

# Тест на математическое мышление

*Mark Zelman*

*Moscow , December 2005*

# **Mathematical Reasoning Test**

# High stakes assessment



# Цели теста:

- оценить мыслительные способности на основе базового математического материала, который изучается студентами таких математических специальностей, как строительство, физические науки, естественные науки, компьютерные и информационные технологии, экономика, чистая математика и т.д.;
- оценить уровень владения математическими навыками и концепциями в рамках этого материала.

# Purpose of the Test

- **To assess the ability to reason within the core mathematical material that is studied by undergraduates in fields such as engineering, physical sciences, life sciences, computer and information sciences, economics, pure mathematics, etc.**
- **To assess mastery of mathematical skills and concepts in this material**

# Отчеты по результатам тестирования:

- используются для оценки квалификации кандидатов на обучение в университете;
- используются для выявления различий в подготовке кандидатов на основе специфических требований пользователя;
- используются для предоставления диагностической информации испытуемым.

# Score Reports

- **Used to assess qualifications of applicants for admission to universities**
- **Used to differentiate between candidates *based on the user's specific requirements***
- **Used to provide diagnostic information to test takers**

# Способности к математическому мышлению:

- стратегия решения задач;
- логическое мышление;
- математическое моделирование;
- закономерности и подобие;
- оценка и аппроксимация.



# Mathematical Reasoning Capabilities

- **Problem Solving Strategies**
- **Logical Reasoning**
- **Mathematical Modeling**
- **Patterns and Similarities**
- **Estimation and Approximation**

## Математическое содержание:

- арифметика и алгебра, включая элементарную линейную алгебру;
- геометрия и аналитическая геометрия;
- функции и графики, экспоненциальные функции;
- конечная (или дискретная) математика, включая вопросы дискретной вероятности и статистики.

# Mathematical Content

- **Arithmetic and algebra, including elementary linear algebra**
- **Geometry and analytic geometry**
- **Functions and graphs, including trigonometric and exponential functions**
- **Calculus, with elementary differential equations**
- **Finite (or discrete) mathematics, including discrete probability and statistics**

# Mathematical Competences

- **Reading and understanding information given in various formats.**
- **Interpreting quantitative information and drawing inferences from it.**
- **Solving problems, using arithmetical, algebraic, geometric, or statistical methods**

