как при $x=3$ общий знаменатель $x(x-3)(x+3)=0$.

$x_2=5$ – корень.

Ответ: 5.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$,
где $a \neq 0$, b и c - заданные числа, называется ***биквадратным***.

$$9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$$

Заменой $x^2 = t$ сводится к квадратному уравнению.

$$9t^2 + 17t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{9} \quad \text{или} \quad t = -2 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{x^2 = \frac{1}{9}} \quad \text{или} \quad \underbrace{x^2 = -2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Нет корней

Ответ: $-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}$.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Решение уравнений методом замены неизвестного

$$x - 5\sqrt{x-7} - 13 = 0.$$

$$x - 7 - 5\sqrt{x-7} - 6 = 0.$$

$$t = \sqrt{x-7}, \quad x - 7 = t^2$$

$$t^2 - 5t - 6 = 0.$$

$t = -1$	$t = 6.$
$\sqrt{x-7} = -1$	$\sqrt{x-7} = 6.$
Нет корней	$x = 43.$

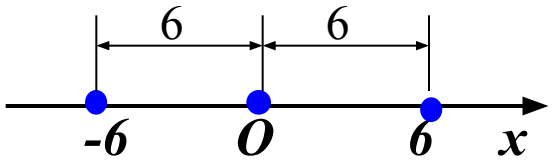
Ответ: *43*.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Модуль

Модуль числа x – это расстояние от начала отсчета до точки ***x*** на координатной прямой.

|x| = 6 означает, что расстояние от начала отсчета до точки ***x равно 6***.



$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

$$|x^2 - 2x - 39| = 24.$$

$$x^2 - 2x - 39 = 24 \qquad\qquad x^2 - 2x - 39 = -24$$

$$x_1 = 9; \quad x_2 = -7 \qquad\qquad x_3 = -3; \quad x_4 = 5.$$

Ответ: *1,6*; *1*; *-1*; *6/11*.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

$$9x^2 - \frac{x}{|x|} = 0.$$

$x > 0,$

$9x^2 - \frac{x}{x} = 0$

$x > 0,$

$9x^2 - 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$

$x < 0,$

$9x^2 - \frac{x}{-x} = 0.$

$x < 0,$

$9x^2 + 1 = 0.$

нет решений

Ответ: $\frac{1}{3}$

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"

ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

Модули двух чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа равны или противоположны.

$$|8x^2 - 4x + 1| = |3x^2 + 9x - 7|.$$

$$8x^2 - 4x + 1 = 3x^2 + 9x - 7$$

$$x_1 = 1{,}6; \quad x_2 = 1$$

$$8x^2 - 4x + 1 = -(3x^2 + 9x - 7)$$

$$x_3 = -1; \quad x_4 = 6/11.$$

Ответ: *1,6*; *1*; *-1*; *6/11*.

Филиал
"Центр информационных ресурсов и коммуникаций БГУ"
ПЕРСПЕКТИВНАЯ ШКОЛА
К ПЕРВЫМ ПРИХОДЯТ ЛУЧШИЕ