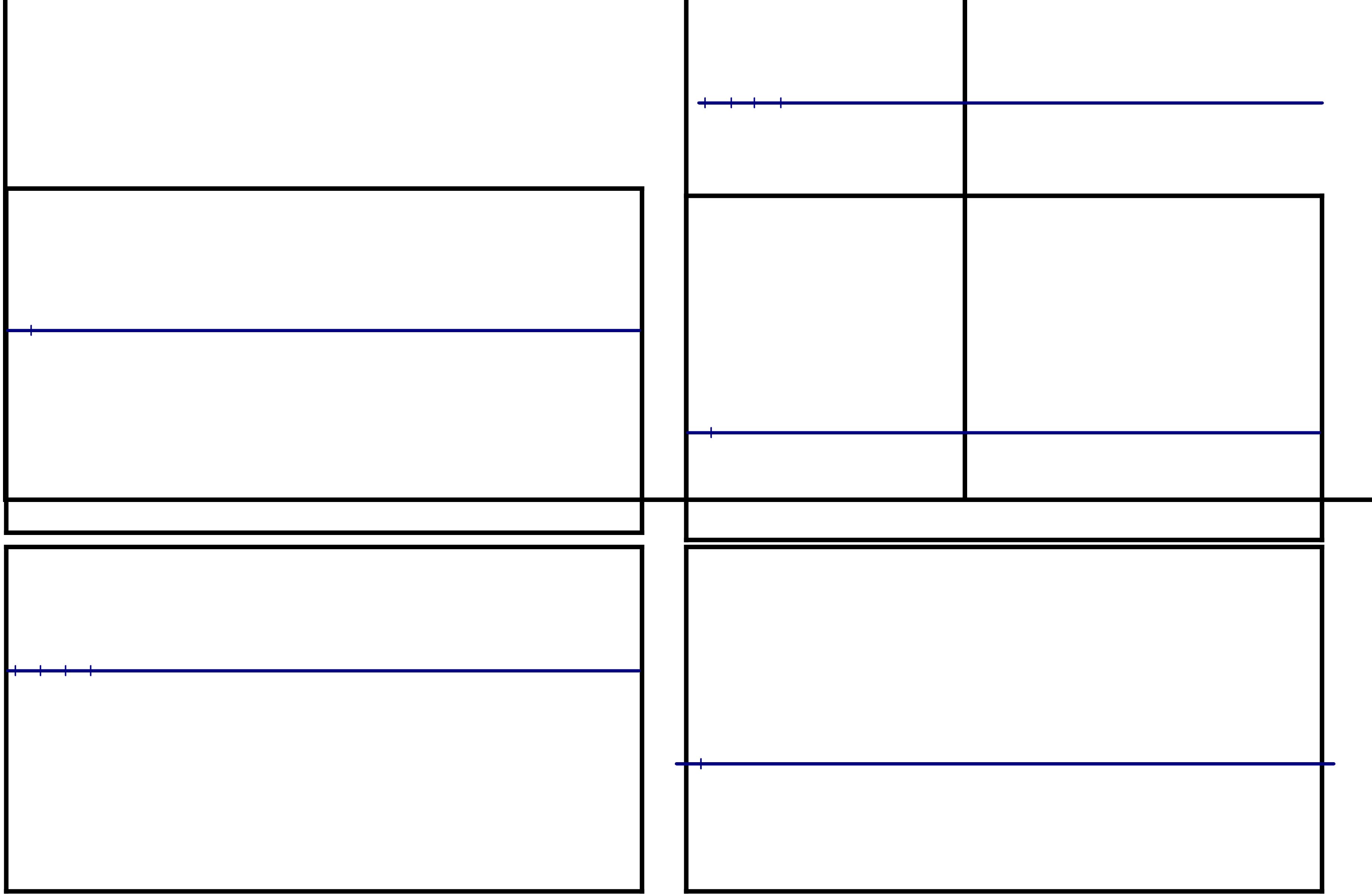
Основные варианты расположения корней квадратного трехчлена