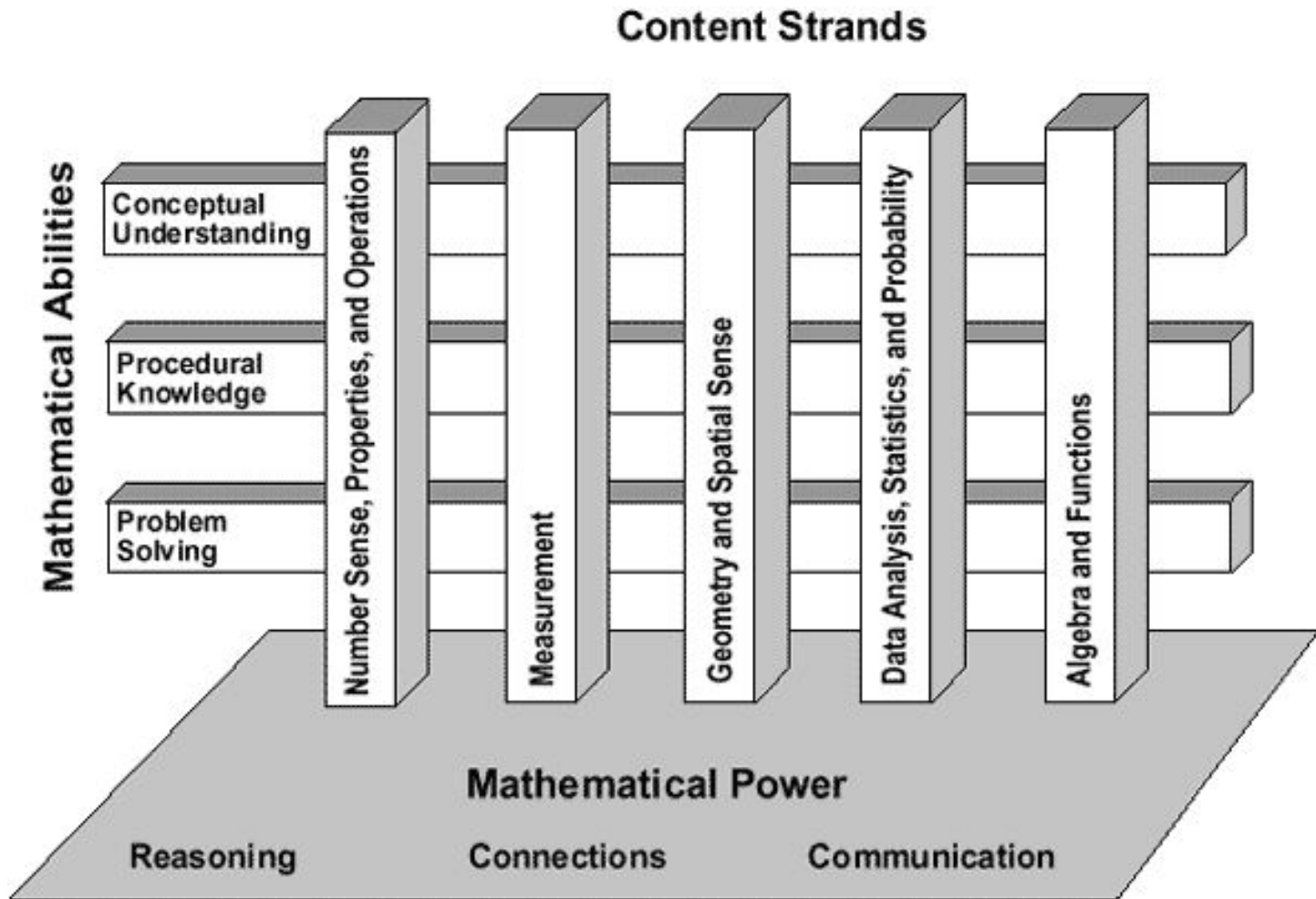
# Mathematical Competences

- **Using estimation to solve problems .**
- **Communicating quantitative information, active Communication originating from the examinee.**
- **Recognizing the limitations of mathematical or statistical methods**

# Mathematical Competences

- **Using estimation to solve problems .**
- **Communicating quantitative information, active Communication originating from the examinee. .**
- **Recognizing the limitations of mathematical or statistical methods**

# 3D- Framework



## Типы вопросов:

- **вопросы, которые требуют ответов в графическом виде, когда экзаменуемые манипулируют графическими элементами;**
- **вопросы, которые требуют числовых/алгебраических ответов, когда экзаменуемые вводят числовое или алгебраическое выражение;**
- **вопросы, которые требуют элективных ответов, когда экзаменуемые делают выбор (развитие обычных элективных вопросов несколькими способами).**



# Question Types

- **Graphical response, where examinees manipulate graphical elements**
- **Numeric/Algebraic response, where examinees enter a number or algebraic expression**
- **Selection response, where examinees indicate selections (extending the regular multiple-choice type in several ways)**

## Другие характеристики:

- многие вопросы потребуют от экзаменуемых моделирования реальных жизненных ситуаций с использованием математики в перечисленных предметных областях;
- тест будет проводиться на компьютерах;
- калькулятор, предназначенный для научных целей, будет отображаться на экране компьютера;
- экзаменующимся будет предоставлен отчет с диагностическими баллами, который поможет им определить свои сильные и слабые стороны

## Other Features

- **Many questions would require examinees to model real-life applications using mathematics in the content areas listed.**
- **The test could be administered via computer.**
- **A scientific calculator would be available on the computer screen.**
- **A diagnostic score report would be given to help identify areas of strengths and weaknesses.**

The background features a collage of mathematical and technical elements. It includes a coordinate system with a curve, a rectangular box, a ruler, and various mathematical notations such as  $\frac{60 dy}{a\%}$ ,  $z$ ,  $1.0$ ,  $0.0$ ,  $8/10$ ,  $100$ , and  $4 6 8 10$ .

**Добро пожаловать в  
тест на математическое мышление**

A collage of mathematical symbols and diagrams. It includes a ruler, a graph with a curve, a box, and various mathematical notations like  $60 \frac{dy}{dx} =$ ,  $z$ , and  $\%$ .

