Кривые второго порядка

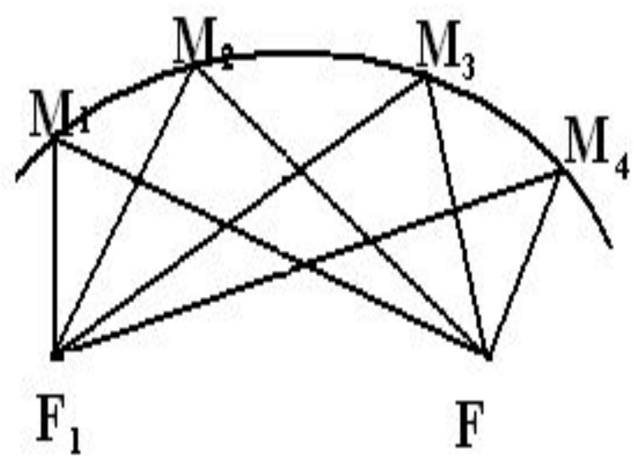
Эллипс

Эллипс и его уравнение.

- ***Эллипсом*** *называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (и большая, чем расстояние между фокусами).*

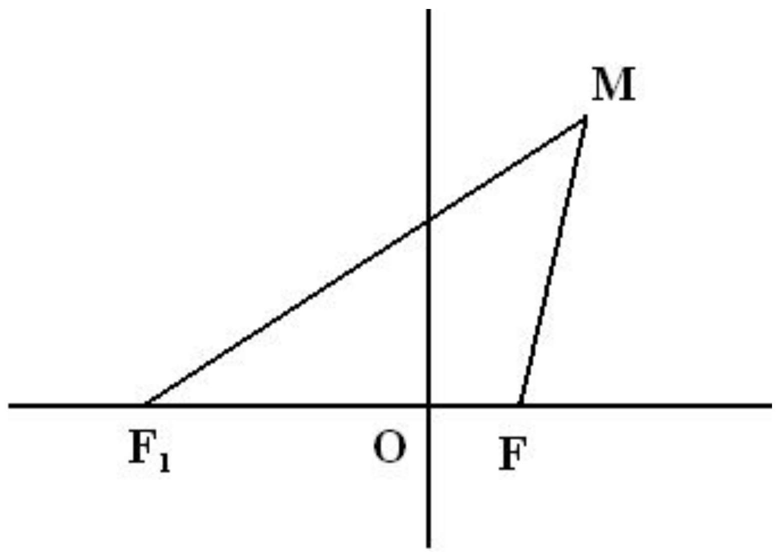
Построение графика эллипса

- Пусть, например, на эллипсе взяты точки M1, M2, M3, M4 и т.д. (рис. 1).
- Если фокусы обозначить через F и F1, то согласно данному определению можно написать:
- F1M1 + FM1 = F1M2 + FM2 = F1M3 + FM3 = F1M4 + FM4 = const. (1)
- Геометрическое место точек, обладающих вышеуказанным свойством (1), и есть эллипс.



На основании определения эллипса составим его уравнение.

- Для этого выберем систему координат следующим образом. За ось Ох примем прямую, проходящую через фокусы F и F1, а за ось Оу – прямую, перпендикулярную к FF1 и проведённую через середину отрезка FF1 (рис. 2). Обозначим расстояние F1F между фокусами через 2с, тогда координаты фокусов будут: F(с;0) и F1(-с;0).
- Возьмём на эллипсе произвольную точку М(х;у). Обозначим постоянную величину суммы расстояний от каждой точки до фокусов через 2а, тогда FM+ F1M=2а (2)



Уравнение эллипса

По формуле расстояний между двумя точками найдём:

$FM = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$,

$F1M = \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Теперь равенство (2) перепишется следующим образом:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \quad (3)$

и будет представлять *уравнение эллипса* в принятой системе координат.

Упростим уравнение (3).

- Для этого перенесём один из радикалов в правую часть уравнения: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.
- Возведём обе части этого равенства в квадрат:
- $(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$.
- Раскроем скобки: $x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$
- Приведём подобные члены: $-2cx=4a^2-4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+2cx$,
- $4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=4a^2+4cx$.

- Сократив на 4 и снова возведя в квадрат обе части равенства, получим:
- $a^2 (x^2+2cx+c^2+y^2)=(a^2+cx)^2$,
- или
- $a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a4+2a^2cx+c^2x^2$.
- Перенесём все члены, содержащие x и y, в левую часть равенства, остальные члены - в правую:
- $a^2x^2+c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$,
- или
- $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.   (4)

- Но согласно определению эллипса $2c<2a$, отсюда $c<a$.
- Из последнего неравенства следует, что $a^2-c^2>0$, а потом эту разность можно обозначить через b^2. Поставив это обозначение в равенство (4), найдём:
- $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.   (5)
- Наконец, разделим все члены последнего равенства на a^2b^2; окончательно получим: $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (6),
- где $b^2=a^2-c^2$.   (7)
- Уравнение (6) и есть *простейший вид уравнения эллипса.*

Исследование уравнений эллипса.

