

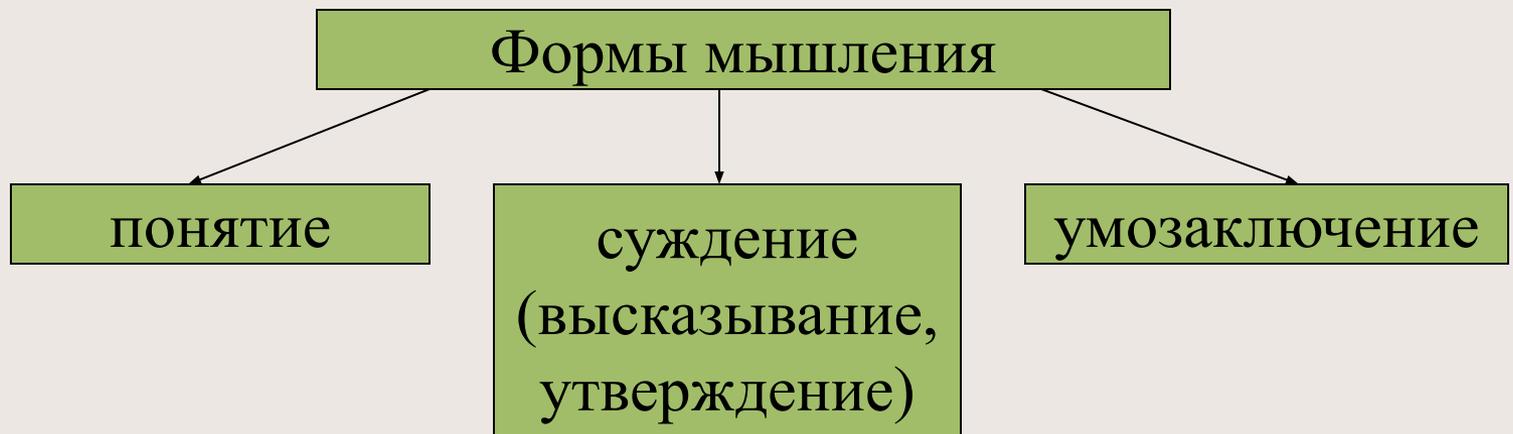
Элементы логики

Учебная презентация для 10 класса



Определение

Логика – это наука о формах и способах мышления



Понятие

- Понятие – это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта;
- Понятие имеет две стороны: содержание и объем;
- Содержание – это совокупность существенных признаков объекта;
- Объем – это совокупность предметов, на которые распространяется понятие;



Высказывание

- Высказывание – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о реальных предметах, их свойствах и отношениях между ними;
- Высказывание может быть либо **истинно**, либо **ложно**;
- Высказывания могут быть выражены с помощью естественных и формальных языков;
- Высказывания могут быть выражены только повествовательным предложением;
- Высказывания могут быть **простыми** и **составными**;
- Истинность простых высказываний определяется на основании здравого смысла;
- Истинность составных высказываний определяется с помощью алгебры высказываний.



Умозаключение

- Умозаключение – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких высказываний может быть получено новое суждение;
- Посылками умозаключения могут быть только истинные суждения



Задание 1:

Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями:

1. Как пройти в библиотеку?
2. Коля спросил: «Как пройти к Большому театру?».
3. Картины Пикассо слишком абстрактны.
4. Решение задачи – информационный процесс.
5. Число 2 является делителем числа 7 в некоторой системе счисления.



Задание 2:

Из данных высказываний необходимо выбрать истинные:

1. Город Джакарта – столица Индонезии.
2. Решение задачи – информационный процесс.
3. Меню в программе – это список возможных вариантов.
4. Для всех X из области определения $\sqrt{x+1}$ верно, что $X + 2 > 0$.
5. Сканер – это устройство, которое может напечатать на бумаге то, что изображено на экране компьютера.
6. Мышка – это устройство ввода информации.