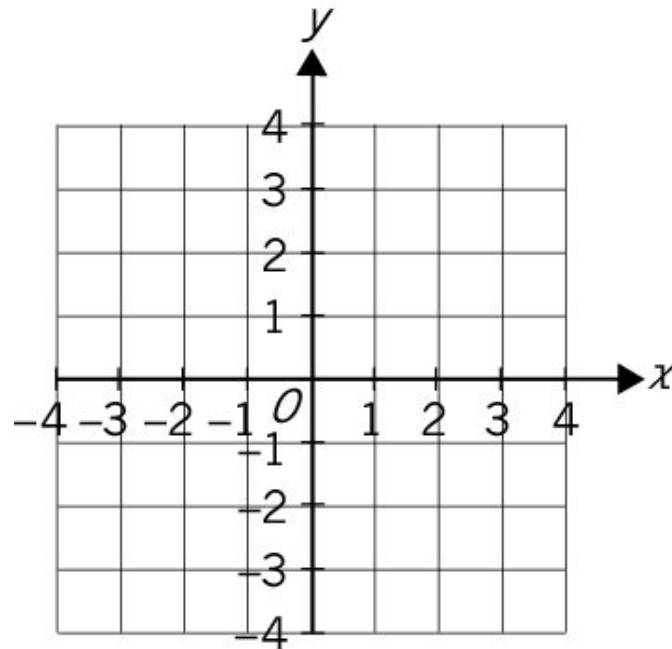
**Welcome to the Mathematical Reasoning Test**

**Мыслительные способности: оценка и аппроксимация**

**Математическое содержание: функции и графики**

**Тип вопроса: графический**

В представленной системе координат закрасьте квадрат размером  $1 \times 1$ , в котором находится точка пересечения графиков  $y = 2\cos(x - \pi)$  и  $y = -x + 1$ .



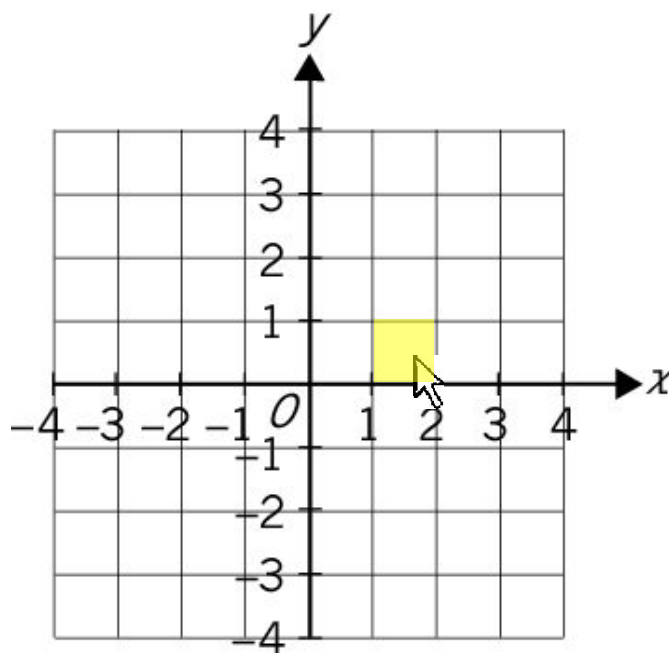
Сделайте щелчок мышью, чтобы подсветить квадрат.

**Мыслительные способности: оценка и аппроксимация**

**Математическое содержание: функции и графики**

**Тип вопроса: графический**

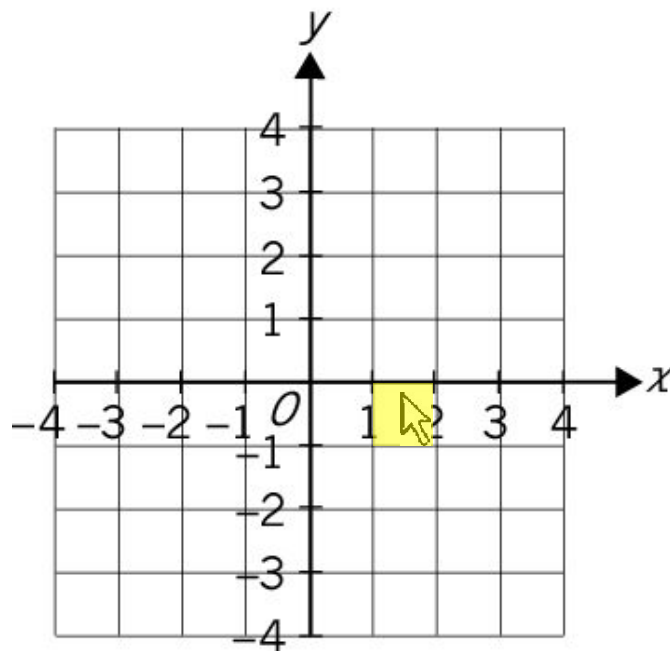
На представленной системе координат закрасьте квадрат размером  $1 \times 1$ , в котором находится точка пересечения графиков  $y = 2\cos(x - \pi)$  и  $y = -x + 1$ .