Необходимое условие

Если из А следует В, то В является необходимым условием для А

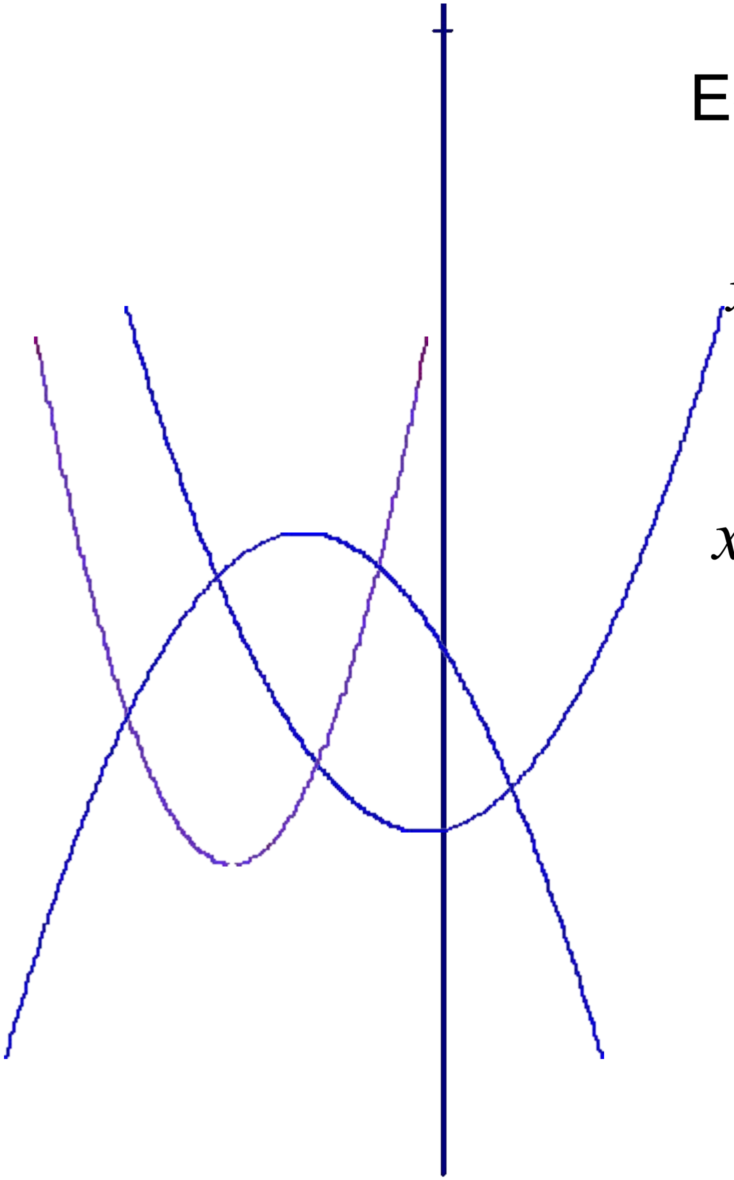
$$A \to B$$

Достаточное условие

Если из А следует В, то А является достаточным условием для В

Корни квадратного трехчлена расположены по разные стороны от числа a

$$x_1 < a < x_2 \Leftrightarrow ?$$



Необходимое условие

Если $x_1 < a < x_2$ то $Af(a) < 0$

A>0

$$x_1 < x < x_2 \quad \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow f(a) < 0$$

