ГЕОМЕТРИЯ

ТЕМА:

ТРАПЕЦИЯ

Выполнил: ученик 10 “Б” класса

Средней школы № 1143

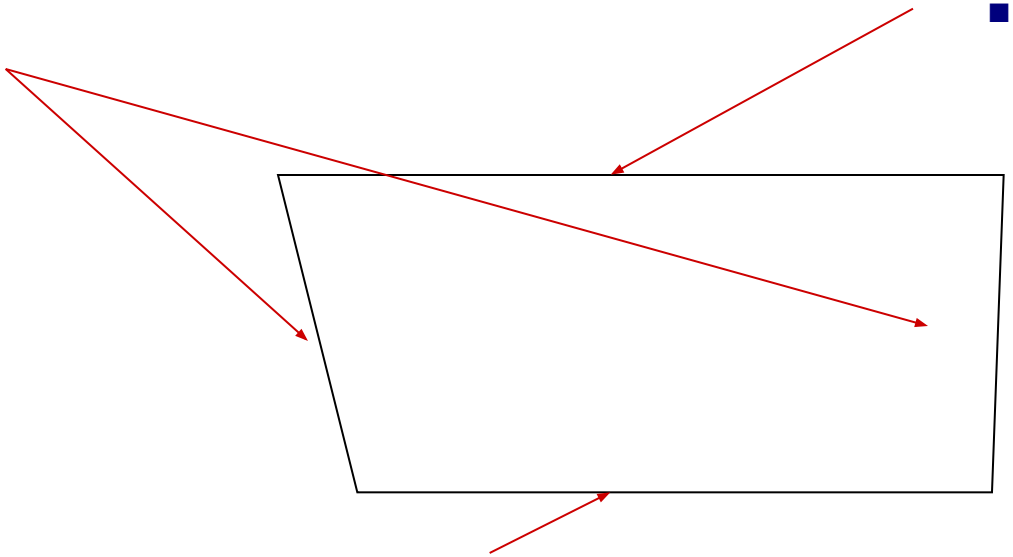
Галкин Владимир

Трапеция- это

четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны

- Основание трапеции

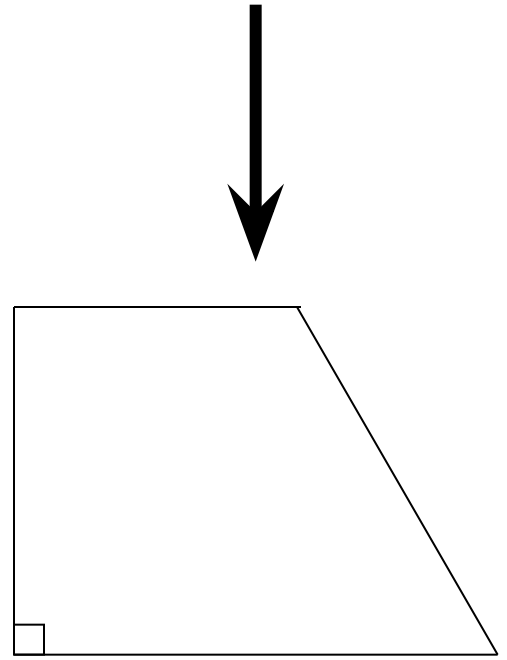
- Боковая сторона

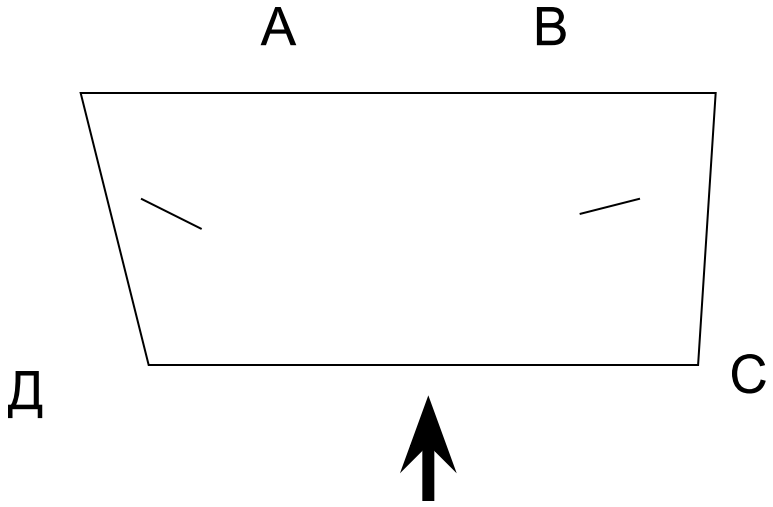


- Основание трапеции

Существуют разные виды трапеции:

- Прямоугольная





- Равнобедренная

Задачи

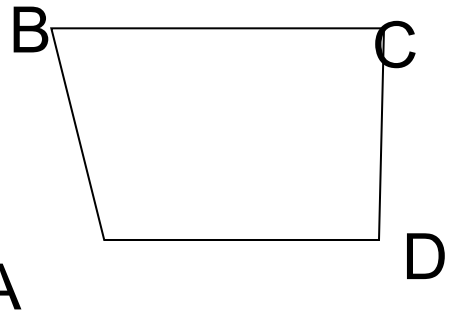
Часть А:

Задача 1:Найдите углы B и D трапеции ABCD с основаниями AD и BC, если $\angle A=36$, $\angle C=117$.

Дано:ABCD-трапеция ; $\angle A=36$; $\angle C=117$

Найти: $\angle B$, $\angle D$

Решение:



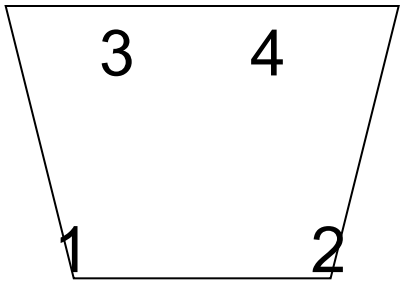
$\angle A+\angle B=180$, значит $\angle B=144$.

$\angle C+\angle B=180$, значит $\angle D=63$.

Задача 2:Один из углов равнобедренной трапеции равен 68.Найдите остальные углы трапеции.

Дано: трапеция, $\angle 1 = 68$.

Найти: $\angle 2, \angle 3, \angle 4$.



Решение:

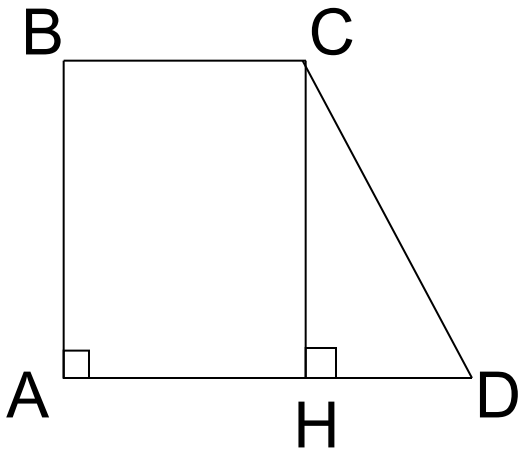
$\angle 1 = \angle 2$ (углы при основании равны)

$\angle 3 = 180 - \angle 1 = 112$.

$\angle 4 = \angle 3 = 112$.

$\angle 2 = 68$.

Задача 3: Основания прямоугольной трапеции равны 4 и 7, один из углов равен 60.Найти большую боковую сторону трапеции.



Дано:ABCD-трапеция. $\angle D=60$.

BC=4,AD=7.

Найти: CD-?

Решение:

Проведем высоту CH.

Тогда HD=AD-BC=3.

Применим теорему синусов

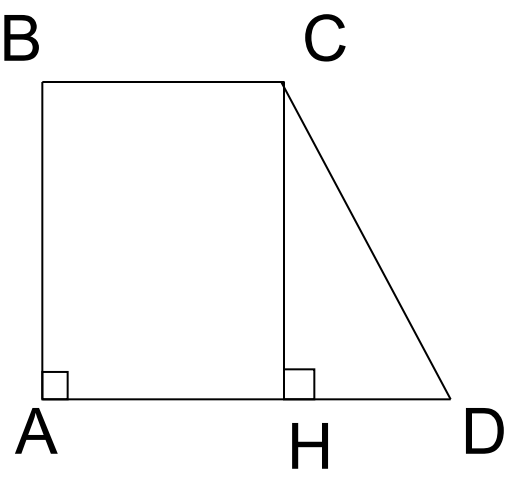
$\frac{HD}{\sin 30} = \frac{CH}{\sin 60}$ Отсюда CH= 3 корня из 3

$CD^2=9+27=36$ (Теорема Пифагора)

CD=6.