**Правильный ответ**

**Reasoning Capability:** Estimation and Approximation  
**Mathematical Content:** Functions and Graphs  
**Question Type:** Graphical Response

In the coordinate system shown, shade the  $1 \times 1$  square that contains the point of intersection of the graphs of  $y = 2\cos(x - \pi)$  and  $y = -x + 1$ .

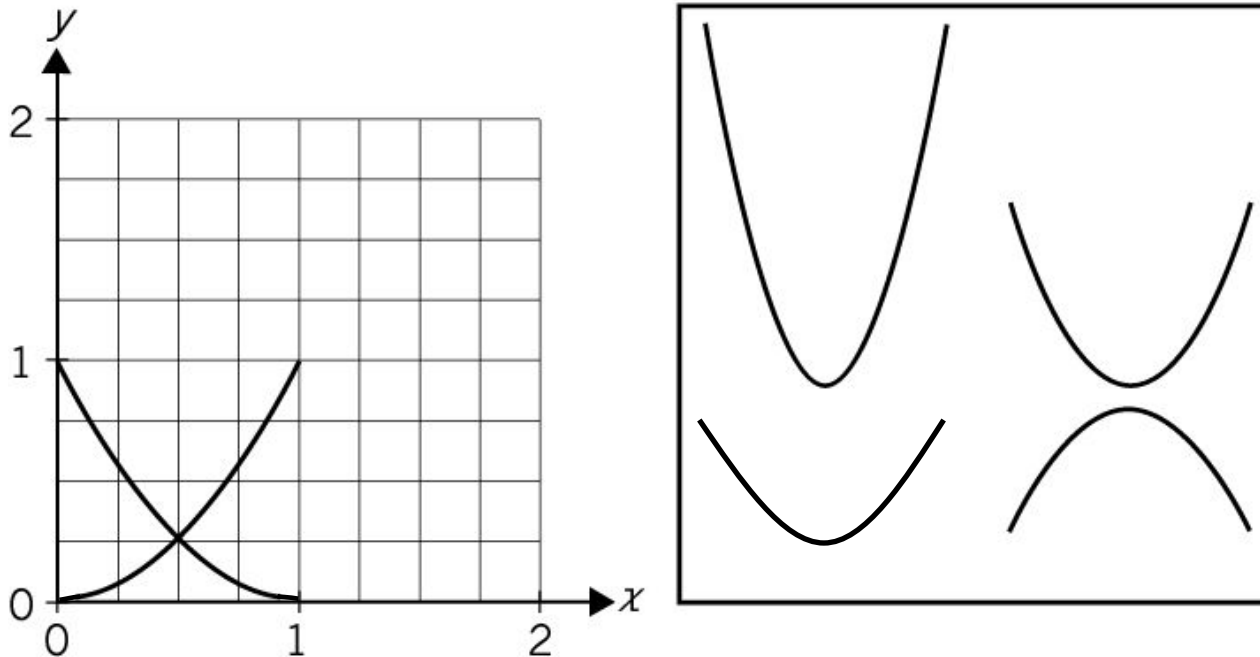


Correct Answer



**Мыслительные способности: закономерности и подобие**  
**Математическое содержание: функции и графики**  
**Тип вопроса: графический**

