Гиперболоид

Учитель математики ГОУ СОШ №718
Бугрова Елена Владимировна
(Использована программа АвтоГраф 3.20)

Определение однополостного гиперболоида

- *Однополостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением*
- . $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$
- Оси канонической системы координат являются осями симметрии однополостного гиперболоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии. Оси абсцисс и ординат пересекают однополостный гиперболоид в точках *$A^1(-a; 0; 0)$, $A^2(a; 0; 0)$, $B^1(0; -b; 0)$, $B^2(0; b; 0)$, которые называются его вершинами. Ось аппликат Oz, не имеющая с гиперболоидом общих действительных точек, называется его мнимой осью.*

Если рассмотреть сечения однополостного гиперболоида (16) плоскостью *xOy: z = 0 или плоскостями, параллельными ей (z = h*^{3}*), то в сечении получают*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипс

называется горловым.

Теперь возьмем сечение однополостного гиперболоида плоскостью *xOz: y = 0.* *Оно задается системой уравне*

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}$$

и представляет собой гиперболу с действительной осью *Ox:*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

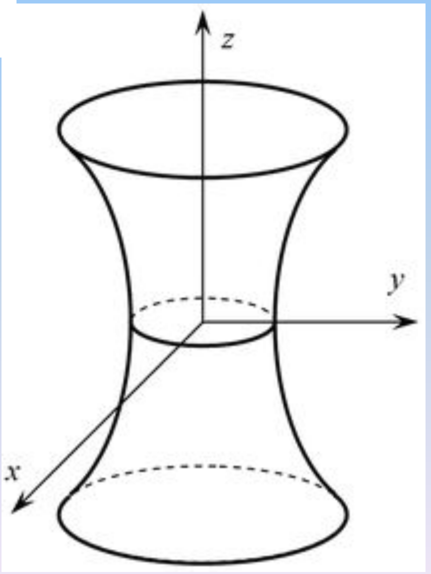
.

Рассматривая аналогично сечения гиперболоида плоскостью *yOz: $x = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскостям xOz: $y = h^2$ и yOz: $x = h^1$, получаем кривые второго порядка гиперболического типа. Это – либо гипербола (при $|h^1| \neq a$, $|h^2| \neq b$), либо пара пересекающихся прямых (при $|h^1| = a$, $|h^2| = b$). Например, сечение однополостного гиперболоида плоскостью $x = a$ задается системой уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a, \end{cases}$$