Определим сначала *у* из уравнения (5): $y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2\left(a^2 - x^2\right)}{a^2}$

откуда $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Из этого же уравнения (5) найдём: $x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2\left(b^2 - y^2\right)}{b^2}$

следовательно, $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$

Исследование симметричности эллипса в системе координат

- Пусть $|x| < a$. Тогда под корнем в равенстве (1) получится положительное число, а поэтому *у* будет иметь два значения, равные по абсолютной величине, но с противоположными знаками. Это значит, что каждому значению *х* соответствуют две точки эллипса, симметричные относительно оси О*х.*
- Пусть теперь $|y| < b$.
- Тогда каждому значению *у,* как мы видим из равенства (2), отвечают два значения *х*, равные по абсолютной величине, но с разными знаками. Отсюда следует, что каждому значению *у* соответствуют на эллипсе две точки, симметричные относительно оси О*у.*
- Из сказанного заключаем: ***эллипс симметричен относительно координатных осей.***

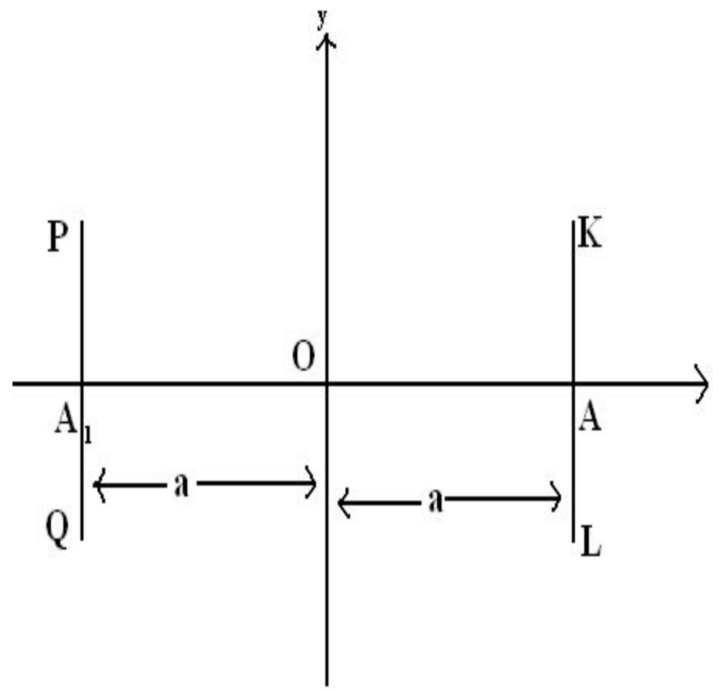
Точки пересечения эллипса с осями

- Найдём точки пересечения эллипса с осью О*х*.
- Пусть *у*=0;
- тогда имеем:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} = \pm a$$

.

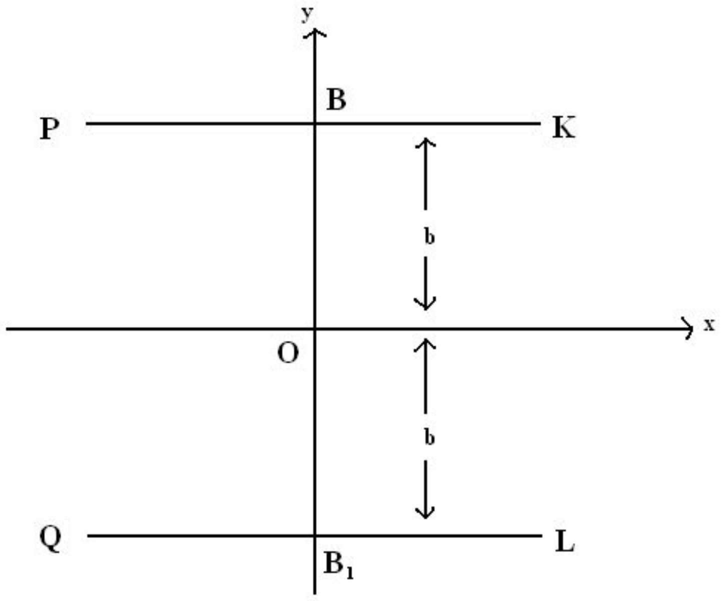
- Отсюда следует: *эллипс пересекает ось* О*х в двух точках, координаты которых* (а; 0) и (-а; 0) (точки А и А1)