Задача 4: Найти площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6, а больший угол равен 135º.

Дано:ABCD-трапеция, $\angle A=90$;AB=BC=6; $\angle BCD=135^0$



Найти: S-?

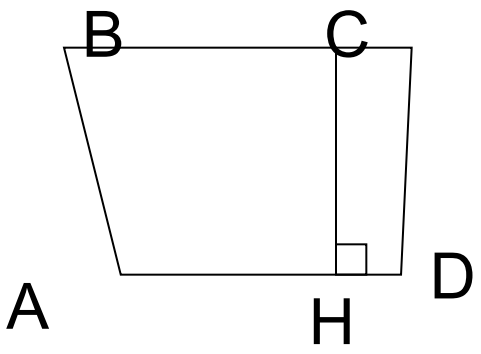
Решение:

$\angle HCD=135-90=45$; $\angle CDH=45$.

$\frac{DH}{\sin 45} = \frac{CH}{\sin 45}$ Отсюда DH=6

S=0,5 (BC+AD) CH=0,5(5+12)6=54

Задача 5: Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135, а высота, проведенная из вершины этого угла делит основания на отрезки 1,4 см и 3,4 см.Найти площадь трапеции.



Дано:ABCD-трапеция.AB=CD.AH=3,4.

HD=1,4. $\angle$ BCD=135.

Найти: S-?

Решение:

$\angle$HCD= $\angle$CDH= 45.

$\frac{HD}{\sin 45} = \frac{CH}{\sin 45}$ Отсюда CH=1,4

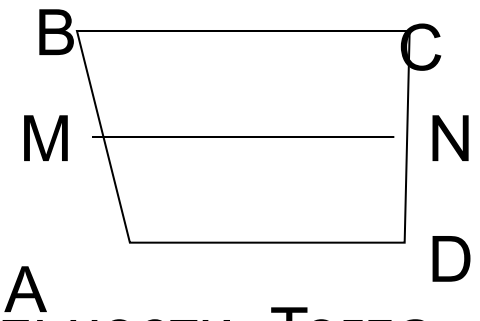
S= 0,5(2+4,8)1,4=4,76.

Задача 6: Основания трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5. Найти основания.

Дано: трапеция ADCD.MN=5.

BC:AD=2:3.

Найти: AD;CD.



Решение:

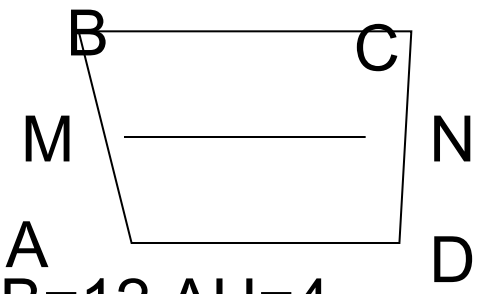
Пусть x- коефиециент пропорциональности. Тогда BC=2x,AD=3x. MN=0,5(AD+BC)

2,5x=5

X=2.

Значит AD=6, а BC=4.

Задача 7: Дана равнобокая трапеция. Средняя линия равна боковой стороне. Основания равны 8 и 16. Найти площадь трапеции.



Дано: ABCD- трапеция.AB=CD;MN=AB;

BC=8;AD=16.

Найти: S

Решение: MN=0,5(BC+AD)=12.3начит AB=12.AH=4

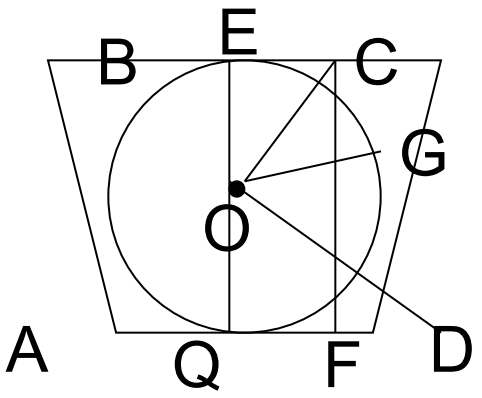
$BH^2=AB^2-AH^2$;

BH^2= 144-16

BH=8 корней из 2ж

S=MN BH=96 корней из 2

Задача 8: В равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 и 6, вписан круг. Найдите его радиус и углы трапеции.