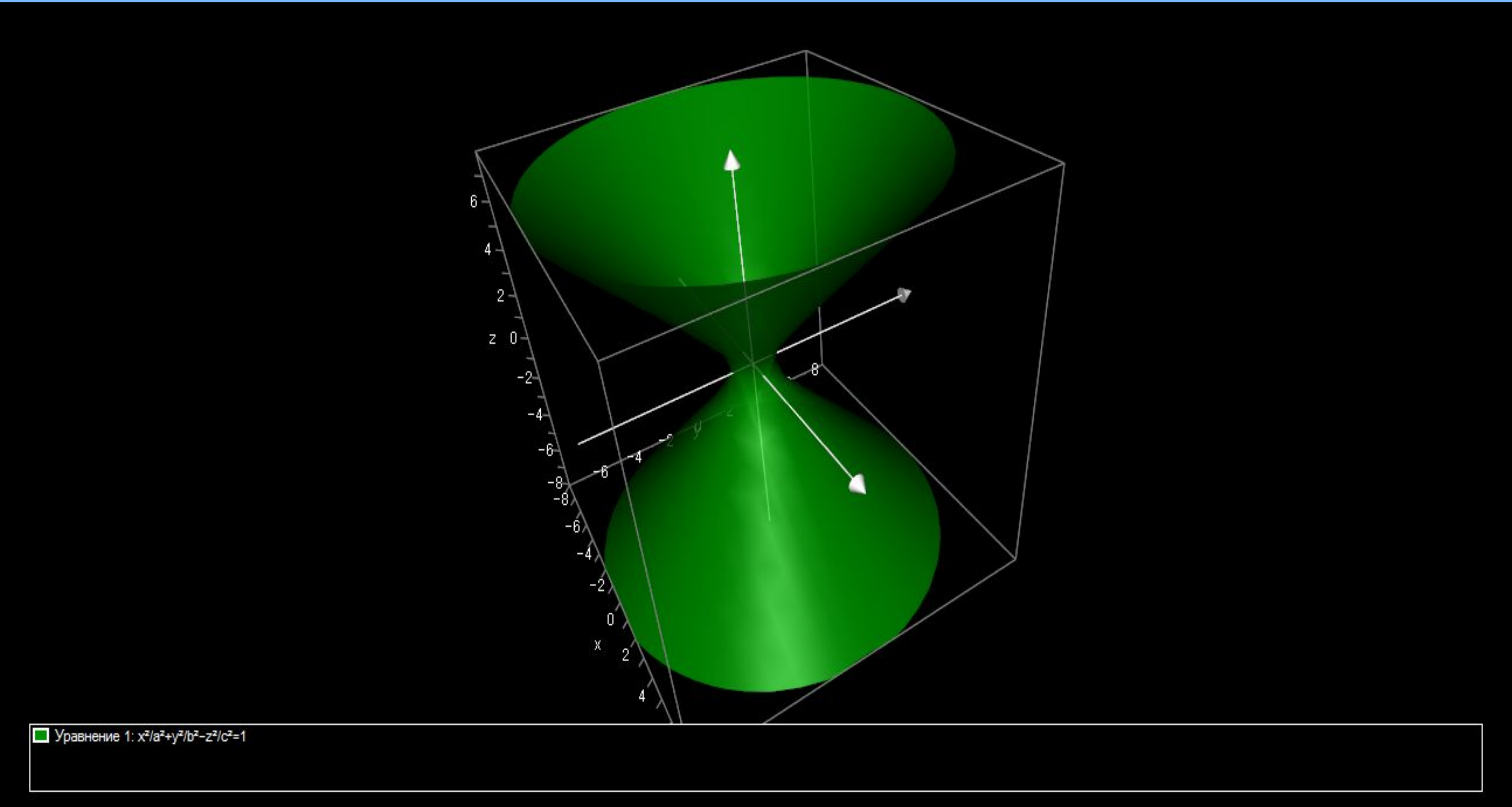
и представляет собой пару пересекающихся прямых каноническим уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