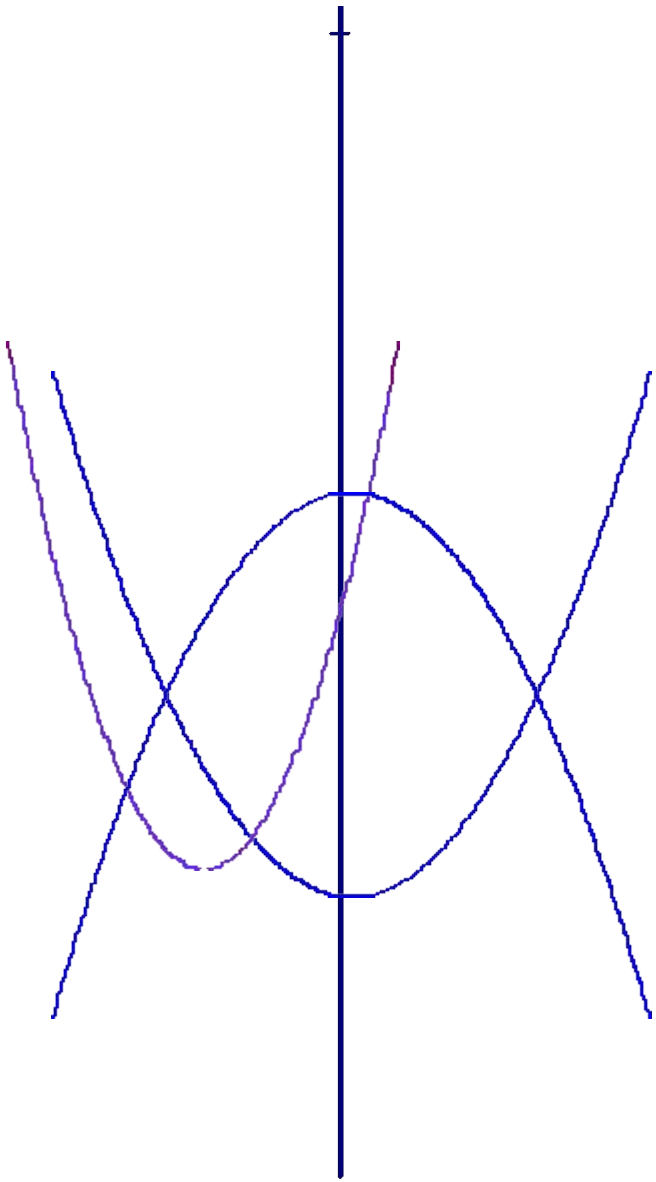
A<0

$$x_1 < x < x_2 \quad \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f(a) > 0$$