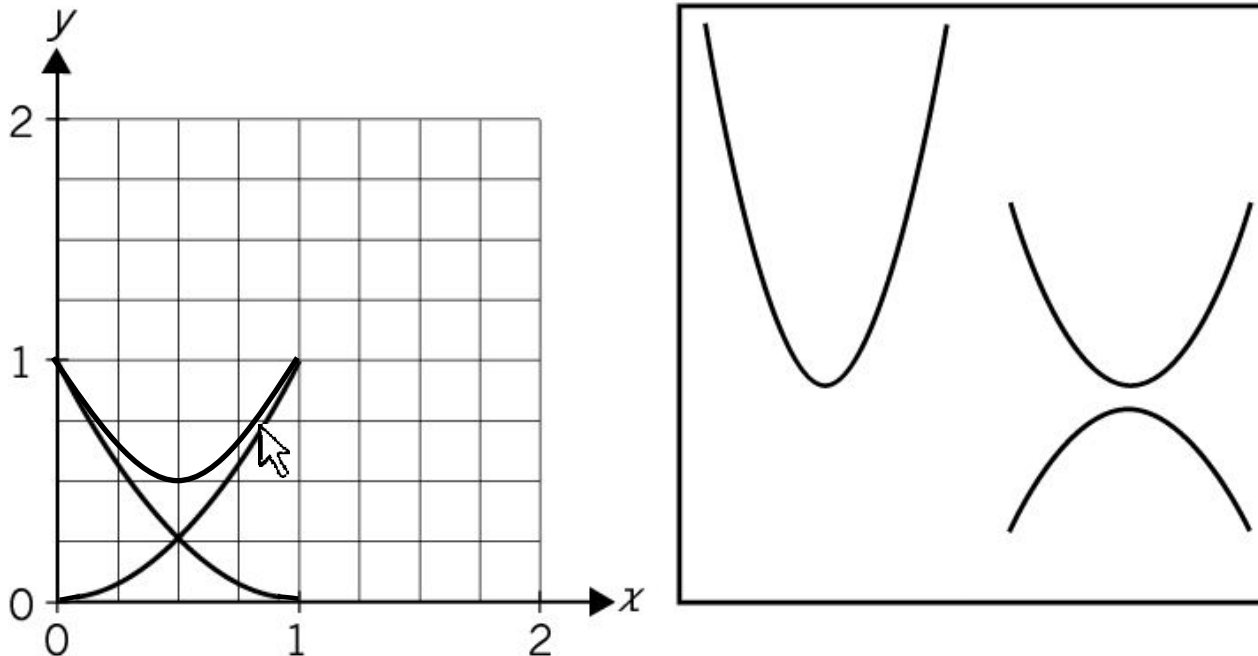
Графики двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$  построены в системе координат внизу слева. Постройте график функции  $y = f(x) + g(x)$ , выбрав одну из четырех кривых, представленных в рамке внизу справа, и поместив ее в систему координат.



Сделайте щелчок мышью на объекте, который вы желаете поместить на систему координат, а затем перетащите его в нужное место.

**Мыслительные способности: закономерности и подобие**  
**Математическое содержание: функции и графики**  
**Тип вопроса: графический**

Графики двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$  построены в системе координат внизу слева. Постройте график функции  $y = f(x) + g(x)$ , выбрав одну из четырех кривых, представленных в рамке внизу справа, и поместив ее в систему координат.

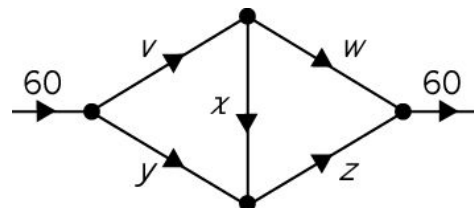


Правильный ответ

Мыслительные способности: стратегия решения задач

Математическое содержание: линейная алгебра

Тип вопроса: числовой/алгебраический



На рисунке выше схематично представлена сеть водопроводных труб. Вода вливается в сеть слева со скоростью 60 галлонов в минуту и вытекает из сети справа с той же скоростью. Каждая переменная на рисунке представляет собой скорость, выраженную в галлонах в минуту, с которой вода течет через соответствующую трубу в указанном направлении. В каждом из четырех узлов, обозначенных точкой, количество воды, вливающейся в минуту, равно количеству воды, вытекающей из узла. Чему будет равняться переменная  $x$ , выраженная через  $v$  и  $z$ ?

$x =$

галлонов в минуту

<input type="radio"/> Exponent	7	8	9	0	+	-	√
<input type="radio"/> Subscript	4	5	6	$a-z$	*	÷	∛
Clear	«Del	1	2	3	.	{ }	$\pi$

Введите выражение, используя экранную клавиатуру.

