

Основные варианты расположения корней квадратного трехчлена



Необходимое условие

Если из A следует B , то B является **необходимым** условием для A

$$A \rightarrow B$$

Достаточное условие

Если из A следует B , то A является **достаточным** условием для B

Корни квадратного трехчлена
расположены по разные стороны
от числа a

$$x_1 < a < x_2 \Leftrightarrow ?$$

Необходимое условие

Если $x_1 < a < x_2$ то $Af(a) < 0$

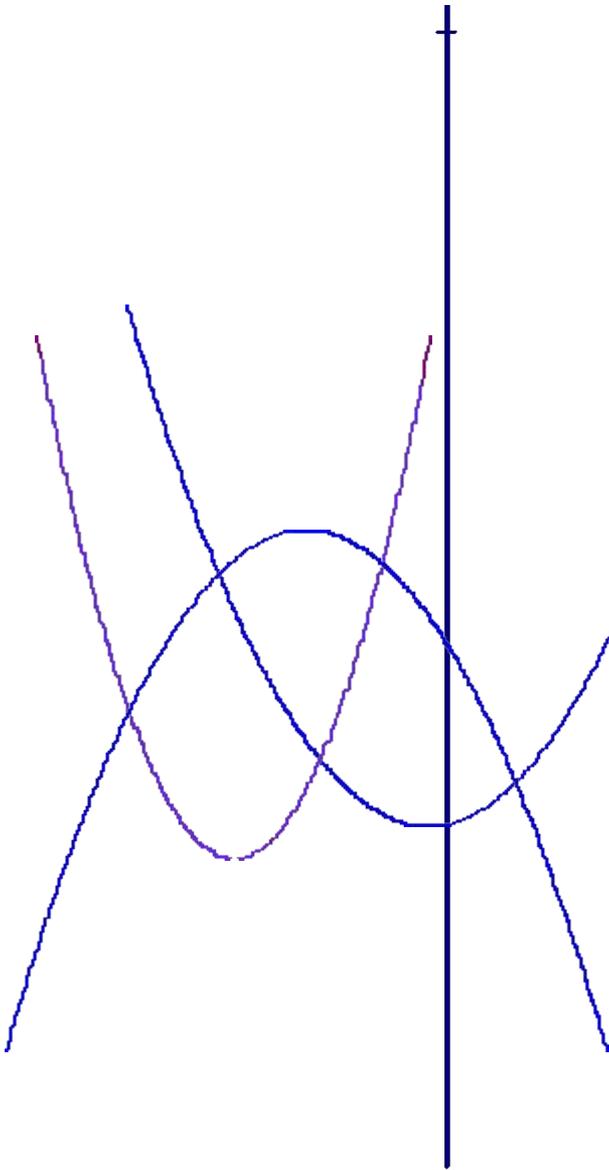
$$A > 0$$

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow f(a) < 0$$

$$A < 0$$

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f(a) > 0$$

$$Af(a) < 0$$



Достаточное условие

Если $Af(a) < 0$ то $x_1 < a < x_2$

$$A > 0$$

