МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Курс лекций для ЭМО-51, МО-51
филиала СПбГИЭУ в Вологде
2006-2007учебный год

Автор:
ЕГОРОВА .Е.Ю.

Часть 9:

ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Метод является универсальным, так как позволяет решить практически любую задачу линейного программирования, записанную в каноническом виде.

Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана)

начиная с некоторого исходного опорного решения осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному.

Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает.

Так как число опорных решений конечно, то через конечное число шагов получим оптимальное опорное решение.

Опорным решением называется базисное неотрицательное решение

АЛГОРИТМ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА

1. Математическая модель задачи должна быть канонической. Если она неканоническая, то ее надо привести к каноническому виду.

Чтобы перейти от неканонической модели к канонической, необходимо в каждое неравенство ввести балансовую переменную x_{n+i}. Если знак неравенства $\leq$, то балансовая переменная вводится со знаком «плюс», если знак неравенства $\geq$, то — «минус». В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

c_i	БП	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_n	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_n	b_i
c_1	x_1	1	0	$\dots$	0	$h_{1,m+1}$	$\dots$	h_{1n}	f_1
c_2	x_2	0	1	$\dots$	0	$h_{2,m+1}$	$\dots$	h_{2n}	f_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_m	x_m	0	0	$\dots$	1	$h_{m,m+1}$	$\dots$	h_{mn}	f_m
	Δ_j	0	0	$\dots$	0	Δ_{m+1}	$\dots$	Δ_n	$L(\bar{x}_1)$

2. Заполняем симплексную таблицу

Все строки таблицы 1-го шага, за исключением строки Δ_j (индексная строка), заполняем по данным системы ограничений и целевой функции.

В первом столбце таблицы (С баз) записывают коэффициенты целевой функции (С1, С2 …Cm) при базисных переменных (напомним, что в базис входят только векторы, образующую единичную подматрицу, как в нашем случае А1 / Аm).

Во втором столбце (Базис плана) должны находиться базисные векторы данного опорного плана,

а в третьем столбце (План Х) - правая часть ограничений задачи (базисные компоненты плана).

Таким образом, перемножая элементы первого столбца таблицы со столбцом - "План X", и суммируя эти произведения, мы получаем значение целевой функции (ячейка - $L(X)=C1*B1 + C2*B2+\ldots+$ $+Cm*Bm$).

Первая строка симплексной таблицы содержит коэффициенты линейной функции нашей задачи и остается неизменной на протяжении всего решения (C1, C2, …, Cn).

В центральной части таблицы записывают коэффициенты при неизвестных в ограничениях исходной задачи (Z11,…, Z1n,…, Zm1,…, Zmn).

При этом следует заметить, что коэффициенты при базисных переменных в ограничениях задачи составляют единичную подматрицу.

В центральной части таблицы записывают коэффициенты при неизвестных в ограничениях исходной задачи (Z11,…, Z1n,…, Zm1,…, Zmn).

При этом следует заметить, что коэффициенты при базисных переменных в ограничениях задачи составляют единичную подматрицу.

Индексная строка (нижняя) для переменных находится по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j \quad j = \overline{1, n}$$

и по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i$$ для свободного члена.

3. Находим исходное опорное решение (опорный план)

Если в системе векторов коэффициентов при переменных в целевой функции (матрице А) обнаруживается подсистема, образующая единичную подматрицу, то эти векторы образуют базис опорного плана и вектор правой части определяет базисные компоненты этого плана.

Если такой единичной подматрицы не обнаруживается, то либо придется перебирать все подсистемы m уравнений с m неизвестными в надежде обнаружить неотрицательные решения, либо прибегнуть к *методу искусственного базиса.*

Если такой единичной подматрицы не обнаруживается, то либо придется перебирать все подсистемы m уравнений с m неизвестными в надежде обнаружить неотрицательные решения, либо прибегнуть к *методу искусственного базиса.*

Метод искусственного базиса заключается в том, что для получения единичной подматрицы коэффициентов мы вводим в исходную задачу неотрицательные т. н. искусственные переменные и включаем их в целевую функцию (линейную форму) с коэффициентом +М для задачи минимизации и с коэффициентом - М для задачи минимизации, где М>0 - сколь угодно большое число. Полученная М-задача решается до получения оптимального плана.

4. Проверяем опорное решение на оптимальность.

при решении задачи на максимум:

— если все оценки, $\Delta_j \geq 0$, то найденное решение оптимальное;

если хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$, но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как, т.е. целевая $L(\bar{x}) \to \infty$ функция неограничена в области допустимых решений;

— если хотя бы одна оценка отрицательная, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению;

—

переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как, т.е. целевая $L(\bar{x}) \to \infty$ функция неограничена в области допустимых решений;

— если хотя бы одна оценка отрицательная, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению;

— если отрицательных оценок в индексной строке несколько, то в столбец базисной переменной (БП) вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка.