$$Af(a) < 0$$

Достаточное условие

Если $Af(a) < 0$ то $x_1 < a < x_2$



A>0

$$f(a) < 0 \quad \Rightarrow \exists x_1; x_2$$

$$a \le x_1 \quad \Rightarrow f(a) \ge 0$$

$$a \ge x_2 \quad \Rightarrow f(a) \ge 0$$

что противоречит условию

A<0

$$f(a) > 0 \quad \Rightarrow \exists x_1; x_2$$

$$a \ge x_2 \quad \Rightarrow f(a) \le 0$$

$$a \le x_1 \quad \Rightarrow f(a) \le 0$$

что противоречит условию

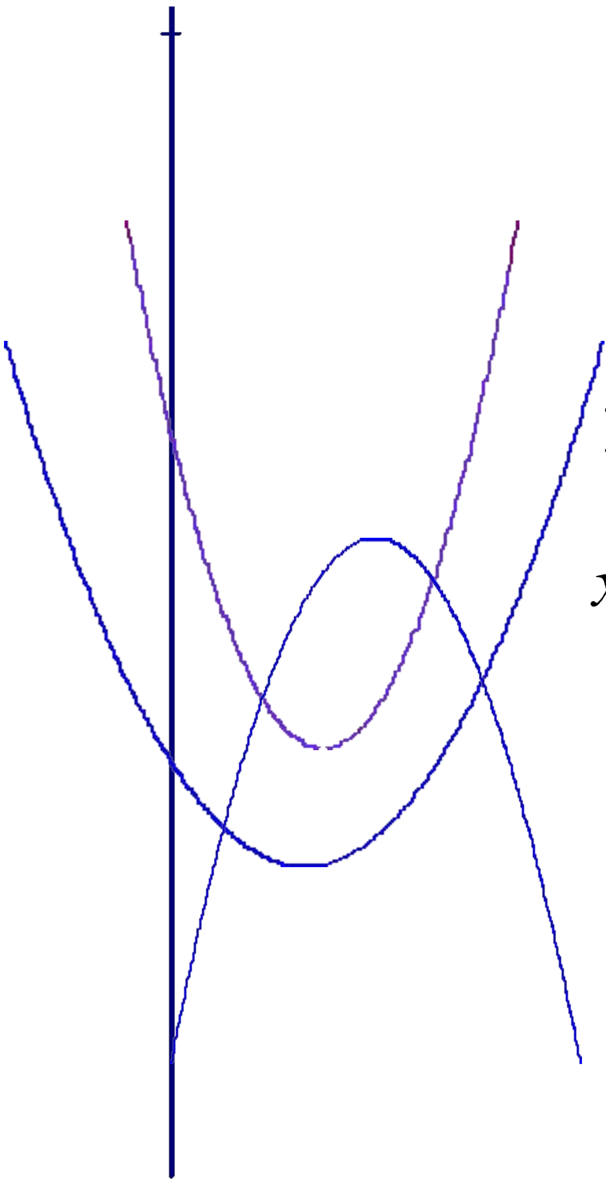
Значит, $x_1 < a < x_2$

$$Af(a) < 0$$

Корни квадратного трехчлена расположены справа от числа a

$$a < x_1 < x_2 \Leftrightarrow ?$$

Необходимое условие



Если $a < x_1 < x_2$ то $\Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ a < x_0 \\ D \geq 0 \end{cases}$

A>0

$$\exists x_1, x_2 \;\Rightarrow D \geq 0$$

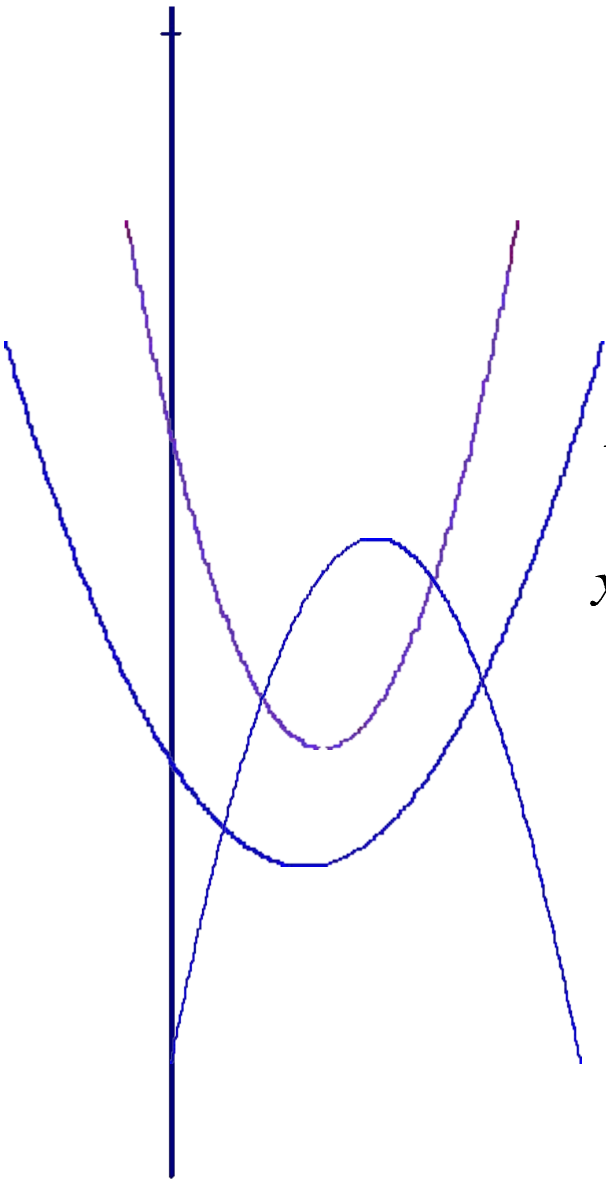
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + x_1}{2} = x_1 > \alpha \quad \Rightarrow x_0 > \alpha$$

$$A > 0, \alpha \in (-\infty; x_1) \quad \Rightarrow f(a) > 0$$

A<0

$$A < 0, \alpha \in (x_2; \infty) \quad \Rightarrow f(a) < 0 \;\; \blacksquare$$

Достаточное условие



Если $\begin{cases} Af(a) > 0 \\ a < x_0 \\ D \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ то $a < x_1 < x_2$

A>0

$D \geq 0 \quad \Rightarrow \exists x_1, x_2$

$$x_2 = \frac{x_2 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 > \alpha \quad \Rightarrow x_2 > \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; x_2)$$

