

Квадратные уравнения



Квадратное уравнение

Квадратным уравнением называется

уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a , b , c – числа, $a \neq 0$, x – неизвестное.

$$3x^2 - 2x + 7 = 0; \quad -3,8x^2 + 67 = 0;$$

$$18x^2 = 0.$$

Квадратное уравнение называют еще *уравнением второй степени с одним неизвестным*.



Коэффициенты квадратного уравнения

Числа a , b и c называют *коэффициентами* квадратного уравнения.

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

старший коэффициент *второй коэффициент* *свободный член*

$$3x^2 + 4x - 8 = 0,$$

старший коэффициент *второй коэффициент* *свободный член*

Неполное квадратное уравнение

Квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, называется *неполным*.

$$-11x^2 = 0;$$

$$5x^2 + 13x = 0;$$

$$-24x^2 + 1 = 0.$$



Виды неполных квадратных уравнений и их корни

1. $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$.

Тогда $x^2 = -\frac{c}{a}$

Если $\frac{c}{a} < 0$, то корни

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Если $\frac{c}{a} > 0$,

то **корней нет**.

а) $3x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ или $x = \frac{1}{3}$.

б) $-x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$ **нет корней**.

Виды неполных квадратных уравнений и их корни

2. $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$.

Тогда $x \cdot (ax + b) = 0$. Корни: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$

а) $2x^2 + 7x = 0 \iff x \cdot (2x + 7) = 0 \iff$
 $x = 0$ или $2x + 7 = 0$, т.е. $x = -\frac{7}{2}$

Ответ: 0 и $-3,5$.

б) $-x^2 + 5x = 0 \iff -x \cdot (x - 5) = 0 \iff x = 0$ или $x = 5$.

Ответ: 0 и 5 .

Виды неполных квадратных уравнений и их корни

3. $ax^2 = 0$

Имеем единственный корень $x = 0$.

$$128x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$
$$-3,8x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Метод выделения полного квадрата

Решить уравнение $x^2 + 14x + 24 = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned}x^2 + 14x + 24 &= (x^2 + 14x + 49) - 49 + 24 = \\ &= (x + 7)^2 - 25.\end{aligned}$$

$$(x + 7)^2 - 25 = 0,$$

$$(x + 7)^2 = 25.$$

$$x + 7 = -5 \text{ или } x + 7 = 5.$$

$$x_1 = -12; \quad x_2 = -2.$$

Ответ: $-12; -2$.



Формула корней квадратного уравнения

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$
можно найти по формуле

$$x, \text{ где } \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ -}$$

дискриминант квадратного уравнения.



Формула корней квадратного уравнения

Возможны 3 случая:

1. $D > 0$.

Тогда уравнение имеет **2 различных** корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0.$$

$$a = 2, b = 7, c = -4.$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 81 > 0,$$

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -4, \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Формула корней квадратного уравнения

2. $D = 0.$

Тогда уравнение имеет *единственный* корень:

$$x = \frac{b}{2a}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0, \quad x = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$$



Формула корней квадратного уравнения

3.

$$D < 0.$$

Тогда уравнение *не имеет* корней,
т. к. не существует \sqrt{D}

$$3x^2 - x + 7 = 0.$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -83 < 0,$$

значит корней нет.



Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Если $b = 2k$, то корни уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ находятся по формуле

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{2a}$$

где $D_1 = \frac{d}{4} = k^2 - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Решить уравнение

1. $x^2 + 18x + 32 = 0.$

$$a = 1; b = 18 \implies k = b : 2 = 9; c = 32.$$

$$D_1 = D : 4 = (18 : 2)^2 - 1 \cdot 32 = 49 > 0,$$

значит уравнение имеет 2 корня:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{49}}{1} = -16, \quad x_2 = -9 + 7 = -2.$$

Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Решить уравнения

2.

$$3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

$$a = 3; b = 2 \iff k = b : 2 = 1; c = 1.$$

$$D_1 = D : 4 = 1^2 - 1 \cdot 3 = -2 < 0,$$

значит корней нет.

3.

$$196x^2 - 28x + 1 = 0.$$

$$a = 196; b = -28 \iff k = b : 2 = -14; c = 1.$$

$$D_1 = D : 4 = (-14)^2 - 196 = 0,$$

значит уравнение имеет 1 корень $x = \frac{14}{196} = \frac{1}{14}$



Приведенное квадратное уравнение

Приведенное квадратное уравнение – это уравнение вида $x^2 + px + q = 0$.

$$x^2 + 14x + 24 = 0.$$

Для каждого квадратного уравнения можно записать равносильное ему приведенное уравнение, разделив обе части квадратного на старший коэффициент.