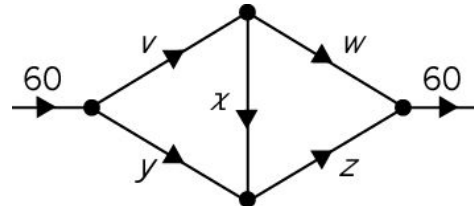
CALCULATOR

MENU

BACK

NEXT

**Мыслительные способности: стратегия решения задач**  
**Математическое содержание: линейная алгебра**  
**Тип вопроса: числовой/алгебраический**



На рисунке выше схематично представлена сеть водопроводных труб. Вода вливается в сеть слева со скоростью 60 галлонов в минуту и вытекает из сети справа с той же скоростью. Каждая переменная на рисунке представляет собой скорость, выраженную в галлонах в минуту, с которой вода течет через соответствующую трубу в указанном направлении. В каждом из четырех узлов, обозначенных точкой, количество воды, вливающейся в минуту, равно количеству воды, вытекающей из узла. Чему будет равняться переменная  $x$ , выраженная через  $v$  и  $z$ ?

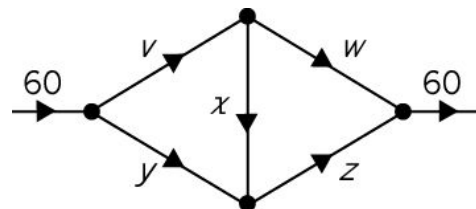
$x =$   галлонов в минуту

<input type="radio"/> Exponent	7	8	9	0	+	-	√
<input type="radio"/> Subscript	4	5	6	$a-z$	*	÷	∛
Clear	«Del	1	2	3	.	{ }	$\pi$

**Правильный ответ**

Reasoning Capability:  
Mathematical Content:  
Question Type: Numeric/Algebraic Response

Problem Solving Strategies  
Linear Algebra



The figure above represents a network of water pipes. Water flows into the network from the left at a rate of 60 gallons per minute, and it flows out of the network to the right at the same rate. Each variable in the figure represents the rate, in gallons per minute, at which water flows through the corresponding pipe in the direction indicated. At each of the four junction points, represented by a dot, the amount of water per minute flowing into the junction is equal to the amount of water per minute flowing out of the junction. What is  $x$  in terms of  $v$  and  $z$ ?

$x =$

$$v + z - 60$$

gallons per minute

<input type="radio"/> Exponent	7	8	9	0	+	-	√	
<input type="radio"/> Subscript	4	5	6	a-z	*	÷	∛	
Clear	«Del	1	2	3	.	{	}	π

Correct Answer

CALCULATOR

MENU

BACK

NEXT

**Мыслительные способности: математическое моделирование**

**Математическое содержание: функции и графики**

**Тип вопроса: числовой/алгебраический**

Совокупные продажи бестселлера  $S$  в миллионах долларов в течение первых  $t$  лет после публикации смоделированы по формуле:

$$S = Ae^{b/t} \text{ при } t > 0$$

Где  $A$  и  $b$  – постоянные величины. Модель предсказывает, что в итоге будет продано 30 миллионов экземпляров книги, то есть  $\lim_{t \rightarrow \infty} S = 30$ .

Если в течение первых двух лет после публикации будет продано 6 миллионов экземпляров, какими будут значения  $A$  и  $b$ ?

Дайте ответ с точностью до 0,01.

$A =$    
 $B =$

Щелкните мышью на каждой рамке, затем введите число. Используйте клавишу Back Space, для удаления неверных данных.

CALCULATOR

MENU

BACK

NEXT

**Мыслительные способности: математическое моделирование**

**Математическое содержание: функции и графики**

**Тип вопроса: числовой/алгебраический**

Совокупные продажи бестселлера  $S$  в миллионах долларов в течение первых  $t$  лет после публикации смоделированы по формуле:

$$S = Ae^{b/t} \text{ при } t > 0$$

Где  $A$  и  $b$  – постоянные величины. Модель предсказывает, что в итоге будет продано 30 миллионов экземпляров книги, то есть  $\lim_{t \rightarrow \infty} S = 30$ .

Если в течение первых двух лет после публикации будет продано 6 миллионов экземпляров, какими будут значения  $A$  и  $b$ ?

Дайте ответ с точностью до 0,01.

$$A = \boxed{30}$$
$$B = \boxed{-3,22}$$

Правильный ответ

Мыслительные способности: логическое мышление

Математическое содержание: арифметика (теория чисел)

Тип вопроса: элективный

В следующих утверждениях  $a$  и  $b$  – целые числа. Выберите два утверждения и поместите их в рамки ниже таким образом, чтобы результирующее утверждение было истинным.