$f(a) > 0 \;\Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \;\Rightarrow \alpha < x_1 < x_2$

A<0

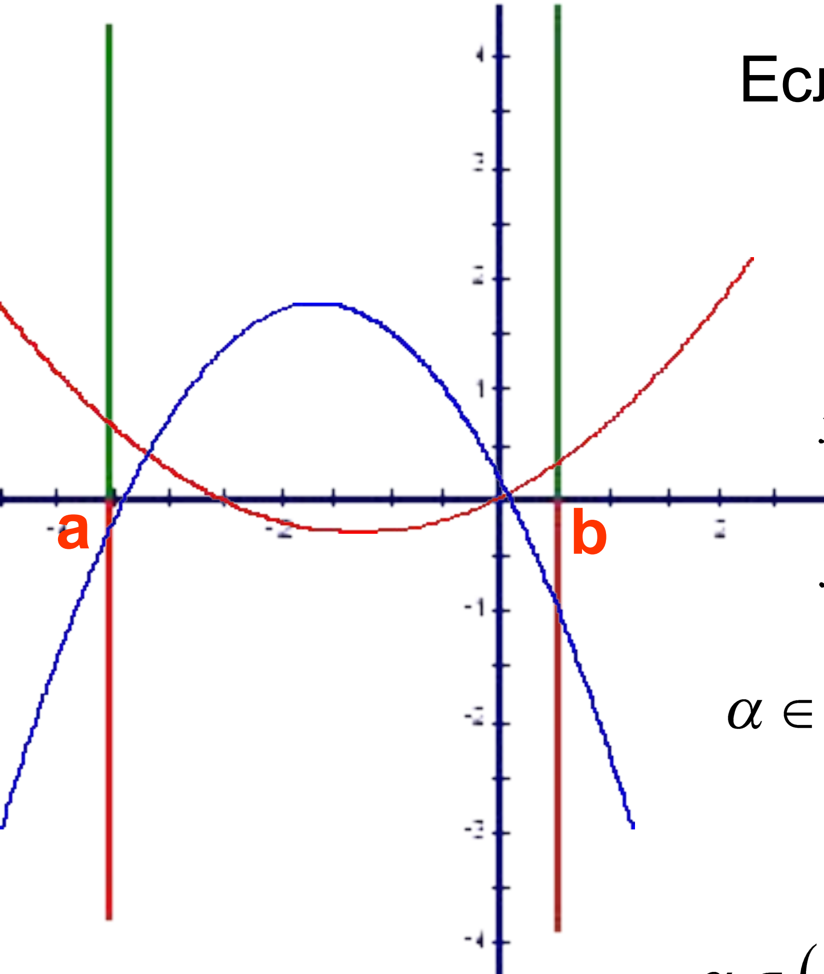
$f(a) < 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \Rightarrow \alpha < x_1 < x_2$ $\blacksquare$

Корни квадратного трехчлена расположены между числами a и b

$$a < x_1 < x_2 < b \Leftrightarrow \quad ?$$

Необходимое условие

Если $a < x_1 < x_2 < b$ то $\Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) > 0 \\ a < x_0 < b \\ D \geq 0 \end{cases}$