Алгебра высказываний

- Служит для определения истинности или ложности составных высказываний, не вникая в их содержание;
- В алгебре высказываний простым высказываниям ставятся в соответствие логические переменные, обозначаемые латинскими буквами:

Например: A – «Крокодилы летают»

B – «Земля вращается вокруг Солнца»

- Если высказывание истинно, то ему соответствует значение логической переменной 1, если ложно – 0;

Тогда: $A = 0, B = 1$

- Над высказываниями можно производить определенные логические операции, в результате которых получаются новые, составные высказывания;



Логические операции

Логическое умножение

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «и» («а», «но») называется операцией логического умножения или конъюнкцией.

Правило истинности

Составное высказывание, образованное в результате логического умножения (конъюнкции), истинно тогда и только тогда, когда истинны входящие в него простые высказывания.



- Обозначение операции логического умножения: $\&$, \wedge , $*$;
- Пусть имеется два простых высказывания A и B , составим составное высказывание F с помощью конъюнкции: $F = A \& B$;
- Значение логической функции можно определить с помощью таблицы истинности.



Таблица истинности

A	B	F = A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Задание 3:

1. Даны высказывания: D – «Число 10 делится на 2 без остатка»; S – «Париж – столица России». Сформулировать на обычном языке высказывание $A=S\&D$. Определить его истинность.
2. В следующих высказываниях выделите простые, обозначив каждое из них буквой; запишите с помощью букв и знаков логических операций каждое составное высказывание. Определите их истинность.
 - Число 376 четное и трехзначное.
 - Солнце движется вокруг Земли, и Луна – спутник Венеры.
 - На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, а также писали самостоятельную работу.



Логическое сложение

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «или» называется операцией логического сложения или дизъюнкцией.

Правило истинности

Составное высказывание, образованное в результате логического сложения (дизъюнкции), истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.



- Обозначение операции логического сложения:
 \vee ; +;
- Пусть имеется два простых высказывания A и B , составим составное высказывание F с помощью дизъюнкции: $F = A \vee B$;
- Значение логической функции можно определить с помощью таблицы истинности.



Таблица истинности

A	B	F = A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Задание 4:

1. Даны высказывания: М – «Число 12 - простое»; N – «Париж – столица Франции». Сформулировать на обычном языке высказывание $K = M \vee N$. Определить его истинность.
2. В следующих высказываниях выделите простые, обозначив каждое из них буквой; запишите с помощью букв и знаков логических операций каждое составное высказывание. Определите их истинность.
 - Зимой дети катаются на коньках или на лыжах
 - Сканер – устройство вывода информации, или Луна – спутник Земли .
 - На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, или писали самостоятельную работу.



Логическое отрицание

Присоединение частицы «не» к высказыванию называется операцией логического отрицания или инверсией

Правило истинности

Логическое отрицание (инверсия) делает истинное высказывание ложным, а ложное - истинным.

Обозначение инверсии: \neg ; $\bar{\quad}$

Пусть имеется простое высказывание A , составим составное высказывание F с помощью инверсии: $F = \neg A$ ($F = \bar{A}$)



Таблица истинности

A	F = \overline{A}
0	1
1	0



Задание 5:

1. Даны высказывания: M – «Число 12 - простое»; N – «Париж – столица Франции». Сформулировать на обычном языке высказывание $K = \neg M$. Определить его истинность. Сформулировать на обычном языке высказывания: $A = M \& \neg N$; $B = \neg M \vee N$
2. В следующих высказываниях выделите простые, обозначив каждое из них буквой; запишите с помощью букв и знаков логических операций каждое составное высказывание. Определите их истинность.
 - Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
 - Число 5 не составное.
3. Постройте отрицания следующих высказываний:
 - Сегодня в театре идет опера «Евгений Онегин».
 - Натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 0, являются простыми числами.
 - Коля решил все задания контрольной работы.
 - Во всякой школе некоторые ученики интересуются спортом.
4. Пусть p = «Ане нравятся уроки математики», а q = «Ане нравятся уроки химии». Выразите формулы на обычном языке: $p \& q$; $\neg p \& q$; $p \vee \neg q$; $\neg p \vee \neg q$; $\neg(p \& q)$.



