

# Кривые ВТОРОГО порядка

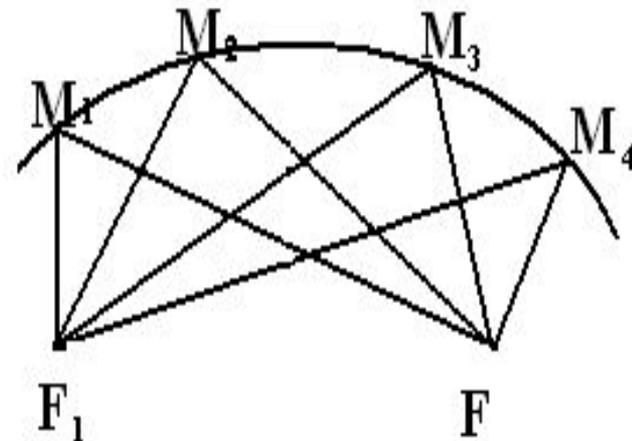
Эллипс

# Эллипс и его уравнение.

- **Эллипсом** называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (и большая, чем расстояние между фокусами).

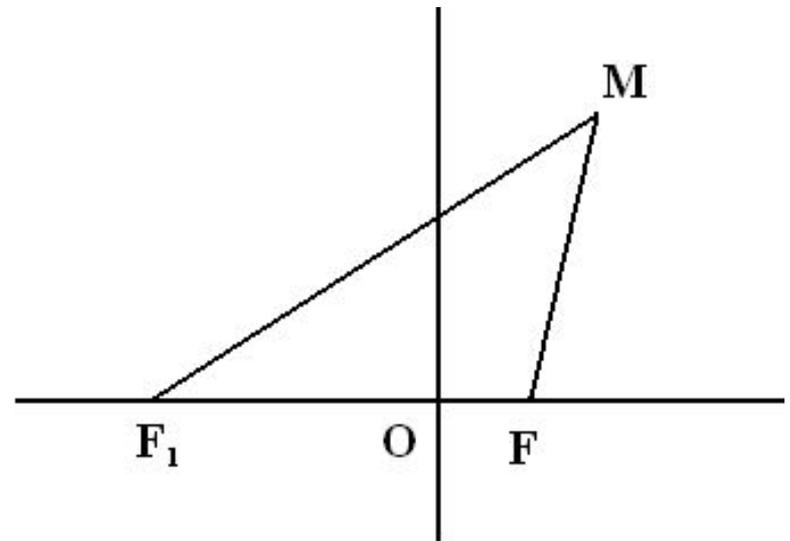
# Построение графика эллипса

- Пусть, например, на эллипсе взяты точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  и т.д. (рис. 1).
- Если фокусы обозначить через  $F$  и  $F_1$ , то согласно данному определению можно написать:
- $F_1M_1 + FM_1 = F_1M_2 + FM_2 = F_1M_3 + FM_3 = F_1M_4 + FM_4 = \text{const.} \quad (1)$
- Геометрическое место точек, обладающих вышеуказанным свойством (1), и есть эллипс.



# На основании определения эллипса составим его уравнение.

- Для этого выберем систему координат следующим образом. За ось  $Ox$  примем прямую, проходящую через фокусы  $F$  и  $F_1$ , а за ось  $Oy$  – прямую, перпендикулярную к  $FF_1$  и проведённую через середину отрезка  $FF_1$  (рис. 2). Обозначим расстояние  $F_1F$  между фокусами через  $2c$ , тогда координаты фокусов будут:  $F(c;0)$  и  $F_1(-c;0)$ .
- Возьмём на эллипсе произвольную точку  $M(x;y)$ . Обозначим постоянную величину суммы расстояний от каждой точки до фокусов через  $2a$ , тогда  $FM + F_1M = 2a$  (2)



# Уравнение эллипса

По формуле расстояний между двумя точками  
найдем:

$$FM = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Теперь равенство (2) перепишется следующим  
образом:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad (3)$$

и будет представлять *уравнение эллипса* в принятой  
системе координат.

Упростим уравнение (3).

- Для этого перенесём один из радикалов в правую часть уравнения:  $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ .
- Возведём обе части этого равенства в квадрат:  $(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$ .
- Раскроем скобки:  

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$
- Приведём подобные члены:  $-2cx=4a^2-4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+2cx$ ,
- $4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=4a^2+4cx$ .