$$f(a) < 0 \Rightarrow \exists x_1; x_2$$

$$a \leq x_1 \Rightarrow f(a) \geq 0$$

$$a \geq x_2 \Rightarrow f(a) \geq 0$$

что противоречит условию

$$A < 0$$

$$f(a) > 0 \Rightarrow \exists x_1; x_2$$

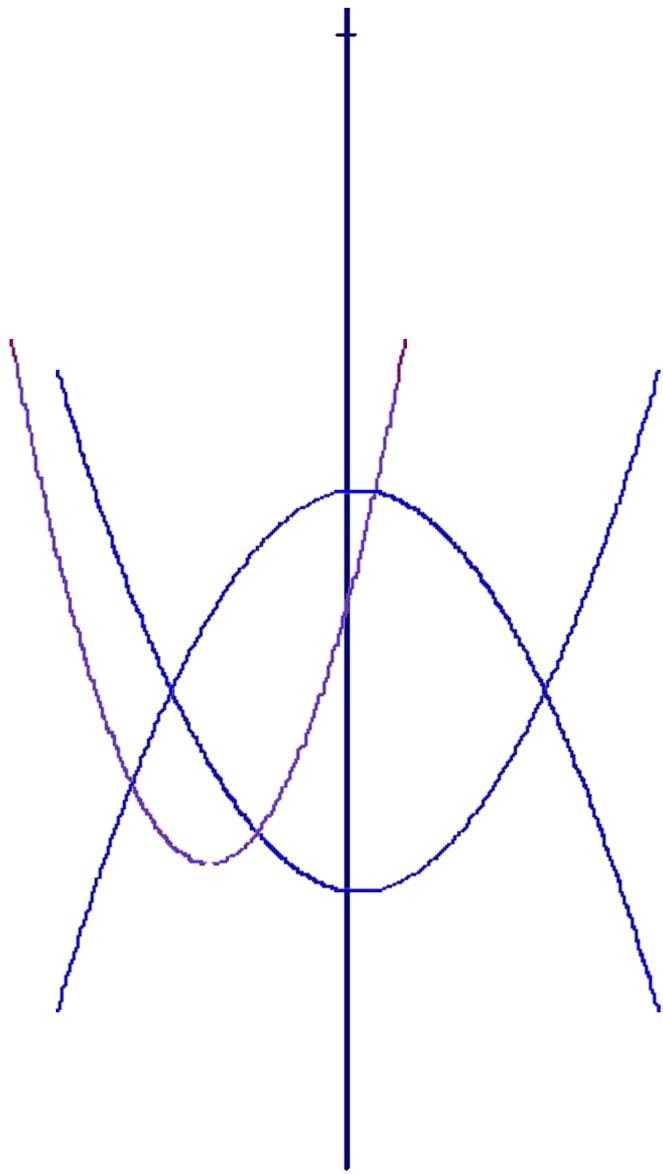
$$a \geq x_2 \Rightarrow f(a) \leq 0$$

$$a \leq x_1 \Rightarrow f(a) \leq 0$$

что противоречит условию

$$\text{Значит, } x_1 < a < x_2$$

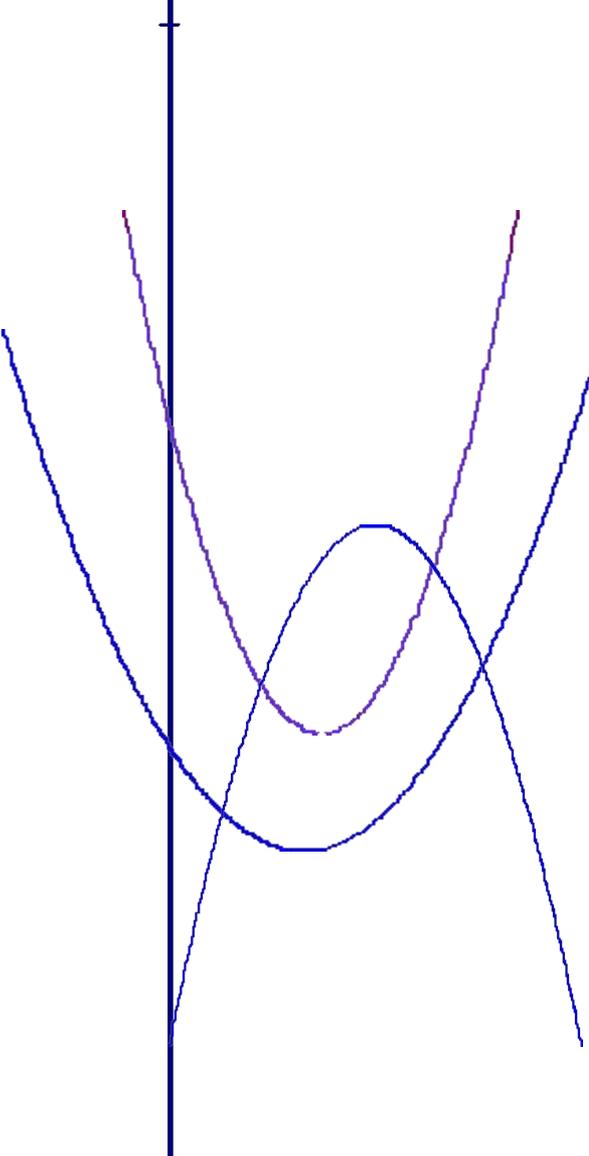
$$Af(a) < 0$$



Корни квадратного трехчлена
расположены справа от числа a

$$a < x_1 < x_2 \Leftrightarrow ?$$

Необходимое условие


$$\text{Если } a < x_1 < x_2 \text{ то } \Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ a < x_0 \\ D \geq 0 \end{cases}$$

A > 0