Логическое следование

- Соединение двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если..., то...» называется операцией логического следования или импликацией
- Правило истинности

Составное высказывание, образованное с помощью операции логического следования (импликации), ложно тогда, когда из истинной посылки (высказывания) следует ложный вывод (второе высказывание)



- Обозначение импликации: \Rightarrow , \rightarrow
- Формула: $F = A \Rightarrow B$
- Таблица истинности

A	B	$F = A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Задание 6:

1. Пусть a = Через Смоленск протекает Днепр, b = Луна сделана из теста. Сформулируйте на обычном языке высказывание $x = a \Rightarrow b$. Определите его истинность.
2. Пусть s = Через Смоленск протекает Енисей, $c = 2+4 = 6$, $n = 2+3=8$. Сформулируйте на русском языке высказывания: $d = s \Rightarrow c$; $m = c \Rightarrow s$; $k = s \Rightarrow n$. Определите их истинность.
3. Пусть p =Ане нравятся уроки математики, q =Ане нравятся уроки химии. Выразите формулы на обычном языке:
 $p \Rightarrow q$; $p \Rightarrow \neg q$; $\neg (p \Rightarrow q)$



Логическое равенство

- Соединение двух высказываний в одно помощью оборота речи «**тогда и только тогда, когда**» называется операцией логического равенства или эквивалентностью

- Правило истинности

Составное высказывание, образованное с помощью операции логического равенства (эквивалентности), истинно только тогда, когда оба высказывания одновременно либо истинны, либо ложны



- Обозначение эквивалентности: \equiv , \Leftrightarrow , \sim
- Формула: $F = A \Leftrightarrow B$
- Таблица истинности

A	B	$F = A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Задание 7:

1. Пусть s = Через Смоленск протекает Енисей, $c = 2+4 = 6$, $n = 2+3=8$. Сформулируйте на русском языке высказывания: $d = s \Leftrightarrow c$; $m = c \Leftrightarrow s$; $k = s \Leftrightarrow n$. Определите их истинность.
2. Пусть p =Ане нравятся уроки математики, а q =Ане нравятся уроки химии. Выразите формулы на обычном языке:

$$p \Leftrightarrow q; p \Leftrightarrow \neg q; \neg (p \Leftrightarrow q)$$



Приоритет действий

- Инверсия
- Конъюнкция
- Дизъюнкция

Составление таблиц истинности

- Число строк = 2^n , где n – число логических переменных;
- Число столбцов = число логических переменных + число логических операций



Задание 8:

1. Пусть $A=0$, $B=1$. Определить истинность высказывания $F = (A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B)$.
2. Построить таблицу истинности следующих выражений:

$$F = A \vee B \& \bar{A}$$

$$M = \overline{C \vee D} \& \bar{D}$$

$$A = (S \& F) \Rightarrow \overline{(S \vee F)}$$

$$P = A \& B \vee \bar{C}$$

$$D = (A \& B) \equiv \bar{C}$$



Решение задач

1. Даны высказывания s =Число 3 является делителем числа 198, x =Иркутск – столица Франции.
Сформулировать на обычном языке высказывания:
 $A = \neg S$; $B = x \ \& \ s$; $C = s \ \vee \ x$; $D = s \Rightarrow \neg x$; $M = x \Leftrightarrow s$.
Определить их истинность.
2. Пусть $n=1$, $m=0$. Определить истинность
высказывания $D = \overline{(\overline{N} \ \& \ \overline{M})} \Rightarrow \overline{(\overline{M} \ \vee \ \overline{N})}$
3. Построить таблицу истинности выражений:

$$K = \overline{(\overline{A} \ \& \ \overline{B})} \vee A$$

$$D = (A \ \& \ B) \Leftrightarrow \overline{(C \ \vee \ A)}$$



Равносильные логические выражения

- Логические выражения, у которых таблицы истинности совпадают называются равносильными
- Доказать равносильность логических выражений $\bar{A} \& \bar{B}$ и $\overline{A \vee B}$
- Выяснить, равносильны ли выражения:

$$A \Leftrightarrow B \quad \text{и} \quad (\bar{A} \& \bar{B}) \vee (A \& B)$$

$$A \Leftrightarrow B \quad \text{и} \quad (A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee B)$$



Законы логики

- Закон тождества: всякое высказывание тождественно самому себе $A = A$
- Закон непротиворечия: высказывание не может быть одновременно истинным и ложным $A \& \bar{A} = 0$
- Закон исключения третьего: высказывание может быть либо истинным, либо ложным третьего не дано $A \vee \bar{A} = 1$



Законы логики

- Закон двойного отрицания: если дважды отрицать одно и то же высказывание, то в результате получится исходное

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- Закон коммутативности:

$$A \& B = B \& A \quad A \vee B = B \vee A$$

- Закон ассоциативности:

$$(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$



Законы логики

- Закон дистрибутивности:

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$

- Законы Моргана:

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B} \quad \overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

- Поглощение 1: $A \& 1 = A$

- Поглощение 0: $A \vee 0 = A$

- Поглощения: $A \& (A \vee B) = A$ $A \vee (A \& B) = A$



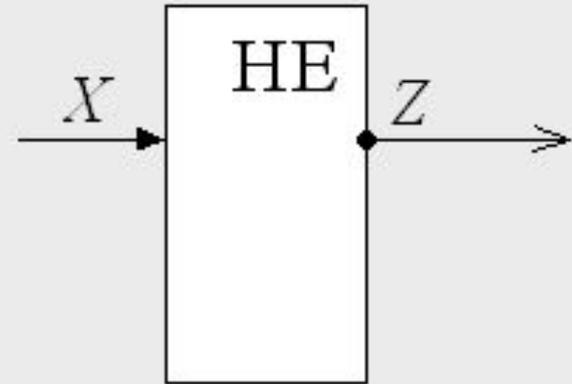
Логические основы компьютера

- В основе обработки компьютером информации лежит алгебра логики, разработанная английским математиком Джоржем Булем (булева алгебра). Схемные реализации логических операций называются логическими элементами.



Логический элемент НЕ

- Преобразует сигнал в противоположный: если на вход элемента подана логическая единица, то на выходе этого элемента будет логический ноль, и наоборот.

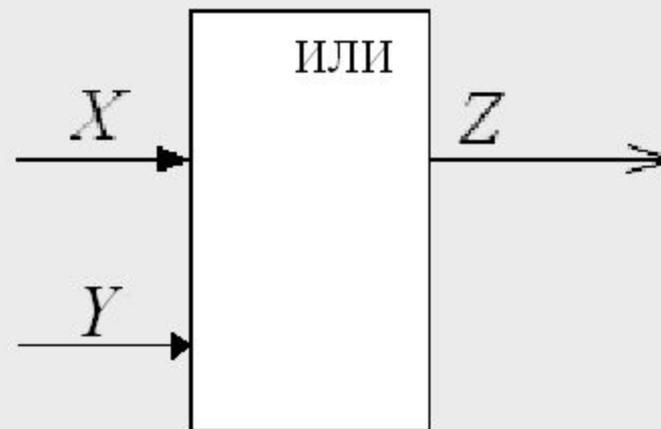


X	НЕ X
1	0
0	1



Логический элемент ИЛИ

- Преобразует два сигнала, поданные на вход, в один сигнал на выходе по следующему принципу: если на любой вход логического элемента ИЛИ будет подана логическая единица, то на выходе элемента будет логическая единица. Если на оба входа подан логический ноль, то на выходе элемента ИЛИ также будет ноль.