Дано: ABCD-трапеция.AD=18;BC=6

Найти:OG-?

Решение:

EC=CG (по равным треугольникам)

DG=DQ (по равным треугольникам)

EC=0,5 BC=3 Значит CG=3

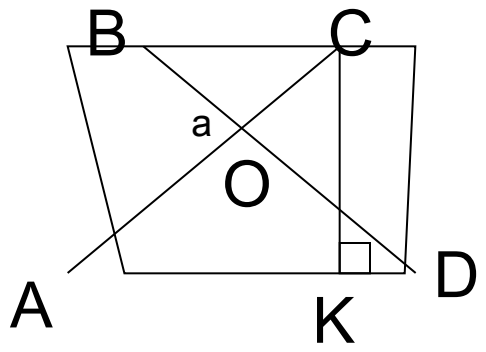
DQ=0,5 AD=9 Значит DG=9

OG^2= CG DG=27

OG=3 корень из 3.

Часть Б

Задача 1: Площадь равнобокой трапеции равна S, угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен a. Найти высоту трапеции.



Дано:ABCD- трапеция; S- её площадь

$\angle a$ .BC и AD основания.

Найти:CK-?

Решение:

Пусть O – точка пересечения диагоналей данной трапеции ABCD, AB=CD, $\angle AOB=a$.

Т.к $\angle AOB$- внешний угол $\triangle AOD$, AO=OD,то $\angle CAD=\frac{a}{2}$.

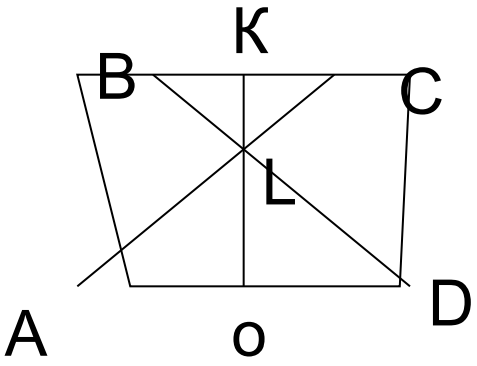
Пусть CK=H- высота трапеции

Из $\triangle AKC$ ($\angle AKC=90$); AK=H ctg $\frac{a}{2}$

Тогда площадь трапеции $S = 0,5(AD+BC)CK=AK\ CK= H^2\ ctg\frac{a}{2}$

H=корень из S tg $\frac{a}{2}$

Задача 2: Большее основание вписанной в круг трапеции равно диаметру круга, а угол при основании равен а. В каком отношении точка пересечения диагоналей трапеции делит её высоту?



Дано: ABCD- трапеция.

Найти:

Решение:

Пусть основание AD равнобокой трапеции ABCD есть диаметр круга, описанного около трапеции, тогда центр О круга – середина AD.

Высота КО трапеции проходит через точку L пересечения диагоналей, $\triangle BLC$ подобен $\triangle ALD$,

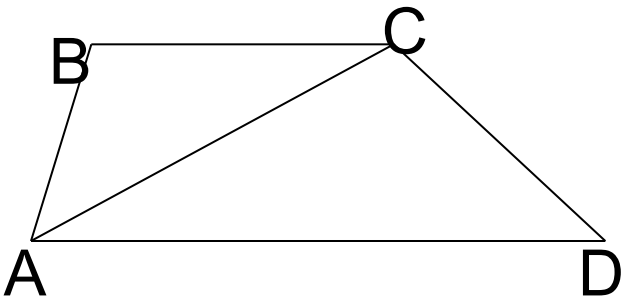
$KL:LO=LC:LD$.

∠ACD- вписанный, опирающийся на диаметр , поэтому ∠ACD=90. ∠ACD и AOL- прямоугольные с общим острым углом при вершине A.Отсюда, ∠ALO= ∠ADC=a.

Тогда ∠KLC= ∠OLD=a, ∠CLD=180-2a,из DLCD (∠LCD=90);

LC:LD=cos ∠CLD=cos (180-2a)=-cos2a.

Задача 3: Угол при вершине A трапеции ABCD равен a. Боковая сторона AB вдвое больше меньшего основания BC. Найти угол BAC.