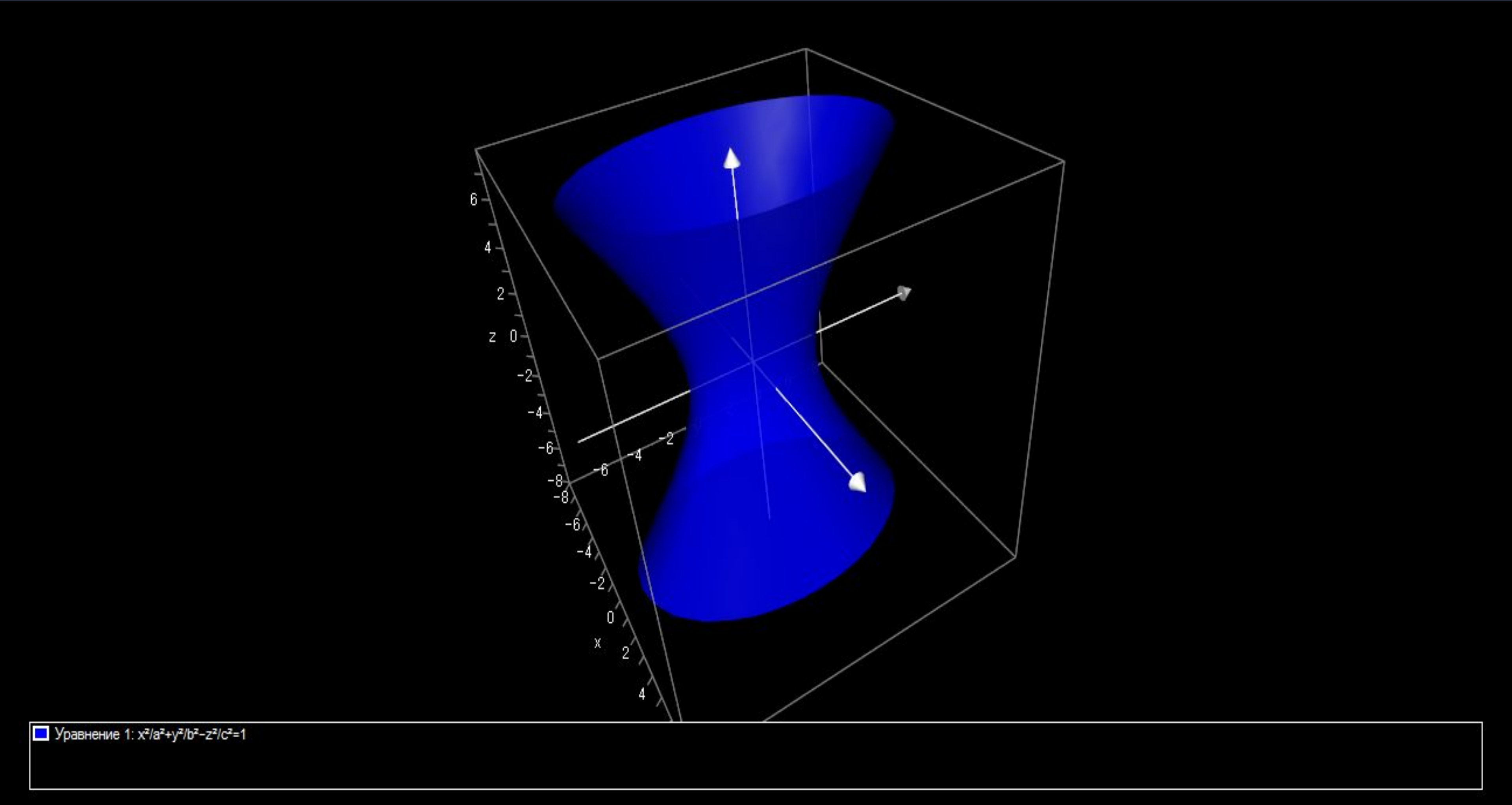
Однополостный гиперболоид

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

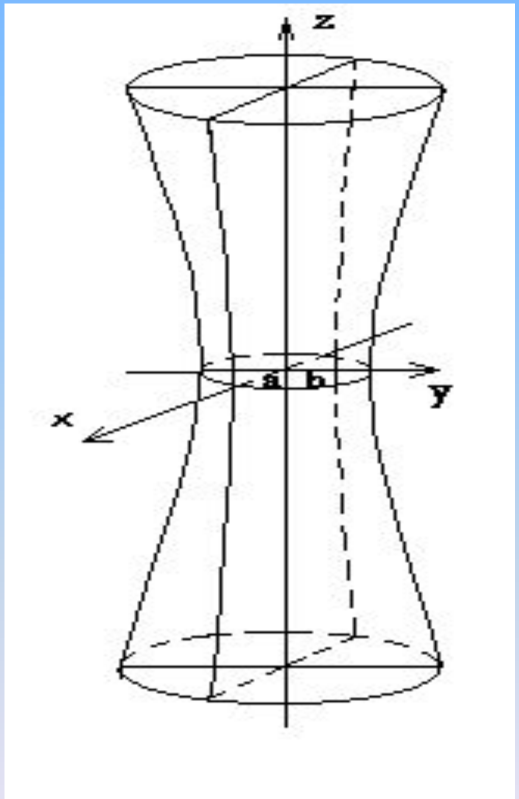


Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Сечение однополостного гиперболоида



Определение двуполостного гиперболоида

- *Двуполостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат определяется уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

- .
- Ось аппликат *Oz канонической системы координат является осью симметрии двуполостного гиперболоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии. Ось аппликат пересекает гиперболоид в точках $C^1(0; 0; -c)$, $C^2(0; 0; c)$ которые называются его вершинами. Сама ось аппликат называется действительной осью гиперболоида.*

Если рассмотреть сечение двуполостного гиперболоида координатными плоскостями *xOz*: $y = 0$ *и yOz*: $x = 0$, *и плоскостями, им параллельными* ($x = h^1$, $y = h^2$), *то в сечении получаются гиперболы.*