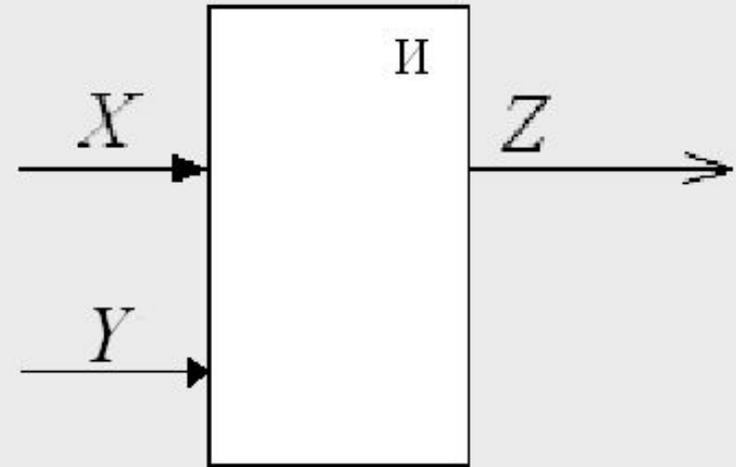


X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Логический элемент И

- Преобразует два сигнала, поданные на вход, в один сигнал на выходе по следующему принципу: если на любой вход логического элемента И будет подан логический ноль, то на выходе элемента будет логический ноль. Если на оба входа подана логическая единица, то на выходе элемента И также будет единица.



X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Полусумматор двоичных чисел

- Это устройство для сложения двух двоичных чисел. Оно должно давать на выходе
- Обозначим слагаемые X и Y , результаты P и S , получим таблицу истинности:

следующие сигналы:

$$0 + 0 = 00$$

$$0 + 1 = 01$$

$$1 + 0 = 01$$

$$1 + 1 = 10$$

X(слаг)	Y(слаг)	P(перенос)	S(сумма)
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

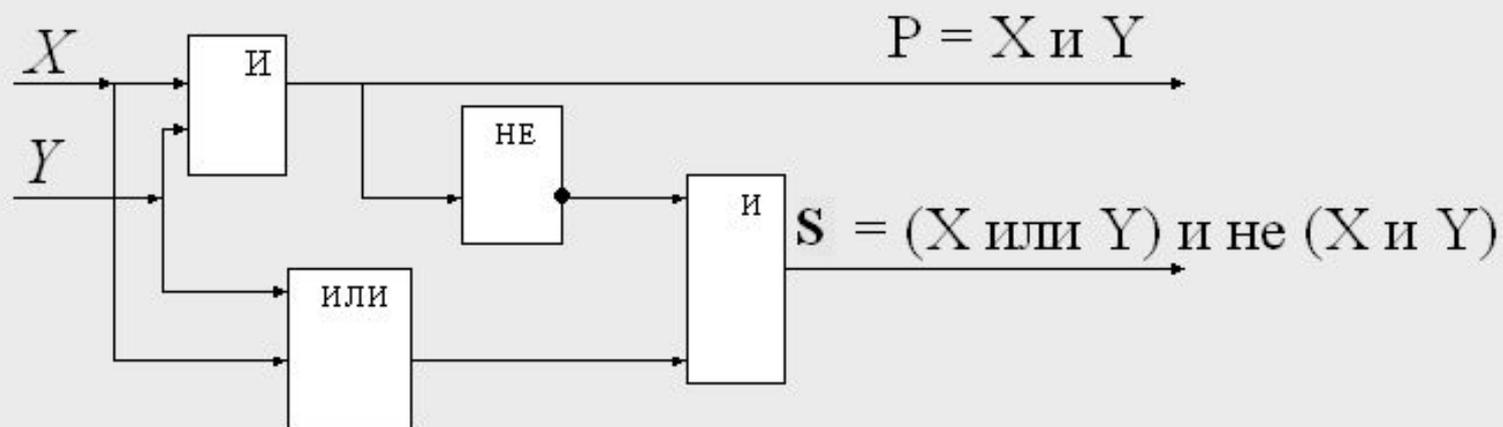


Результаты можно записать в виде логических функций:

$$P = X \text{ и } Y$$

$$S = (X \text{ или } Y) \text{ и не } (X \text{ и } Y)$$

Логическая схема полусумматора имеет вид:



Сумматор двоичных чисел

- В целях максимального упрощения работы компьютера все многообразие математических операций в процессоре сводится к сложению двоичных чисел. Главной частью процессора является сумматор, который обеспечивает такое сложение.
- Полный одноразрядный сумматор должен иметь три входа: X , Y – слагаемые и P_0 – перенос из младшего разряда и два выхода: сумма S и перенос P .

Таблица сложения

Слагаемые		Перенос из младшего разряда	Перенос	Сумма
X	Y	P_0	P	S
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1

- Из таблицы видно, что перенос P принимает значение 1 только тогда, когда хотя бы две логические переменные одновременно принимают значения 1, т.е. перенос реализуется путем последовательного сложения результатов попарного логического умножения входных переменных (X, Y, P_0) .

- Формула переноса имеет вид:

$$P = (X \& Y) \vee (X \& P_0) \vee (Y \& P_0)$$

- Логическое выражение для получения суммы в полном сумматоре имеет вид:

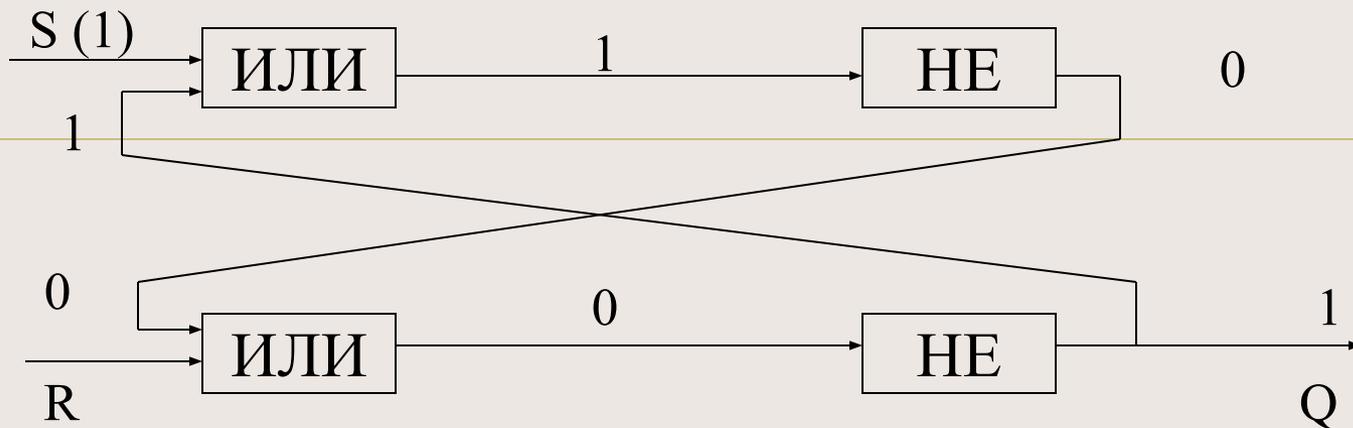
$$S = (X \vee Y \vee P_0) \& \neg P_0 \vee (X \& Y \& P_0)$$

- Многоразрядный сумматор процессора состоит из полных одноразрядных сумматоров. На каждый разряд ставится одноразрядный сумматор, причем выход (перенос) младшего разряда подключен к выходу сумматора старшего разряда.