Дано: ABCD-трапеция.AB=2BC

Найти: ∠BAC

Решение:

Пусть ∠BAC =$\mathcal{F}$.

$\frac{\text{Sin } \mathcal{F}}{\text{Sin } (a-\mathcal{F})} \quad \frac{BC}{AB}$

Тогда ∠BCA= ∠CAD=a- $\mathcal{F}$.Из △ABC:

Отсюда следует 2sin $\mathcal{F}$=sin a cos $\mathcal{F}$ – sin $\mathcal{F}$ cos a

2=sin a ctg $\mathcal{F}$ – cos a

$\frac{\text{Sin a}}{\text{tg } \mathcal{F}} = 2+\cos a;\ \mathcal{F} = \text{arctg } \frac{\text{Sin a}}{2+\sin a}$

Задача 4: В круг вписана трапеция. Большее основание трапеции составляет с боковой стороной угол а, а с диагональю- угол ф.Найти отношение площади круга к площади трапеции.

Решение:

Пусть AD- большее основание данной трапеции ABCD,

$\angle BAD=a$, $\angle BDA=\Phi$,

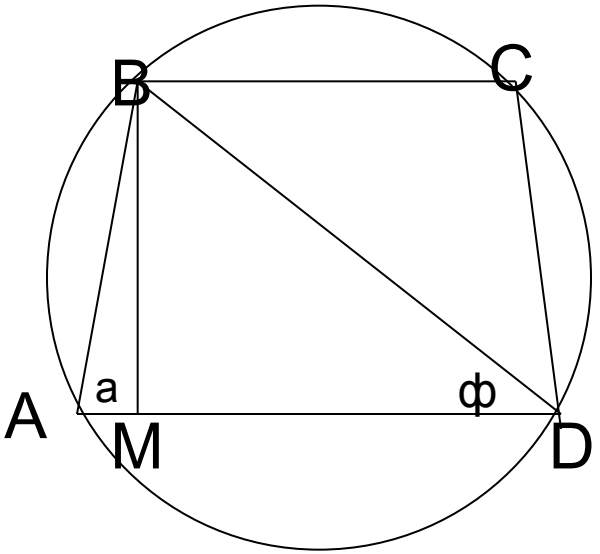
BM-высота трапеции

И BD= 1.

Тогда из $\triangle BMD$ ($\angle BMD=90$);

$BM=BD \sin \angle BDM= \sin ф$;

$DM=BD \cos \angle BDM=\cos ф$;



Площадь трапеции

$S1=\frac{AD+BC}{2}BM = DM\ BM=\sin\phi\cos\phi=\frac{\sin 2\phi}{2}$

Радиус R круга, описанного около $\triangle BAD$: $R=\frac{BD}{2\sin\angle A}=$

$=\frac{1}{2\sin a}$. Тогда площадь круга $S2=\pi R^2=$

$=\frac{\pi}{4\sin^2 a}$

Таким образом, $\frac{S1}{S2}=\frac{\pi}{2\sin^2 a\sin 2\phi}$

ЧАСТЬ С

Дана трапеция ABCD с основаниями AD и BC.Прямая KL пересекает диагональ BD в точке O. K принадлежит AB.L принадлежит CD.Отношение большего основания к меньшему как 2 к 1 (AD:BC=2:1).
AK:KB=1:2;CL:LD=1:2.Найти отношение BO к LD.

Дано: ABCD-трапеция.

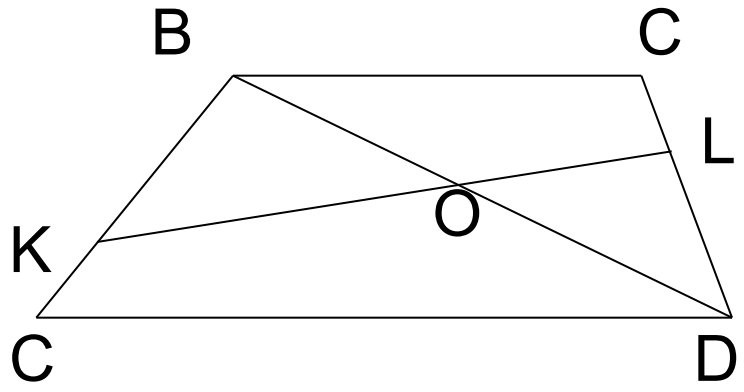
KL пересекает BD в точке O

K€AB;L€CD;

AD:BC=2:1; AK:KB=1:2;

CL:LD=1:2.