$$\exists x_1, x_2 \Rightarrow D \geq 0$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + x_1}{2} = x_1 > \alpha \Rightarrow x_0 > \alpha$$

$$A > 0, \alpha \in (-\infty; x_1) \Rightarrow f(a) > 0$$

A < 0

$$A < 0, \alpha \in (x_2; \infty) \Rightarrow f(a) < 0 \blacksquare$$

Достаточное условие

Если $\begin{cases} Af(a) > 0 \\ a < x_0 \\ D \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ то $a < x_1 < x_2$

A > 0

$$D \geq 0 \Rightarrow \exists x_1, x_2$$

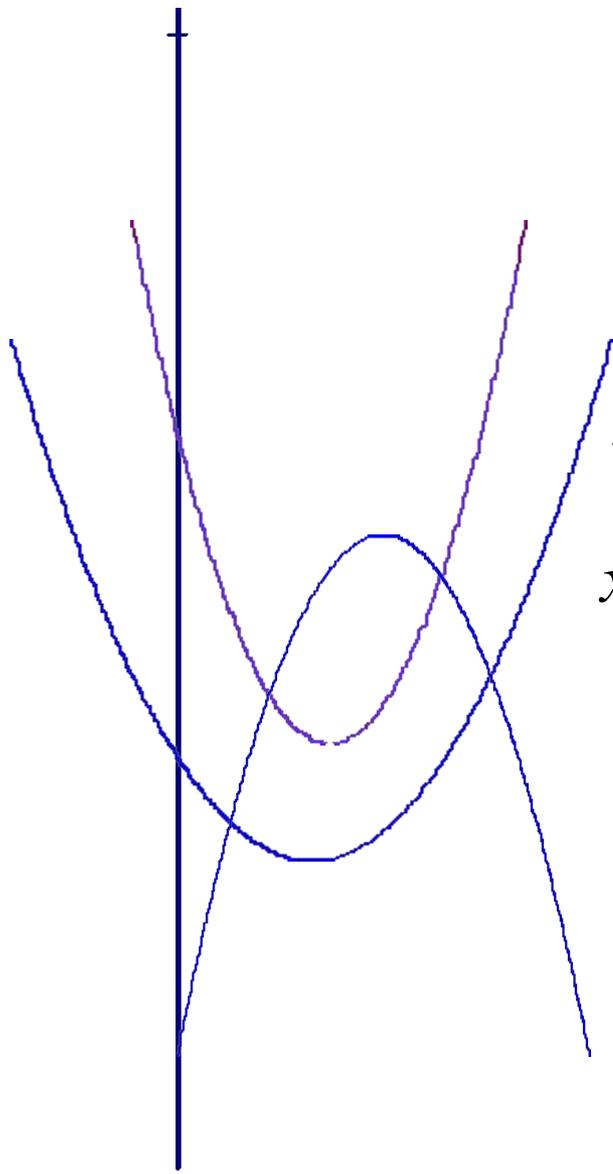
$$x_2 = \frac{x_2 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 > \alpha \Rightarrow x_2 > \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; x_2)$$

$$f(a) > 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \Rightarrow \alpha < x_1 < x_2$$