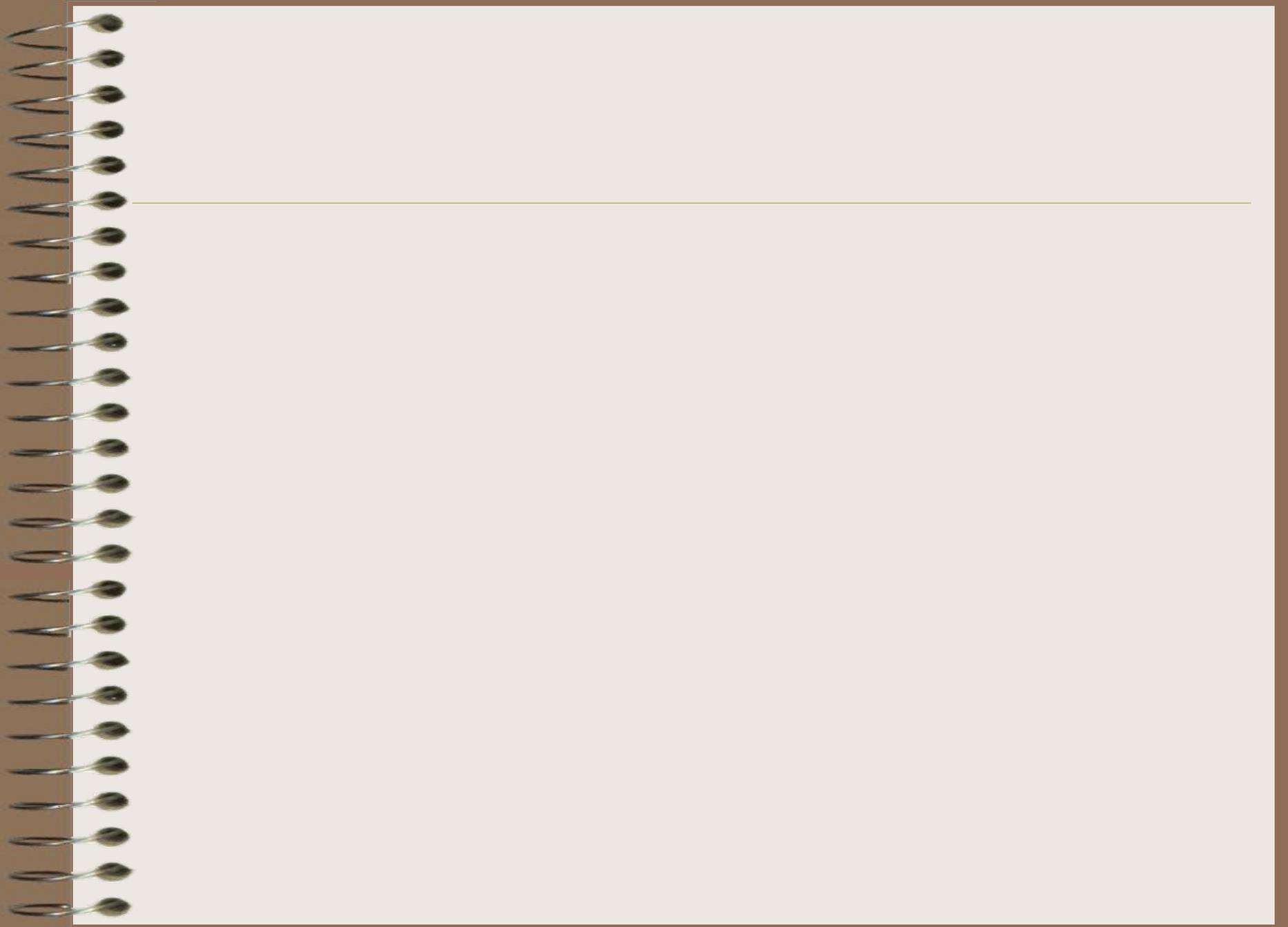
Триггер

- Это важнейшая структурная единица оперативной памяти компьютера и внутренних регистров процессора.
- Триггер позволяет запоминать, хранить и считывать информацию (каждый триггер может хранить 1 бит информации). Триггер можно построить из двух логических элементов «или» и двух логических элементов «не».