- Сократив на 4 и снова возведя в квадрат обе части равенства, получим:
- $a^2 (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = (a^2 + cx)^2,$
- или
- $a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2.$
- Перенесём все члены, содержащие  $x$  и  $y$ , в левую часть равенства, остальные члены - в правую:
- $a^2x^2 + c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$
- или
- $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (4)$

- Но согласно определению эллипса  $2c < 2a$ , отсюда  $c < a$ .
- Из последнего неравенства следует, что  $a^2 - c^2 > 0$ , а потом эту разность можно обозначить через  $b^2$ . Поставив это обозначение в равенство (4), найдём:
- $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . (5)
- Наконец, разделим все члены последнего равенства на  $a^2b^2$ ; окончательно получим:  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  (6),
- где  $b^2 = a^2 - c^2$ . (7)
- Уравнение (6) и есть *простейший вид уравнения эллипса*.

# Исследование уравнений эллипса.

Определим сначала  $y$  из уравнения (5):  $y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}$

откуда  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

Из этого же уравнения (5) найдём:  $x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2}$

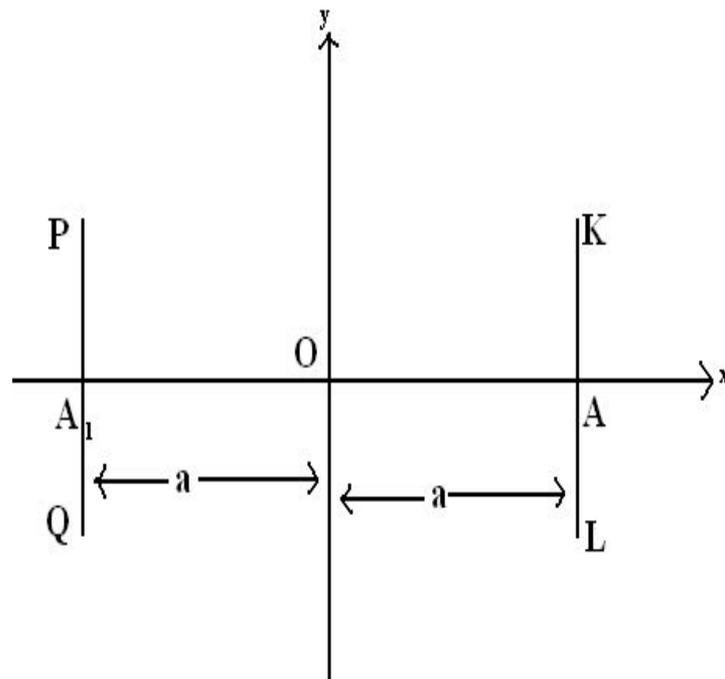
следовательно,  $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$

# Исследование симметричности эллипса в системе координат

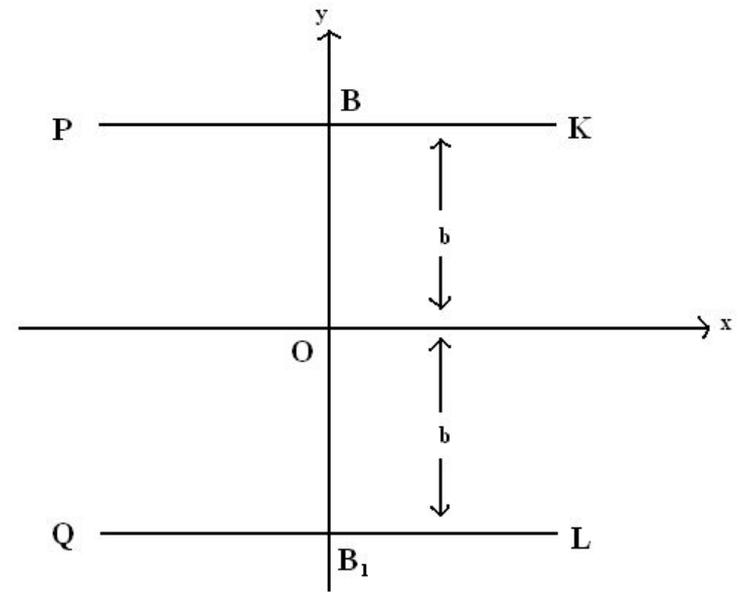
- Пусть  $|x| < a$ . Тогда под корнем в равенстве (1) получится положительное число, а поэтому  $y$  будет иметь два значения, равные по абсолютной величине, но с противоположными знаками. Это значит, что каждому значению  $x$  соответствуют две точки эллипса, симметричные относительно оси  $Ox$ .
- Пусть теперь  $|y| < b$ .
- Тогда каждому значению  $y$ , как мы видим из равенства (2), отвечают два значения  $x$ , равные по абсолютной величине, но с разными знаками. Отсюда следует, что каждому значению  $y$  соответствуют на эллипсе две точки, симметричные относительно оси  $Oy$ .
- Из сказанного заключаем: ***эллипс симметричен относительно координатных осей.***

# Точки пересечения эллипса с осями

- Найдём точки пересечения эллипса с осью  $Ox$ .
- Пусть  $y=0$ ;
- тогда имеем:  
$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} = \pm a$$
- Отсюда следует: эллипс пересекает ось  $Ox$  в двух точках, координаты которых  $(a; 0)$  и  $(-a; 0)$  (точки  $A$  и  $A_1$ )