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \iff x^2 + 0,6x - 0,4 = 0.$$



Формула корней приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

$$p = -1, q = -6,$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2},$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3.$$



Теорема Виета

Теорема. Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

← *формулы Виета*

$x_1 = -1$; $x_2 = 3$ – корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$p = -2, \quad q = -3.$$

$$x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -1 \cdot 3 = q.$$



Теорема Виета для квадратного уравнения общего вида

Теорема. Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$x_1 = 1,5$; $x_2 = 2$ – корни уравнения $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3,5, \\ x_1 \cdot x_2 = 3. \end{cases}$$

Теорема, обратная теореме Виета

Теорема. Если числа x_1 , x_2 , p и q связаны условиями

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

то x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Составим квадратное уравнение по его корням

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \quad \text{и} \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

$$-p = x_1 + x_2 = -4 \iff p = -4;$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1.$$

Искомое уравнение имеет вид $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Квадратный трехчлен

Квадратным трехчленом называется

многочлен вида $ax^2 + bx + c$,

где a, b, c – числа, $a \neq 0$, x – переменная.

$$3x^2 - 2x + 7;$$

Корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ –

это корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.



Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Теорема. Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Разложить на множители $12x^2 - 5x - 2$.

$x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{2}{3}$ корни уравнения $12x^2 - 5x - 2 = 0$.

Значит $12x^2 - 5x - 2 =$

$$= 4 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot 3 \left(x - \frac{2}{3}\right) = (4x + 1)(3x - 2).$$



Неприводимый многочлен

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней, то соответствующий многочлен

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \text{ (с старшим коэффициентом 1)}$$

называется **неприводимым многочленом второй степени** (так как его невозможно разложить на множители меньшей степени).

Квадратный трехчлен $5x^2 + 3x + 2$ не имеет корней.

Его невозможно разложить на множители первой степени. Можно вынести числовой коэффициент за скобки $5x^2 + 3x + 2 = 5(x^2 + 0,6x + 0,4)$.



Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

Схема решения:

1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
3. Решить получившееся уравнение.
4. Исключить из его корней те числа, которые обращают в нуль общий знаменатель.



Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

$$\frac{t}{t+1} - \frac{t+2}{t-2} = 1$$

Общий знаменатель: $(t+1)(t-2)$.

Умножим на него обе части уравнения:

$$t(t-2) - (t+2)(t+1) = 1 \cdot (t+1)(t-2) \iff$$

$$t^2 - 2t - t^2 - 3t - 2 = t^2 - t - 2 \iff$$

$$t^2 + 4t \iff 0 \iff t(t+4) = 0 \iff t_1 = 0, t_2 = -4.$$

Ни одно из чисел не обращает в нуль
общий знаменатель.

Ответ: $0; -4$.



Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

$$\frac{2}{x^2 - 9} - \frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{6 - x}{x(x + 3)}$$

Общий знаменатель: $x(x - 3)(x + 3)$. Тогда:

$$2x - (x - 3) = (6 - x)(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$x_1 = 3$ – посторонний корень, так как при $x = 3$
общий знаменатель $x(x - 3)(x + 3) = 0$.

$x_2 = 5$ – корень.

Ответ: 5.



Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$,
где $a \neq 0$, b и c - заданные числа, называется
биквадратным.

$$9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$$

Заменой $x^2 = t$ сводится к квадратному уравнению.

$$9t^2 + 17t - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{9} \quad \text{или} \quad t = -2 \quad \longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{9} \quad \text{или} \quad x^2 = -2$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Нет корней

Ответ: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

Решение уравнений методом замены неизвестного

$$x - 5\sqrt{x-7} - 13 = 0.$$

$$x - 7 - 5\sqrt{x-7} - 6 = 0.$$

$$t = \sqrt{x-7}, \quad x-7 = t^2$$

$$t^2 - 5t - 6 = 0.$$

$$t = -1 \quad | \quad t = 6.$$

$$\sqrt{x-7} = -1 \quad | \quad \sqrt{x-7} = 6.$$

Нет корней

$$x = 43.$$

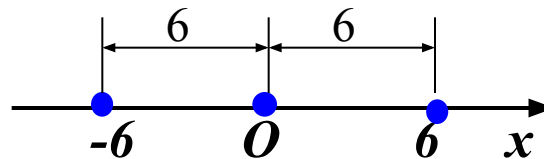
Ответ: **43.**



Модуль

Модуль числа x – это расстояние от начала отсчета до точки x на координатной прямой.

$|x| = 6$ означает, что расстояние от начала отсчета до точки x равно 6.



$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

$$|x^2 - 2x - 39| = 24.$$

$$x^2 - 2x - 39 = 24$$

$$x_1 = 9; \quad x_2 = -7$$

$$x^2 - 2x - 39 = -24$$

$$x_3 = -3; \quad x_4 = 5.$$

Ответ: $1,6; 1; -1; 6/11$.



Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

$$9x^2 - \frac{x}{|x|} = 0.$$

$$\begin{aligned} x > 0, \\ 9x^2 - \frac{x}{x} &\equiv 0 \\ x > 0, \end{aligned}$$

$$9x^2 - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} x < 0, \\ 9x^2 - \frac{x}{-x} &= 0. \\ x < 0, \end{aligned}$$

$$9x^2 + 1 = 0.$$

нет решений

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

Модули двух чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа равны или противоположны.

$$|8x^2 - 4x + 1| = |3x^2 + 9x - 7|$$

$$8x^2 - 4x + 1 = 3x^2 + 9x - 7$$

$$x_1 = 1,6; \quad x_2 = 1$$

$$8x^2 - 4x + 1 = -(3x^2 + 9x - 7)$$

$$x_3 = -1; \quad x_4 = 6/11.$$

Ответ: *1,6; 1; -1; 6/11.*