5. Выбор ключевого элемента.

Если хотя бы одна оценка $\Delta_k < 0$, то k-й столбец принимаем за ключевой. За ключевую строку принимаем ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов (b_i) к положительным коэффициентам *к-го* столбца. Элемент, находящийся на пересечении ключевых строки и столбца, называется *ключевым элементом.*

6. Заполняем симплексную таблицу 2-го шага:

— переписываем ключевую строку, разделив ее на ключевой элемент;

— заполняем базисные столбцы;

— остальные коэффициенты таблицы находим по правилу "прямоугольника"

Правило "прямоугольника" заключается в следующем. Пусть ключевым элементом 1-го шага является элемент 1-й строки $(m+1)$-го столбца $h_{1,m+1}$. Тогда элемент i-й строки $(m+2)$-го столбца 2-го шага — обозначим его $h'_{i,m+2}$ — согласно правилу "прямоугольника" выражается формулой

$$h'_{i,m+2} = \frac{h_{1,m+1} \cdot h_{i,m+2} - h_{i,m+1} \cdot h_{1,m+2}}{h_{1,m+1}}$$

где $h_{i,m+2}$, $h_{i,m+1}$, $h_{1,m+1}$ — элементы 1-го шага.

Оценки можно считать по приведенным выше формулам или по правилу "прямоугольника".

Получаем новое опорное решение, которое проверяем на оптимальность, и т.д.

Примечание. Если целевая функция $L(\bar{x})$ **требует нахождения минимального значения, то критерием оптимальности задачи является неположительность оценок** Δ_j **при всех** $j = \overline{1, n}$.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 3 тыс. изделий, при втором — 4 тыс. изделий. Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

РЕШЕНИЕ

x_1— время работы предприятия первым способом,

x_2 — время работы предприятия вторым способом.

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 3 тыс. изделий, при втором — 4 тыс. изделий. Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

РЕШЕНИЕ

x_1— время работы предприятия первым способом,

x_2 — время работы предприятия вторым способом.

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Составляем симплексную таблицу 1-го шага

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	2	1	0	0	4
0	x_4	1	1	0	1	0	3
0	x_5	1	1	0	0	1	8
	Δ_j	-3	-4	0	0	0	0

Составляем симплексную таблицу 1-го шага

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	2	1	0	0	4
0	x_4	1	1	0	1	0	3
0	x_5	1	1	0	0	1	8
	Δ_j	−3	−4	0	0	0	0

Получим решение: $\bar{X}_1 = (0, 0, 4, 3, 8) \qquad L(\bar{x}_1) = 0$

Вернуть обычный режим

Составляем симплексную таблицу 1-го шага

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	2	1	0	0	4
0	x_4	1	1	0	1	0	3
0	x_5	1	1	0	0	1	8
	Δ_j	−3	−4	0	0	0	0

Получим решение: $\bar{X}_1 = (0, 0, 4, 3, 8) \qquad L(\bar{x}_1) = 0$

В индексной строке Δ_j имеются две отрицательные оценки, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

В качестве ключевого столбца следует принять столбец базисной переменной x_2, а за ключевую строку взять строку переменной x_3,

где $\min(4/2, 3/1, 8/1) = \min(2, 3, 8) = 2$

Ключевым элементом является 2.

Вводим в столбец базисной переменной x_2, выводим x_3.

Составляем симплексную таблицу 2-го шага

c_i	БП	**3**	**4**	**0**	**0**	**0**	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	1/2	1	1/2	0	0	2
0	x_4	1/2	0	−1/2	1	0	1
0	x_5	3/2	0	−1/2	1	1	6
	Δ_j	−1	0	2	0	0	8

Получим $\bar{X}_2 = (0, 2, 0, 1, 6) \quad L(\bar{x}_2) = 8$.

В индексной строке имеется одна отрицательная оценка. Полученное решение можно улучшить.

Ключевым элементом является $1/2$.

Составляем симплексную таблицу 3-го шага

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	0	1	1	−1	0	1
3	x_1	1	0	−1	2	0	2
0	x_5	0	0	1	−3	1	3
	Δ_j	0	0	1	2	0	10

Все оценки свободных переменных $\Delta_j \geq 0$, следовательно, найденное опорное решение является оптимальным:

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (2, 1, 0, 0, 3) \quad L(\bar{x})_{\max} = 10$$

Таким образом, по первому способу предприятие **должно р**аботать два месяца, по второму — один месяц, при этом максимальный выпуск продукции составит 10 тыс. ед.

Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана)

начиная с некоторого исходного опорного решения осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному.

Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает.

Так как число опорных решений конечно, то через конечное число шагов получим оптимальное опорное решение.

Опорным решением называется базисное неотрицательное решение

1. Найти область решений и область допустимых решений системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \qquad\qquad a_{32}x_2 \leq b_3. \end{cases}$$

Значения коэффициентов системы ограничений системы неравенств

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	−5	6	−3	5	5	1	1	5	10	1
a_{12}	7	−4	2	−7	4	1	1	4	−5	1
b_1	35	24	6	35	20	1	7	20	50	2
a_{21}	5	7	1	9	7	−1	4	−3	6	−1
a_{22}	6	4	1	7	2	1	−3	5	5	1
b_2	30	28	3	63	14	4	12	15	30	2
b_3	6	3	−5	−4	4	−1	−3	6	−2	5
a_{32}	1	1	−1	−1	1	−1	−1	1	−1	1

2. Найти область решений
и область допустимых решений
и определить координаты
угловых
точек области допустимых
решений системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ \qquad x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

*Значения
коэффициент
ов
системы
ограничений
системы
неравенств*

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	2	3	5	1	2	3	10	1	3	1
a_{12}	3	2	1	1	1	1	3	1	2	2
b_1	6	6	5	1	2	3	30	4	6	2
a_{21}	9	1	−1	−1	1	−6	−2	−3	3	2
a_{22}	−6	−1	1	3	−4	2	5	2	−2	−1
b_2	54	1	1	3	4	12	10	6	6	2
a_{31}	7	6	5	8	4	5	8	5	5	7
a_{32}	10	5	10	5	6	4	6	7	6	4
b_3	70	30	50	40	24	20	48	35	30	28

3. Дана задача линейного программирования

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \le b_4, \\ \qquad\qquad x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Графическим методом найти оптимальные решения при стремлении целевой функции к максимальному и минимальному значениям.

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	2	3	−1	1	−1	−2	1	−1	3	0
c_2	1	−1	1	3	−2	2	1	−1	0	2
a_{11}	7	5	−1	12	3	1	7	−1	−3	−1
a_{12}	8	2	1	5	1	−2	6	−2	2	1
b_1	56	30	2	60	12	2	42	−2	−6	2
a_{21}	−2	−3	−2	−3	−3	−2	−2	−2	2	6
a_{22}	3	−2	−3	2	1	3	1	3	1	7
b_2	6	−6	−6	6	3	6	4	12	14	42
a_{31}	−2	−1	1	−1	−1	−1	3	−2	3	1
a_{32}	1	1	−3	2	1	3	−2	3	−4	−2
b_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_{41}	1	0	0	−1	0	1	0	1	0	−1
a_{42}	0	1	1	0	1	0	−1	0	1	0
b_4	6	5	4	−2	5	4	−2	5	6	−2

Составить математическую модель и провести экономический анализ задачи с использованием графического метода.

5.4. Фирма изготовляет два вида красок для внутренних *(В)* и наружных *(Н)* работ. Для их производства используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные запасы указаны в таблице. *Расход и суточные запасы исходных продуктов*

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 т краски		Суточный запас, т
	Краска *Н*	Краска *В*	
Пигмент	a_{11}	a_{12}	b_1
Олифа	a_{21}	a_{22}	b_2

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для наружных (внутренних) работ никогда не превышает b_3 т в сутки. Цена продажи 1 т краски для наружных работ — c_1 ден. ед., для внутренних работ — c_2 ден. ед.

Какое количество краски каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был мак-симальным?

Значения коэффициентов условий задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	3	1	1	2	3	2	1	3	2	4
c_2	2	1	4	2	2	1	2	4	3	5
a_{11}	1	2	3	3	1	3	3	1	1	1
a_{12}	2	1	2	1	1	4	1	1	1	2
b_1	6	6	12	3	4	24	6	6	7	8
a_{21}	2	1	1	3	4	2	1	2	2	4
a_{22}	1	2	2	2	1	1	1	1	1	3
b_2	8	6	6	12	8	8	5	8	10	24
k_1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
k_2	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
b_3	2	2,5	3,5	4	4	3	1	4,5	6	3

П р и м е ч а н и е . Если по условию задания спрос на краску для наружных (внутренних) работ не превышает b_3 т в сутки, то в математической модели задачи следует принять, что коэффициент системы ограничений при неизвестном значении краски для наружных (внутренних) работ, обозначенный в таблице $k_1(k_2)$, равен 1 (0), а при неизвестном значении краски для внутренних (наружных) работ $k_2(k_1)$ равен 0(1).