- Найдём точки пересечения эллипса с осью О*у*.
- Пусть *х*=0;
- тогда имеем:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2} = \pm b$$

- Отсюда заключаем, что *эллипс пересекает ось* О*у в двух точках, координаты которых* (0; b) и (0; -b) (точки В и В1)



Ограниченность эллипса

Пусть *x* принимает такие значения, что $|x|>a$;

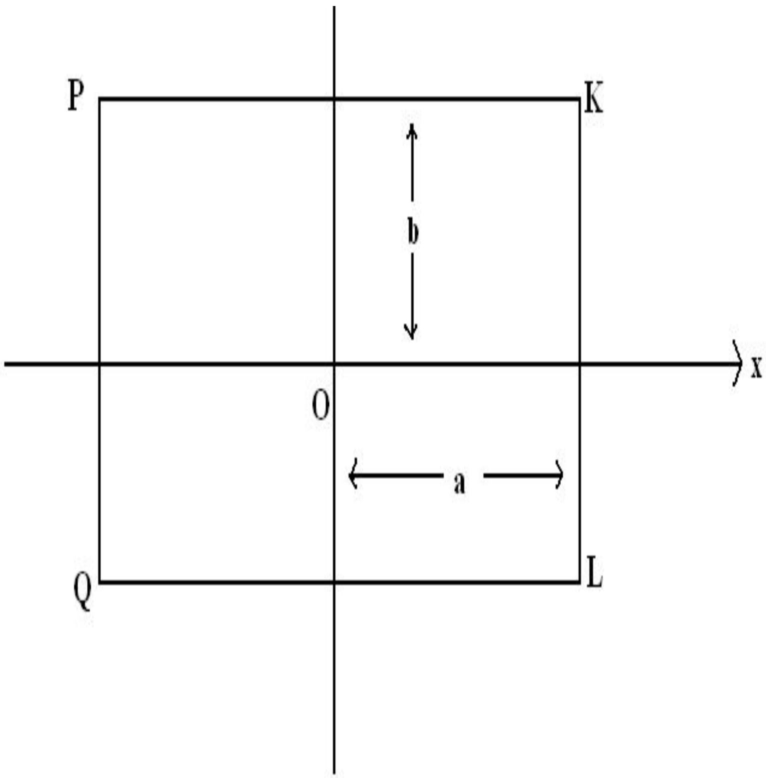
- тогда выражение под корнем в равенстве

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

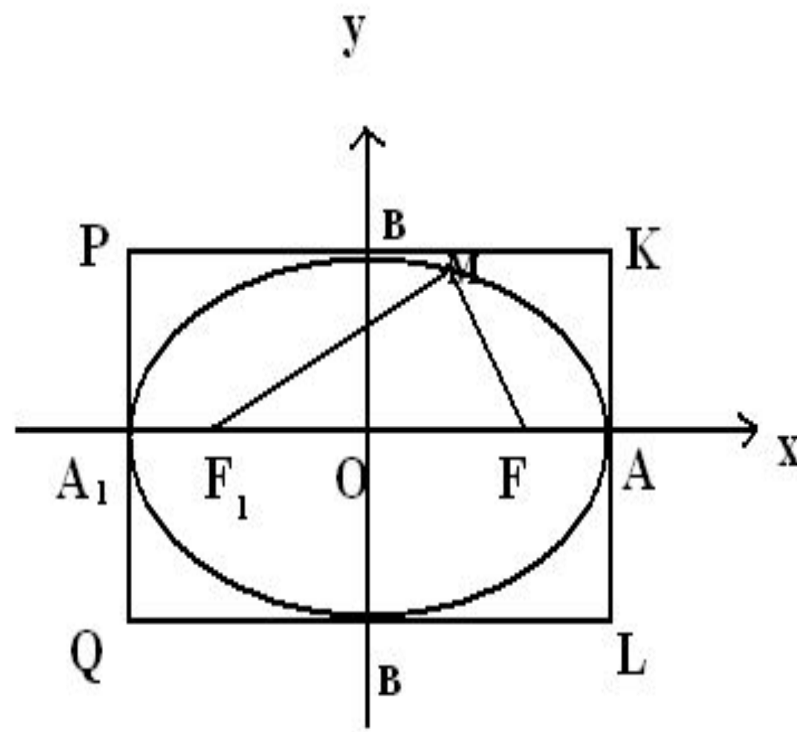
- будет отрицательным, и, следовательно, *y* будет иметь мнимые значения. А это значит, что не существует точек эллипса, абсциссы которых удовлетворяют условию , т.е. эллипс заключён между прямыми *x*= +a и *x*= - a (см. рис.3, прямые KL и PQ).
- Если же положить $|y| > b$,
- то аналогично получим для *x* мнимые значения. Это говорит о том, что точки, удовлетворяющие условию, на эллипсе не лежат, т.е. эллипс заключён между прямыми *y*= +b и *y*= -b ().