Найти: BO:OD



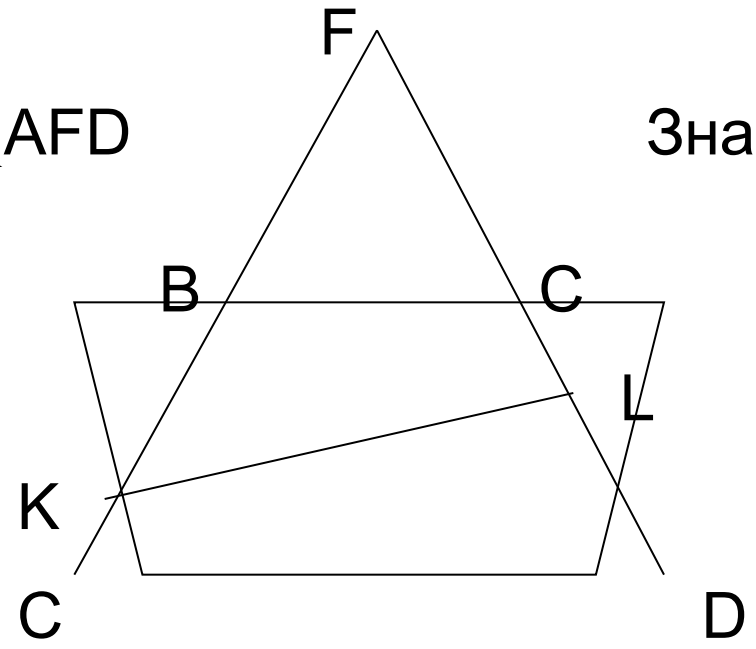
(примечание знак € означает принадлежит)

Решение:

1)AK:KB=1:2. значит AK=x; KB=2x; AB =3x.

CL:LD=1:2. значит CL=y; LD=2y; CD =3y.

2) Продолжим боковые стороны до пересечения в точке F



$\triangle BFC$ подобен $\triangle AFD$ Значит AF:BF=AD:BC;

$$\frac{3x+BF}{BF} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{3x}{BF} + 1 = 2$$

BF=3x

AF=6x

Аналогично

FC=3y; FD=6y.

3)По теореме Менелая $\triangle$BFD и секущая KL

$$\frac{FL}{LD}\cdot\frac{DO}{BO}\cdot\frac{BK}{KF}=1$$

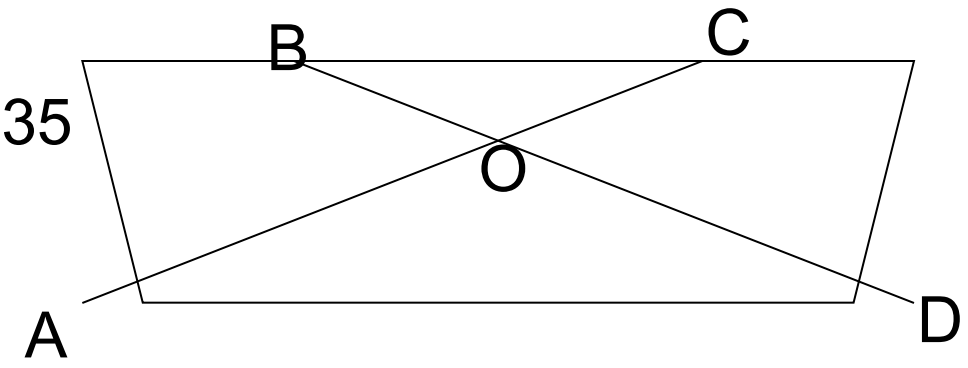
$$\frac{4y}{2y}\cdot\frac{DO}{BO}\cdot\frac{2x}{5x}=1$$

$$\frac{DO}{BO}=\frac{5}{4}$$

BO:OD=4:5.

В трапеции меньшее основание равно 2, прилежащие углы по 135. Угол между диагоналями, обращенный к основанию, равен 150.Найти площадь трапеции.