A>0

$$\exists x_1, x_2 \quad \Rightarrow D \geq 0$$

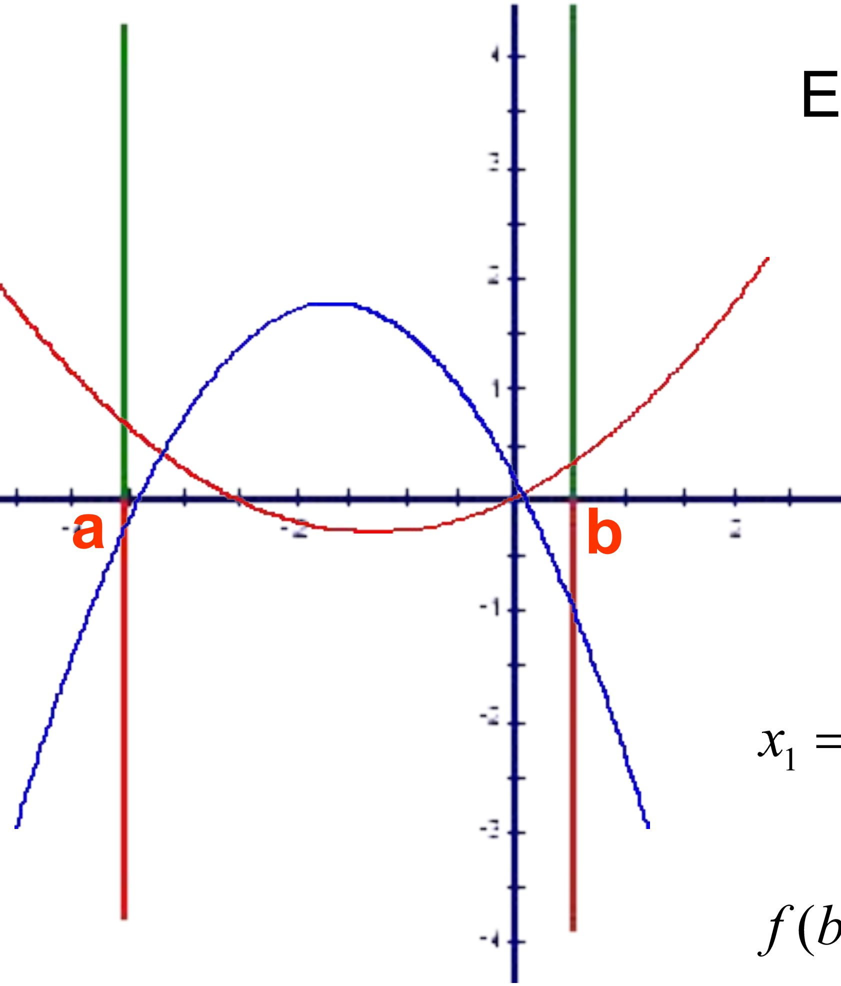
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + x_1}{2} = x_1 > \alpha \Rightarrow x_0 > \alpha$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \frac{x_2 + x_2}{2} = x_2 < b \quad \Rightarrow x_0 < b$$

$$\alpha \in (-\infty; x_1); b \in (x_2; \infty) \quad \Rightarrow f(a) > 0; f(b) > 0$$

A<0

$$\alpha \in (-\infty; x_1); b \in (x_2; \infty) \Rightarrow f(a) < 0; f(b) < 0$$



Достаточное условие

Если $\Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) > 0 \\ a < x_0 < b \\ D \geq 0 \end{cases}$ то $a < x_1 < x_2 < b$

A>0 $\quad D \geq 0 \quad \Rightarrow \exists x_1, x_2$

$$x_2 = \frac{x_2 + x_2}{2} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 > \alpha \Rightarrow x_2 > \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; x_2)$$

$$f(a) > 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \Rightarrow \alpha < x_1$$

$$x_1 = \frac{x_1 + x_1}{2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 < b \Rightarrow x_1 < b$$

$$\Rightarrow b \in (x_1; x_2) \cup (x_2; \infty)$$

$$f(b) > 0 \Rightarrow b \in (x_2; \infty) \Rightarrow x_2 < b$$

A<0 $\quad f(a) < 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty; x_1) \Rightarrow \alpha < x_1$

$$f(b) < 0 \Rightarrow b \in (x_2; \infty) \Rightarrow x_2 < b \; \blacksquare$$

Для того, чтобы корни квадратного трехчлена были заключены между числами a и b,

необходимо и достаточно, чтобы

дискриминант был не меньше 0,

ось симметрии проходила между числами a и b,

Af(a)>0, Af(b)>0

$$a < x_1 < x_2 < b \Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) > 0 \\ a < x_0 < b \\ D \geq 0 \end{cases}$$

a b

Чтобы числа и были расположены между корней квадратного трехчлена необходимо и достаточно, чтобы Af(a)<0 и Af(b)<0