- Найдём точки пересечения эллипса с осью  $Oy$ .
- Пусть  $x=0$ ;
- тогда имеем:  
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2} = \pm b$$
- Отсюда заключаем, что эллипс пересекает ось  $Oy$  в двух точках, координаты которых  $(0; b)$  и  $(0; -b)$  (точки  $B$  и  $B_1$ )



# Ограниченность эллипса

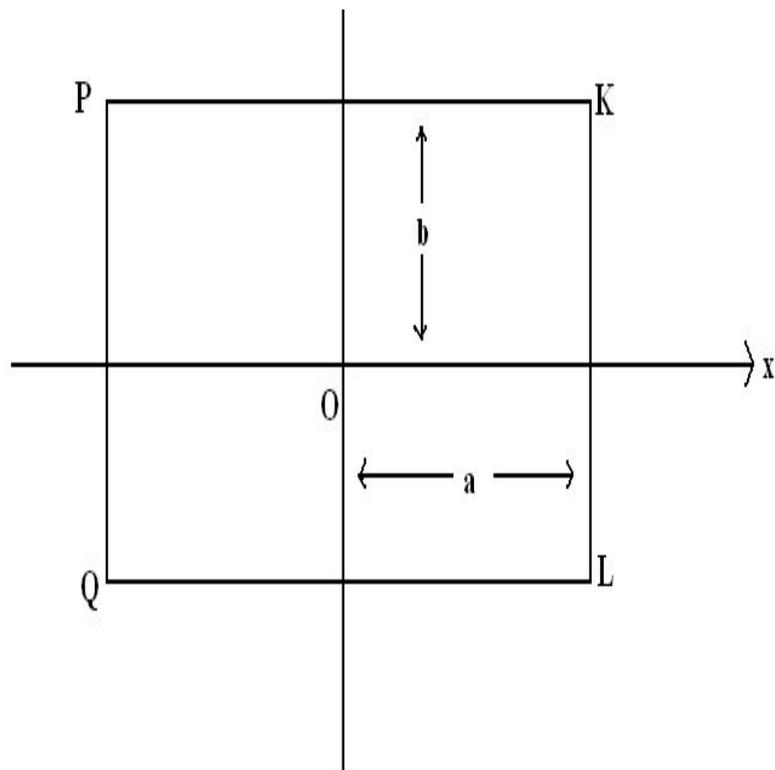
Пусть  $x$  принимает такие значения, что  $|x| > a$ ;  
■ тогда выражение под корнем в равенстве

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

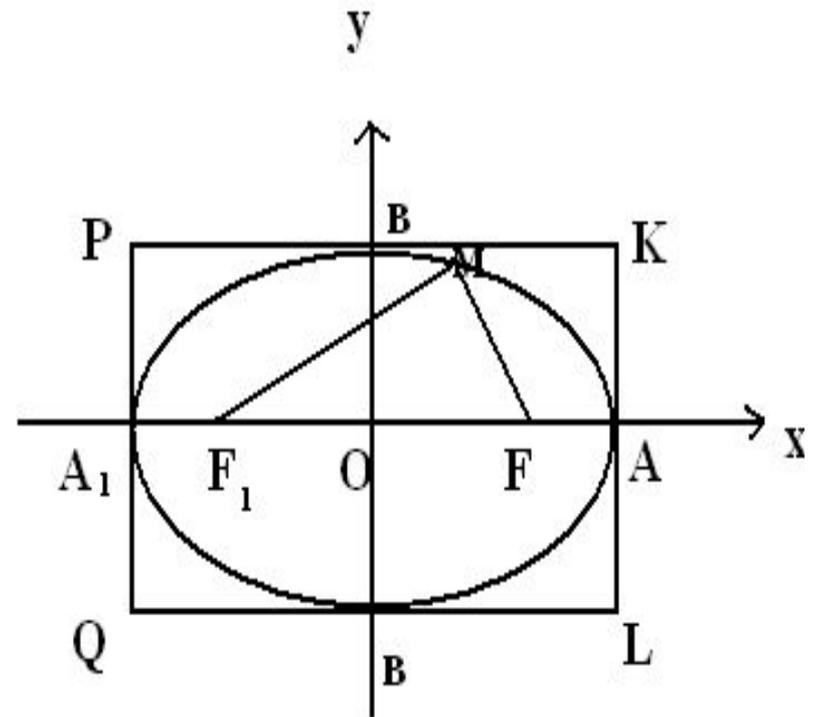
- будет отрицательным, и, следовательно,  $y$  будет иметь мнимые значения. А это значит, что не существует точек эллипса, абсциссы которых удовлетворяют условию, т.е. эллипс заключён между прямыми  $x = +a$  и  $x = -a$  (см. рис.3, прямые KL и PQ).
- Если же положить  $|y| > b$ ,
- то аналогично получим для  $x$  мнимые значения. Это говорит о том, что точки, удовлетворяющие условию, на эллипсе не лежат, т.е. эллипс заключён между прямыми  $y = +b$  и  $y = -b$  ( ).