Рассматривая аналогично сечения гиперболоида плоскостью *xOy*: $z = 0$, *а также плоскостями, параллельными плоскости xOy*: $z = h$, *получаем кривые второго порядка эллиптического типа. Это – либо эллипс (при* $|h| > c$*), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при* $|h = c|$*), либо мнимый эллипс (при* $|h| < c$*). Например, при* $|h| > c$ *сечение двуполостного гиперболоида плоскостью* $z = h$ *задается системой уравнений*

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем:

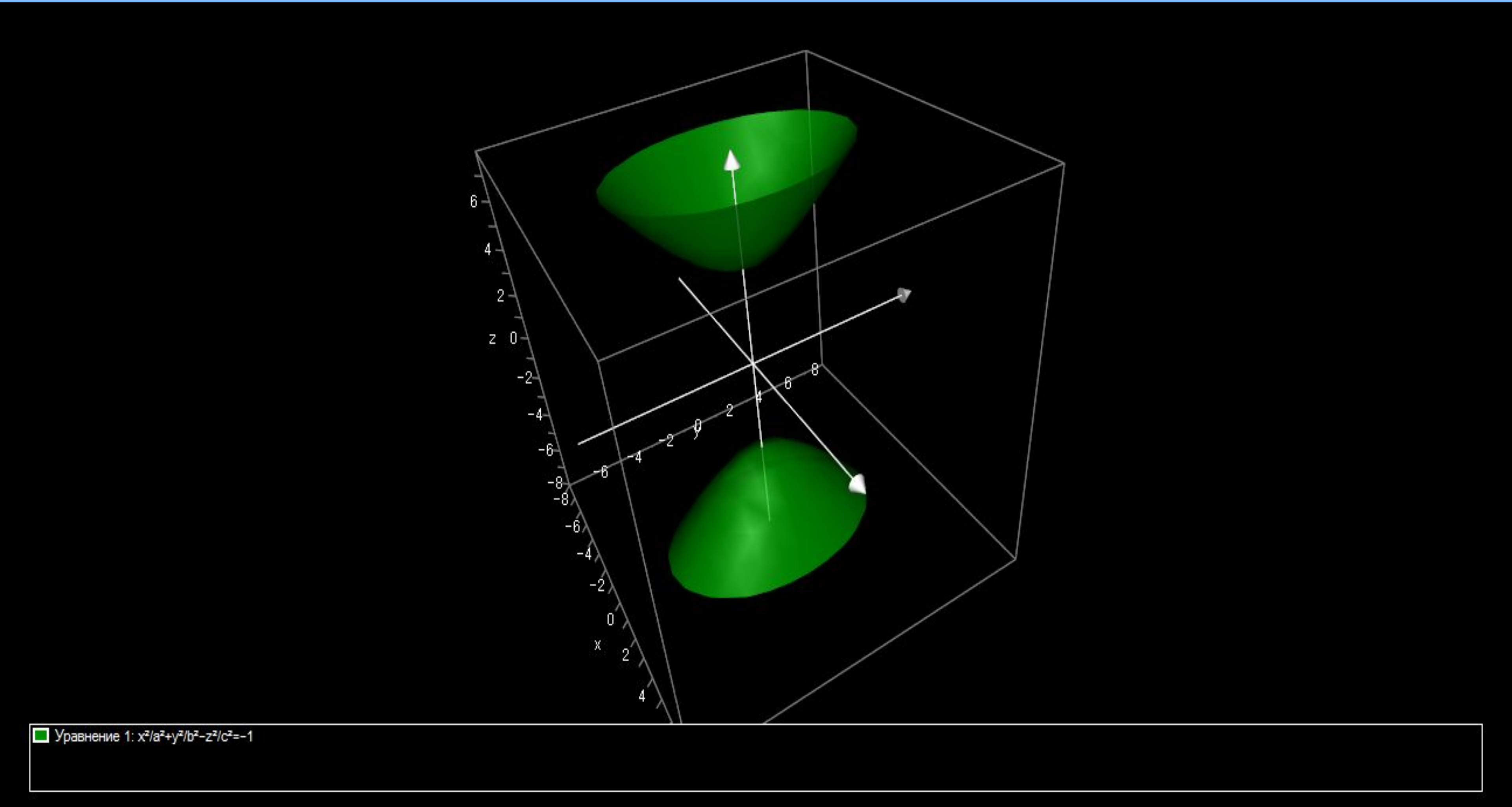
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

и каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)b^2} = 1.$$

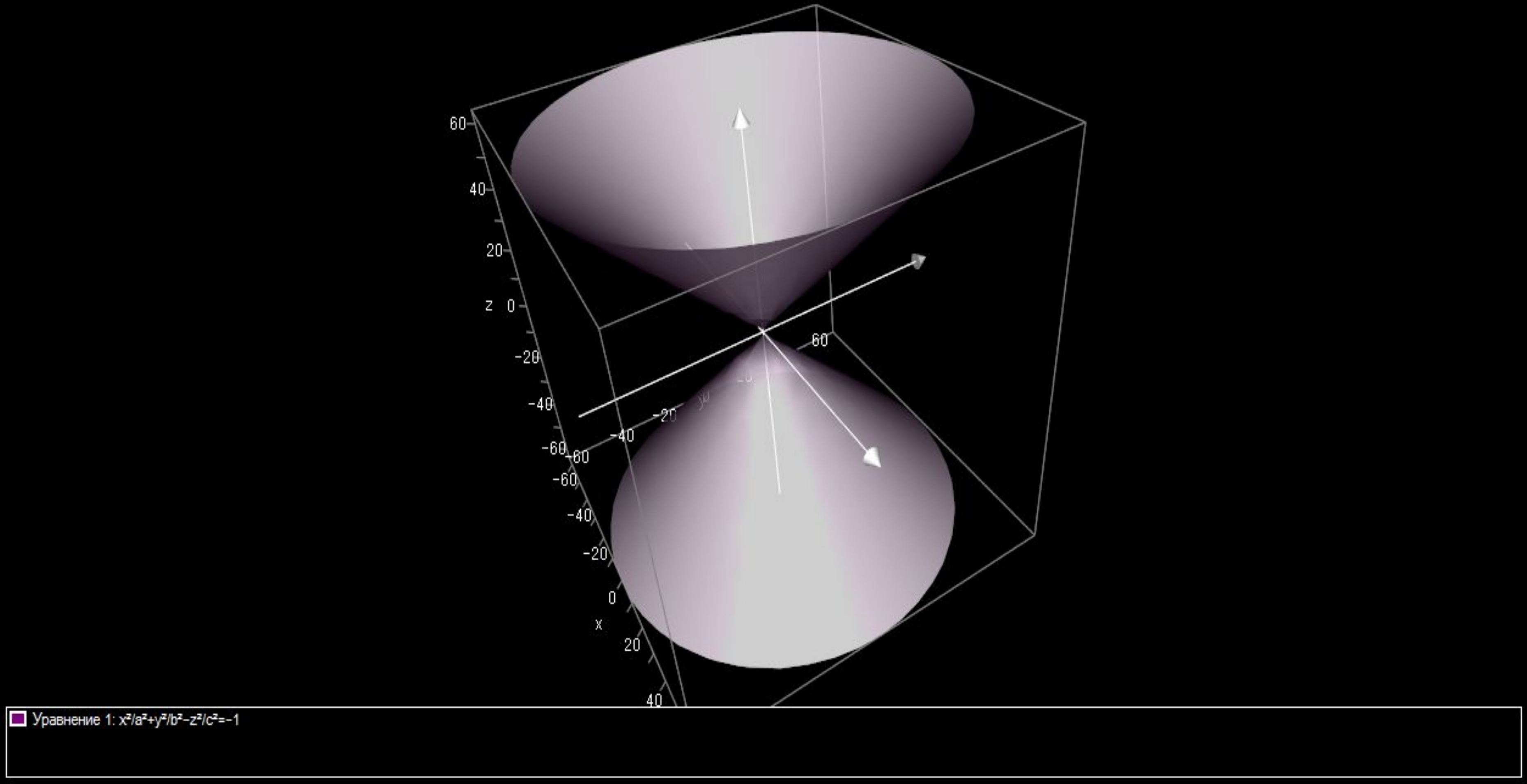
Двуполостный гиперболоид

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$$



Двуполостный гиперболид

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1$$



Сечение двуполостного гиперболоида