A < 0

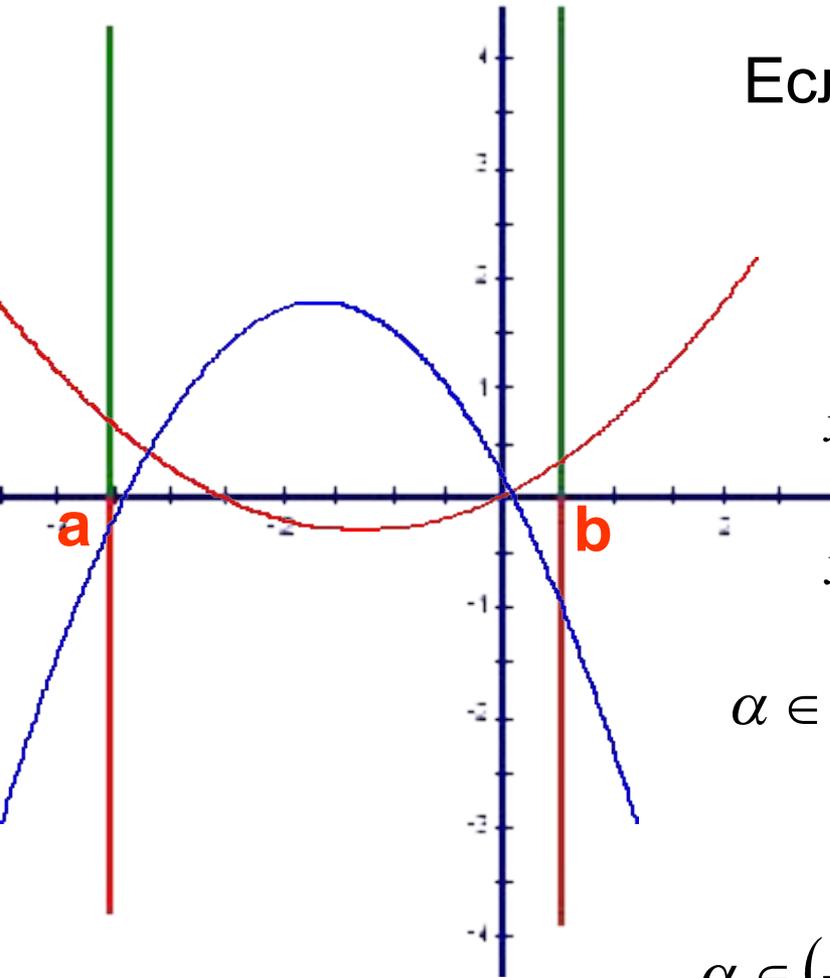
$$f(a) < 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \Rightarrow \alpha < x_1 < x_2 \blacksquare$$



Корни квадратного трехчлена
расположены между числами

$$a < x_1 < x_2 < b \Leftrightarrow ?$$

Необходимое условие



Если $a < x_1 < x_2 < b$ то $\Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) > 0 \\ a < x_0 < b \\ D \geq 0 \end{cases}$

$$A > 0 \quad \exists x_1, x_2 \Rightarrow D \geq 0$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + x_1}{2} = x_1 > a \Rightarrow x_0 > a$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \frac{x_2 + x_2}{2} = x_2 < b \Rightarrow x_0 < b$$

$$a \in (-\infty; x_1); b \in (x_2; \infty) \Rightarrow f(a) > 0; f(b) > 0$$

$$A < 0$$

$$a \in (-\infty; x_1); b \in (x_2; \infty) \Rightarrow f(a) < 0; f(b) < 0 \blacksquare$$

Достаточное условие

$$\text{Если } \Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) > 0 \\ a < x_0 < b \\ D \geq 0 \end{cases} \text{ то } a < x_1 < x_2 < b$$

A > 0

$$D \geq 0 \Rightarrow \exists x_1, x_2$$

$$x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 > \alpha \Rightarrow x_2 > \alpha \\ \Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; x_2)$$