Дано: ABCD-трапеция.
BC=2. $\angle ABC = \angle DCB = 135$
$\angle BOC = 150$.
Найти: S



Решение:
В $\triangle BOC$: $\angle ACB = \angle DCB = 15$, тогда $\angle BAC = 180 - (\angle ABC + \angle ACB) = 30$.
По теореме синусов из $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$$

$$AC = \frac{BC \sin \angle ABC}{\sin \angle ABC} = \frac{2 \sin 135}{\sin 30} = 2 \text{ корня из } 2$$

$S = 0{,}5\ AC\ BD \sin \angle BOC = 0{,}5\ AC^2 \sin \angle BOC =$

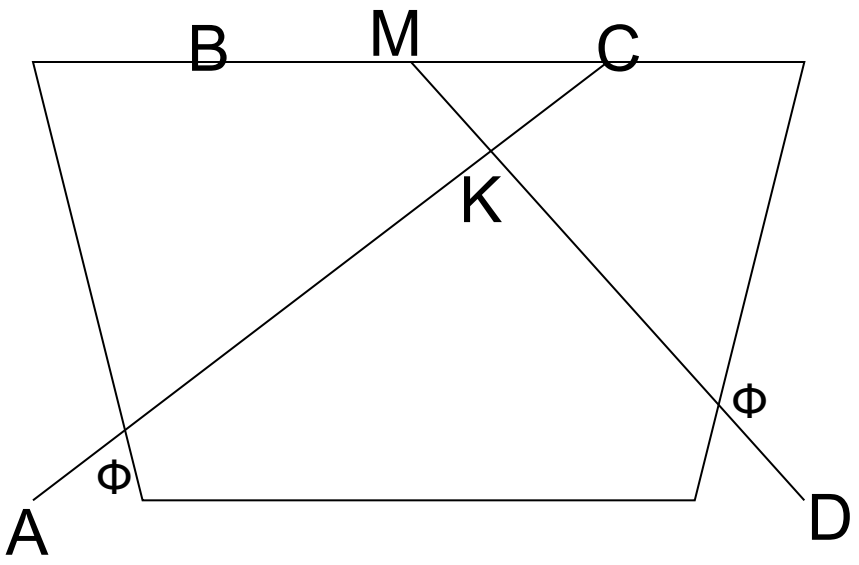
$= 0{,}5\ (8) \sin 150 = 2$

В равнобедренной трапеции основание AD равно диагонали AC. Известно, что ∠CAD= ∠CDM, где M – середина BC. Найдите углы трапеции.

Дано: ABCD-трапеция.

AD=AC; ∠CAD= ∠CDM;

BM=MC.



Найти: углы трапеции

Решение:

Пусть ∠CAD=ф, тогда ∠ADC= ∠ACD=90- $\frac{ф}{2}$.

Поскольку по условию MDC= ∠CAD= ф, то

$\angle CMD = \angle MDA = \angle ADC - \angle MDC = 90 - \frac{3}{2}\phi,$

$$MDC = 90 + \frac{\phi}{2}$$

По теореме синусов для треугольника MDC надем

$$\frac{MD}{\sin\left(90 + \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{CD}{\sin\left(90 - \frac{3}{2}\phi\right)},$$

$$MD = CD\,\frac{\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{3}{2}\phi}$$

Но M- середина BC. Следовательно, проекция MD на AD равна 0,5AD, т.е

$$AD = 2MD\cos\left(90 - \frac{3}{2}\phi\right) = 2CD\,\frac{\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{3}{2}\phi}{\cos\frac{3}{2}\phi}$$

Из равнобедренного треугольника ACD найдем

$$AD = \frac{CD}{2\sin\frac{\phi}{2}}$$

Приравнивая два выражения для AD, получим уравнение

$$\frac{2\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{3}{2}\phi}{\cos\frac{3}{2}\phi} = \frac{1}{2\sin\frac{\phi}{2}}$$

Можно доказать,что $\cos\frac{3}{2}\phi = \cos\frac{\phi}{2}(2\cos\phi - 1)$,

$2\sin\frac{3}{2}\phi \sin\frac{\phi}{2} = = \cos\phi - \cos 2\phi$

Сократив теперь в числителе и знаменателе левой части уравнения $\cos \frac{\phi}{2}$,освободившись от знаменателя, придем к уравнению 2 cos 2ф=1, т.е 2ф=60, ф=30.

Таким образом, два угла трапеции равны 75, два оставшихся 105.

Конец