·  $b$  – четное число

Утверждения ·  $a - b$  – четное число

·  $ab + a$  – четное число

Если  тогда .

Щелкните мышью на варианте, затем щелкните на рамке.

CALCULATOR

MENU

BACK

NEXT



Мыслительные способности: логическое мышление  
Математическое содержание: арифметика (теория чисел)  
Тип вопроса: элективный

В следующих утверждениях  $a$  и  $b$  – целые числа. Выберите два утверждения и поместите их в рамки ниже таким образом, чтобы результирующее утверждение было истинным.

·  $b$  – четное число  
Утверждения ·  $a - b$  – четное число  
·  $ab + a$  – четное число  
Если  $\boxed{a - b \text{ – четное}} \text{ число}$  тогда  $\boxed{ab + a \text{ – четное}} \text{ число}$  .

Правильный ответ

CALCULATOR

MENU

BACK

NEXT

**Reasoning Capability:** Logical Reasoning  
**Mathematical Content:** Arithmetic (Number Theory)  
**Question Type:** Selection Response

In the following statements,  $a$  and  $b$  are integers. Select two of the statements and place them in the boxes below so that the resulting statement is true.

- Statements:
- $b$  is even
  - $a - b$  is even
  - $ab + a$  is even

If  $a - b$  is even, then  $ab + a$  is even.

Correct Answer

**Мыслительные способности: математическое моделирование**

**Математическое содержание: алгебра**

**Тип вопроса: элективный**

Для некоторого газа отношение между его количеством  $n$ , давлением  $P$ , объемом  $V$  и абсолютной температурой  $T$  выражается уравнением:

$$PV = nRT$$

где  $R$  является положительным постоянным числом. Предположив, что количество  $n$  является постоянным, можно ли на основе формулы прийти к каждому из следующих утверждений?

Утверждение	Можно прийти	Нельзя прийти
Если $P$ и $V$ повышаются, то тогда $T$ повышается тоже.		
Если $T$ понижается, то тогда $P$ и $V$ понижаются тоже.		
Если $P$ повышается, а $V$ понижается, то тогда $T$ не изменяется.		

Щелкните мышью на выбранном варианте.

**Мыслительные способности: математическое моделирование**

**Математическое содержание: алгебра**

**Тип вопроса: элективный**

Для некоторого газа отношение между его количеством  $n$ , давлением  $P$ , объемом  $V$  и абсолютной температурой  $T$  выражается уравнением:

$$PV = nRT$$

где  $R$  является положительным постоянным числом. Предположив, что количество  $n$  является постоянным, можно ли на основе формулы прийти к каждому из следующих утверждений?

Утверждение	Можно прийти	Нельзя прийти
Если $P$ и $V$ повышаются, то тогда $T$ повышается тоже.		
Если $T$ понижается, то тогда $P$ и $V$ понижаются тоже.		
Если $P$ повышается, а $V$ понижается, то тогда $T$ не изменяется.		

Правильный ответ

CALCULATOR

MENU

BACK

NEXT

**Reasoning Capability:** Mathematical Modeling  
**Mathematical Content:** Algebra  
**Question Type:** Selection Response

For a certain gas, the relationship between the amount  $n$  of the gas, its pressure  $P$ , its volume  $V$ , and its absolute temperature  $T$  is modeled by the equation

$$PV = nRT$$

where  $R$  is a positive constant. Assuming that the amount  $n$  is constant, indicate for each of the following statements whether the statement can be concluded or cannot be concluded from the model.

Statement	Can Be Concluded	Cannot Be Concluded
If both $P$ and $V$ increase, then $T$ increases.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
If $T$ decreases, then both $P$ and $V$ decrease.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
If $P$ increases and $V$ decreases, then $T$ does not change.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**Correct Answer**

**CALCULATOR**

**MENU**

**BACK**

**NEXT**

**Мыслительные способности: логическое мышление**

**Математическое содержание: дискретная математика (теория множеств)**

**Тип вопроса: элективный**

Все курсанты, проходившие обучение по некоторой программе по подготовке летчиков, должны сдать как письменный тест, так и тест по управлению самолетами. Если 70 % курсантов сдали письменный тест, то какой процент курсантов сдали оба теста?

Какие два из следующих утверждений вместе дают достаточную дополнительную информацию, чтобы ответить на этот вопрос?