# Эллипс вписан в прямоугольник

- Из сказанного следует, что эллипс вписан в прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям и имеют длины, равные  $2a$  и  $2b$ , а диагонали пересекаются в начале координат

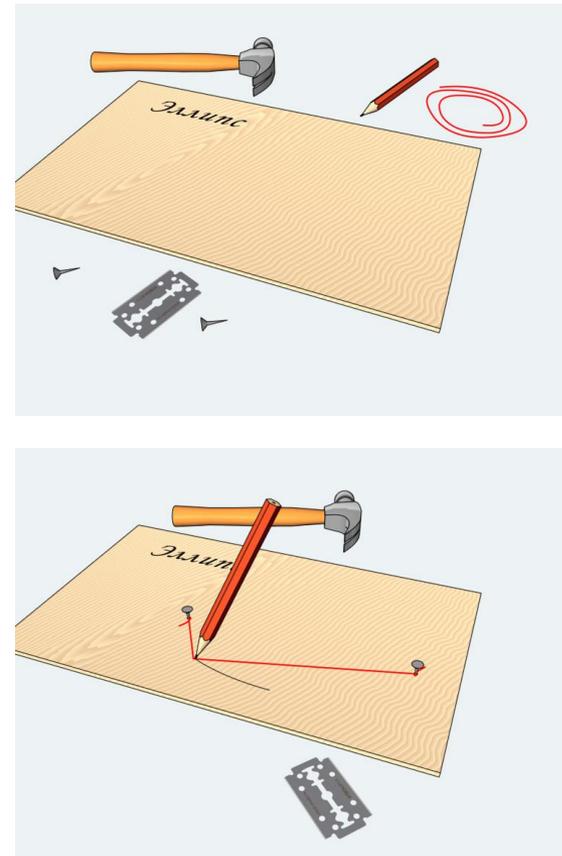


- Эллипс имеет форму, показанную на рис.
- Точки  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$  называются *вершинами эллипса*, а точка  $O$  - его *центром*. Отрезок  $A_1A=2a$  называется его *большой осью*, а отрезок  $B_1B=2b$  – *малой осью*. Отрезки  $FM$  и  $F_1M$  носят название *фокальных радиусов* точки  $M$ .

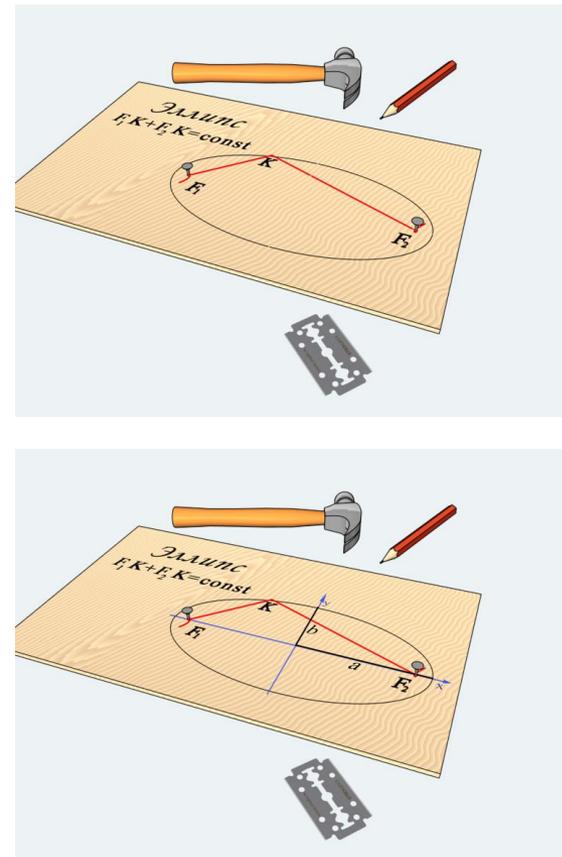


# Практическое построение эллипса

- Пользуясь определением эллипса, его легко построить непрерывным движением карандаша. Для этого берём нерастяжимую нить длиной, равной большой оси эллипса, т.е. длиной  $2a$ , и закрепляем концы этой нити в фокусах, положение которых предполагается известным.



- Натягиваем нить карандашом и остриём его описываем кривую, держа нить всё время в натянутом состоянии. Кривая, описываемая при этом – эллипс, так как сумма расстояний от любой точки этой кривой до фокусов равна длине нити, т.е. равна постоянной величине.



# Итоговый чертёж