эллипс вписан в прямоугольник

- Из сказанного следует, что *эллипс вписан в прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям и имеют длины, равные* 2a и 2b, *а диагонали пересекаются в начале координат*

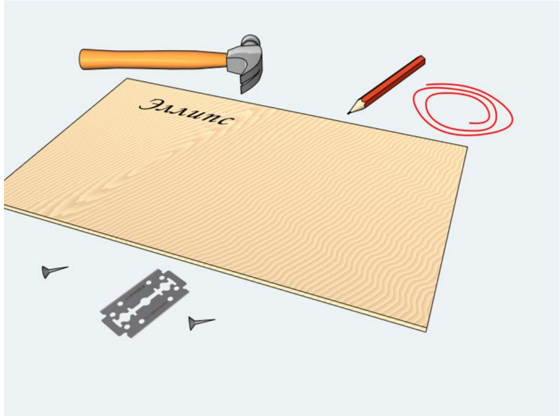


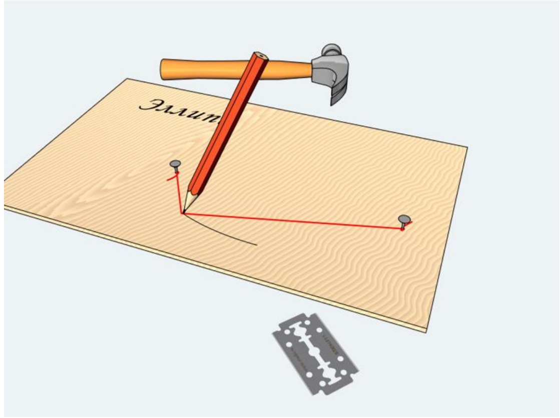
- Эллипс имеет форму, показанную на рис.
- Точки A, A1, B и B1 называются *вершинами эллипса,* а точка O - его *центром.* Отрезок A1A=2a называется его *большой осью*, а отрезок B1B=2b – *малой осью.* Отрезки FM и F1M носят название *фокальных радиусов* точки M.



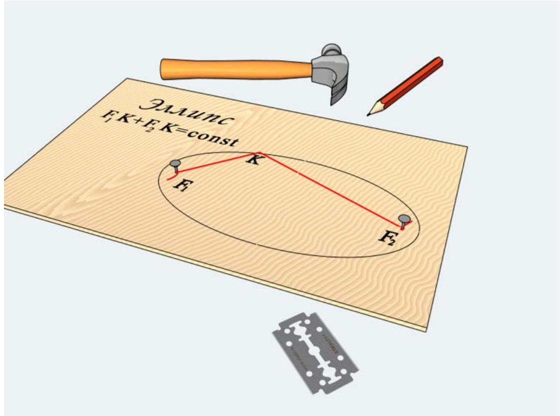
Практическое построение эллипса

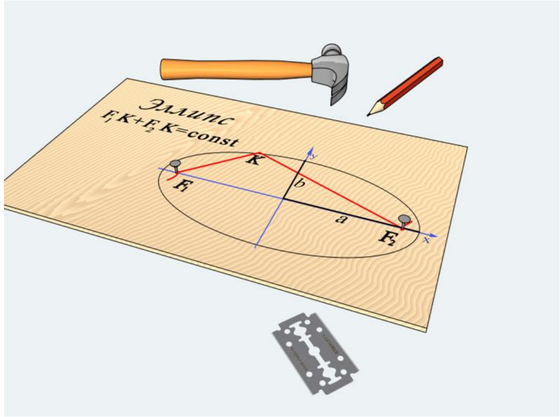
- Пользуясь определением эллипса, его легко построить непрерывным движением карандаша Для этого берём нерастяжимую нить длиной, равной большой оси эллипса, т.е. длиной 2a, и закрепляем концы этой нити в фокусах, положение которых предполагается известным.





- Натягиваем нить карандашом и остриём его описываем кривую, держа нить всё время в натянутом состоянии. Кривая, описываемая при этом – эллипс, так как сумма расстояний от любой точки этой кривой до фокусов равна длине нити, т.е. равна постоянной величине.





Итоговый чертёж