- По программе обучались 120 курсантов.
- 24 курсанта не сдали тест по управлению самолетами
- 10 % курсантов не сдали ни одного теста.
- 30 % курсантов не сдали письменный тест.
- 80 % курсантов прошли тест по управлению самолетами

**Щелкните мышью на выбранных вариантах.**

**CALCULATOR**

**MENU**

**BACK**

**NEXT**

**Мыслительные способности: логическое мышление**

**Математическое содержание: дискретная математика (теория множеств)**

**Тип вопроса: элективный**

Все курсанты, проходившие обучение по некоторой программе по подготовке летчиков, должны сдать как письменный тест, так и тест по управлению самолетами. Если 70 % курсантов сдали письменный тест, то какой процент курсантов сдали оба теста?

Какие два из следующих утверждений вместе дают достаточную дополнительную информацию, чтобы ответить на вопрос?

- По программе обучались 120 курсантов.
- 24 курсанта не сдали тест по управлению самолетами
- 10 % курсантов не сдали ни одного теста.
- 30 % курсантов не сдали письменный тест.
- 80 % курсантов прошли тест по управлению самолетами.

**Правильный ответ**

**CALCULATOR**

**MENU**

**BACK**

**NEXT**

**Reasoning Capability:** Logical Reasoning  
**Mathematical Content:** Discrete Mathematics (Set Theory)  
**Question Type:** Selection Response

All trainees in a certain aviator training program must take both a written test and a flight test. If 70% of the trainees passed the written test, what percent of the trainees passed both tests?

Which two of the following statements together provide sufficient additional information to answer the question?

- There were 120 trainees in the training program.
- 24 trainees did not pass the flight test.
- 10% of the trainees did not pass either test.
- 30% of the trainees did not pass the written test.
- 80% of the trainees passed the flight test.

**Correct Answer**



# План отчета о результатах теста

План отчета о результатах теста включает следующие пункты:

- общий шкалированный балл;
- оценку по категориям;
- рекомендации.

# **Score Report Sketch**

**The score report would consist of**

- **Overall scaled score**
- **Evaluations by category**
- **Verbal recommendations**

# План отчета о результатах теста (продолжение)

Общий шкалированный балл: 710

Категория математического мышления	Уровень достижений		
	Продвинутый	Средний	Минимальный
Стратегия решения задач	✓		
Логическое мышление	✓		
Математическое моделирование	✓		
Закономерности и сходство		✓	
Оценка и аппроксимация			✓

“Ваши показатели по решению задач из категорий стратегия решения задач, логическое мышление и математическое моделирование находятся на высоком уровне, поэтому Вам следует продолжить заниматься решением задач и разработкой проектов, которые требуют этих мыслительных способностей. Ваши показатели в категории оценка и аппроксимация находятся на минимальном уровне, и поэтому Вы должны изучать методы и вырабатывать навыки, необходимые для развития этого вида математического мышления, а также практиковаться в решении соответствующих задач.”

# Score Report Sketch *(continued)*

**Overall Scaled Score: 710**

<b>Mathematical Reasoning Category</b>	<b>Performance Level</b>		
	<b>Advanced</b>	<b>Moderate</b>	<b>Minimal</b>
<b>Problem Solving Strategies</b>	✓		
<b>Logical Reasoning</b>	✓		
<b>Mathematical Modeling</b>	✓		
<b>Patterns and Similarities</b>		✓	
<b>Estimation and Approximation</b>			✓

“Your performance in each of problem solving strategies, logical reasoning, and mathematical modeling was at an advanced level, so you should continue to challenge yourself with problems and projects that require these reasoning capabilities. Your performance in estimation and approximation is at a minimal level, so you should study skills and techniques required for this kind of mathematical reasoning and practice related problems.”

# План отчета о результатах теста (продолжение)

Математическое содержание	Уровень достижений		
	Продвинутый	Средний	Минимальный
Арифметика и алгебра	✓		
Геометрия и аналитическая геометрия		✓	
Функции и графики		✓	
Расчеты		✓	
Конечная (или дискретная)			✓

математика

“Ваши показатели по производству вычислений находятся на среднем уровне. Программа, на участие в которой Вы подали заявку, требует более высоких показателей, поэтому Вам необходимо изучить соответствующие материалы по производству вычислений и попрактиковаться в решении задач на вычисление.”