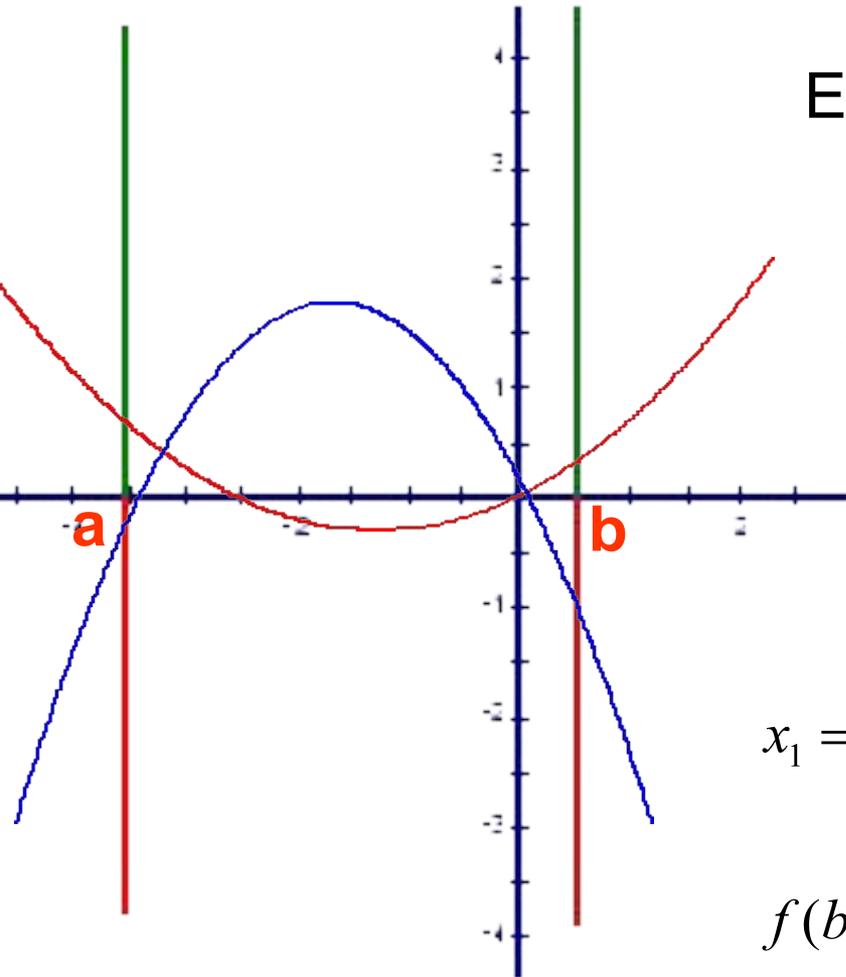
$$f(a) > 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \Rightarrow \alpha < x_1$$

$$x_1 = \frac{x_1 + x_1}{2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 < b \Rightarrow x_1 < b \\ \Rightarrow b \in (x_1; x_2) \cup (x_2; \infty)$$

$$f(b) > 0 \Rightarrow b \in (x_2; \infty) \Rightarrow x_2 < b$$

A < 0 $f(a) < 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \Rightarrow \alpha < x_1$

$$f(b) < 0 \Rightarrow b \in (x_2; \infty) \Rightarrow x_2 < b \blacksquare$$



Для того, чтобы корни квадратного
трехчлена были заключены между
числами **a** и **b**,

необходимо и достаточно, чтобы
дискриминант был не меньше 0,
ось симметрии проходила между
числами a и b,

$$Af(a) > 0, Af(b) > 0$$

$$a < x_1 < x_2 < b \Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) > 0 \\ a < x_0 < b \\ D \geq 0 \end{cases}$$

a b

Чтобы числа a и b были
расположены между корнями
квадратного трехчлена

необходимо и достаточно, чтобы

$$x_1 < a < b < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) < 0 \\ Af(b) < 0 \end{cases}$$