Схема триггера



- В обычном состоянии на входы триггера подан сигнал «0», и триггер хранит сигнал «0». Для записи «1» на вход S (установочный) подается сигнал «1». По схеме видно, что триггер переходит в это состояние и будет устойчиво находиться в нем и после того, как сигнал на входе S исчезнет. Триггер запомнил «1», т.е.с выхода триггера можно считать «1». Для того, чтобы сбросить информацию и подготовиться к приему новой, подается сигнал «1» на вход R (сброс), после чего триггер возвратится к исходному «нулевому» состоянию.



$$F = A \vee B \& \bar{A}$$

A	B	\bar{A}	$B \& \bar{A}$	$A \vee B \& \bar{A}$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1



$$M = \overline{C \vee D} \& \overline{D}$$

C	D	\overline{D}	$C \vee D$	$\overline{C \vee D}$	$\overline{C \vee D} \& \overline{D}$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0



$$A = (S \& F) \Rightarrow (\overline{S \vee F})$$

S	F	$S \& F$	$S \vee F$	$\overline{S \vee F}$	$(S \& F) \Rightarrow (\overline{S \vee F})$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0



$$P = A \& B \vee \overline{C}$$

A	B	C	\overline{C}	$A \& B$	$A \& B \vee \overline{C}$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1



$$D = (A \& B) \equiv \bar{C}$$

A	B	C	\bar{C}	$A \& B$	$(A \& B) \equiv \bar{C}$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0



Проверка задач

1. Число 3 не является делителем числа 198. (ложь)
 - Иркутск – столица Франции, а число 3 является делителем числа 198. (ложь).
 - Число 3 является делителем числа 198, или Иркутск – столица Франции. (истина).
 - Если число 3 является делителем числа 198, то Иркутск – не столица Франции. (истина).
 - Иркутск – столица Франции тогда и только тогда, когда число 3 является делителем числа 198. (ложь)

2. $D = \overline{(0 \& 0)} \Rightarrow \overline{(1 \vee 1)} = 1 \Rightarrow 0 = 0$



$$K = \overline{\overline{A \& B}} \vee A$$

A	B	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A \& B}$	$\overline{\overline{A \& B}}$	$\overline{\overline{A \& B}} \vee A$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1



$$D = (A \& B) \Leftrightarrow \overline{(C \vee A)}$$

A	B	C	$A \& B$	$C \vee A$	$\overline{C \vee A}$	$(A \& B) \Leftrightarrow \overline{(C \vee A)}$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0



$$A \Leftrightarrow B \quad u \quad (\bar{A} \& \bar{B}) \vee (A \& B)$$

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \& \bar{B}$	$A \& B$	$(\bar{A} \& \bar{B}) \vee (A \& B)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1



$$A \Leftrightarrow B \quad u \quad (A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee B)$$

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \vee \bar{B}$	$\bar{A} \vee B$	$(A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee B)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1



$$F = A \vee B \& \bar{A}$$

A	B	\bar{A}	$B \& \bar{A}$	$A \vee B \& \bar{A}$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1



$$M = \overline{C \vee D} \& \overline{D}$$

C	D	\overline{D}	$C \vee D$	$\overline{C \vee D}$	$\overline{C \vee D} \& \overline{D}$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0



$$A = (S \& F) \Rightarrow (\overline{S \vee F})$$

S	F	$S \& F$	$S \vee F$	$\overline{S \vee F}$	$(S \& F) \Rightarrow (\overline{S \vee F})$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0



$$P = A \& B \vee \overline{C}$$

A	B	C	\overline{C}	$A \& B$	$A \& B \vee \overline{C}$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1



$$D = (A \& B) \equiv \bar{C}$$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	\bar{C}	<i>A</i> & <i>B</i>	$(A \& B) \equiv \bar{C}$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