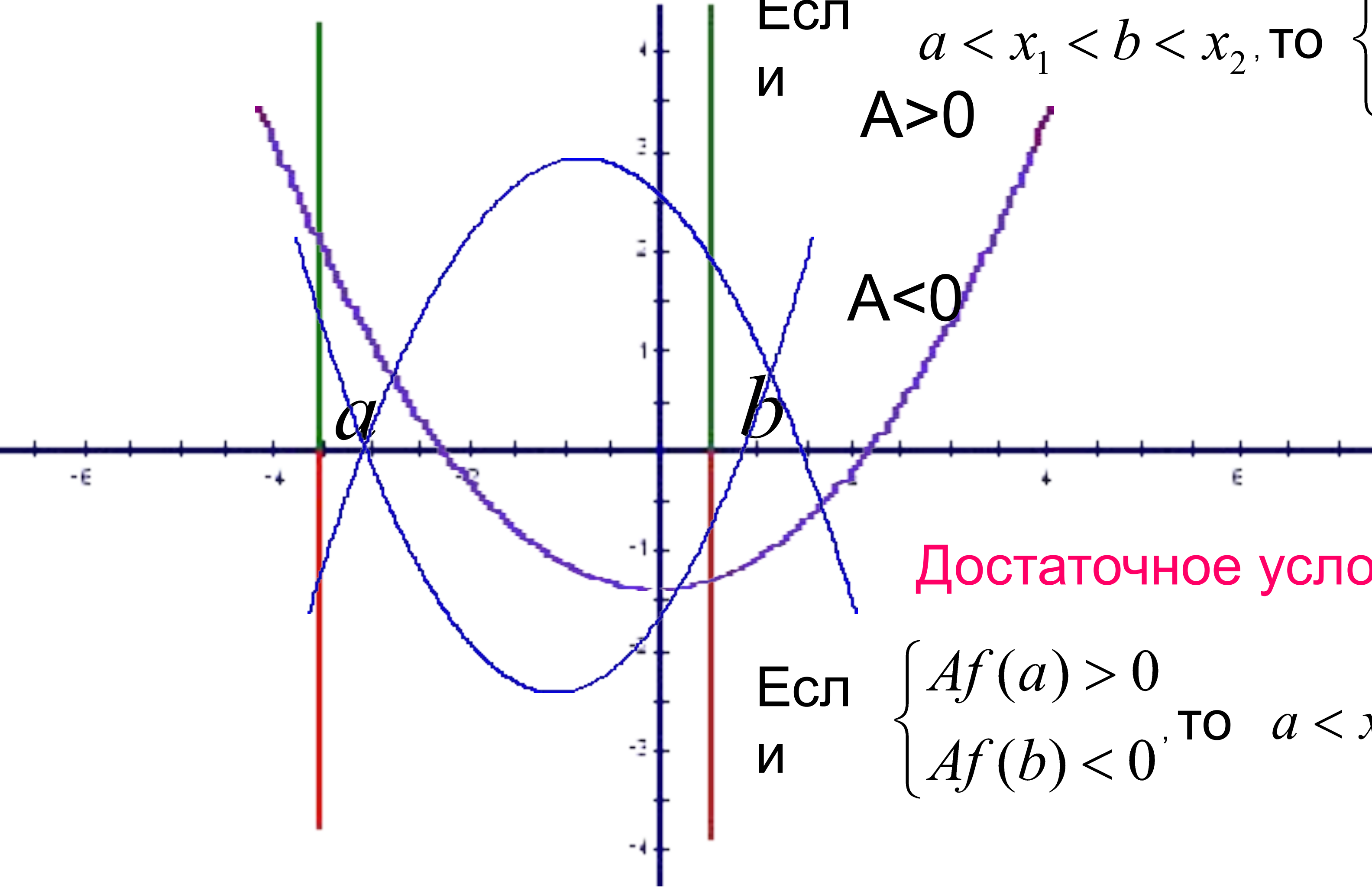
$$x_1 < a < b < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) < 0 \\ Af(b) < 0 \end{cases}$$

Числа a и b чередуются с корнями квадратного трехчлена

$$a < x_1 < b < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) < 0 \end{cases}$$

Необходимое условие

Если $a < x_1 < b < x_2$, то $\begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) < 0 \end{cases}$



Достаточное условие

Если $\begin{cases} Af(a) > 0 \\ Af(b) < 0 \end{cases}$, то $a < x_1 < b < x_2$