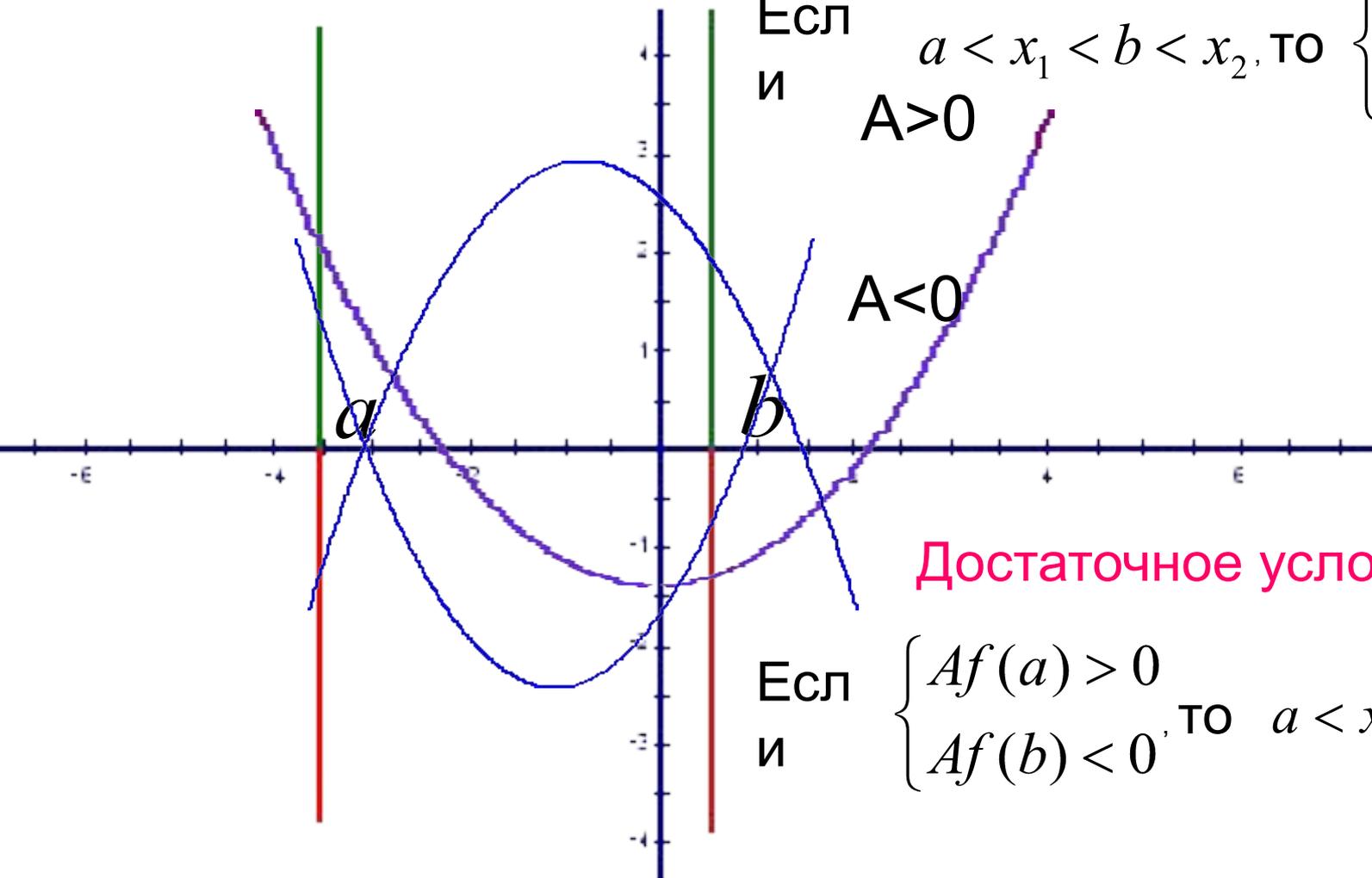
Числа a и b чередуются с
корнями квадратного трехчлена

$$a < x_1 < b < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) < 0 \end{cases}$$

Необходимое условие

Если и $A > 0$ $a < x_1 < b < x_2$, то $\begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) < 0 \end{cases}$

$A < 0$



Достаточное условие

Если $\begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) < 0 \end{cases}$, то $a < x_1 < b < x_2$