

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра теоретической и прикладной механики

**Шпортько Владимир Валерьевич**

ДВИЖЕНИЕ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА  
ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ  
ЦИЛИНДРА

**Руководитель**

*Конон Павел Николаевич  
доцент кафедры ТПМ  
канд. физ.-мат. наук*

# Содержание

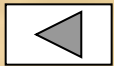
- Актуальность 1. Актуальность
- Поставленные задачи 2. Поставленные задачи
- Объект исследования 3. Объект исследования
- Научные допущения 4. Научные допущения
- Основные результаты 5. Основные результаты
- Научная новизна 6. Научная новизна
- Положения, выносимые на защиту 7. Положения, выносимые на защиту
- Спасибо за внимание 8. Спасибо за внимание



# Актуальность

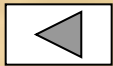
- В химической, строительной, пищевой и других отраслях промышленности находят широкое применение процессы, использующие движение слоя жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра
- Получение уравнений эволюции слоя жидкости на поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра и исследование их решений представляет определенный научный интерес

Актуальность  
Поставленные задачи  
Объект исследования  
Научные допущения  
Основные результаты  
Научная новизна  
Положения, выносимые на защиту  
Спасибо за внимание



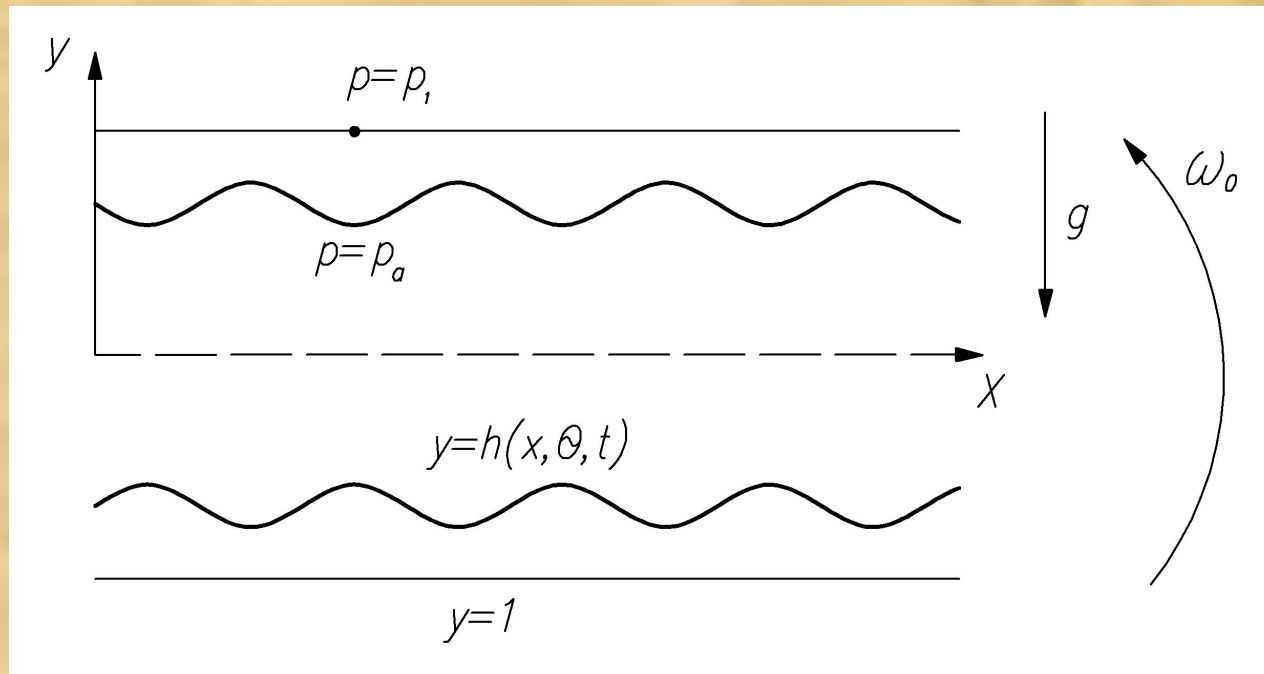
# Поставленные задачи

- ❖ Получение уравнения относительного равновесия слоя жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра
- ❖ Исследование плоских и осесимметричных слоев при помощи первых интегралов соответствующих уравнений равновесия
- ❖ Проведение линейного анализа ветвления решений
- ❖ Вывод системы уравнений для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя вязкой жидкости конечной толщины



# Объект исследования

Изучается движение слоя вязкой несжимаемой жидкости на внутренней поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью горизонтально расположенного цилиндра



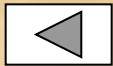
[Актуаль-](#)  
[ность](#)  
[Поставлен-](#)  
[ные](#)  
[задачи](#)  
[Объект](#)  
[иссле-](#)  
[дова-](#)  
[ния](#)  
[Научные](#)  
[допу-](#)  
[щения](#)  
[Основные](#)  
[результаты](#)  
[Научная](#)  
[новизна](#)  
[Положения,](#)  
[выноси-](#)  
[мые на](#)  
[защиту](#)  
[Спасибо за](#)  
[внима-](#)  
[ние](#)



# Научные допущения

- Уравнение относительного равновесия получено в предположении отсутствия вязкого взаимодействия с окружающей средой и массовых сил
- При рассмотрении эволюции плоского слоя полностью учтено влияние физических факторов на течение жидкости и не ставится условие тонкости слоя

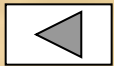
[Актуаль-](#)  
[ность](#)  
[Поставлен-](#)  
[ные](#)  
[задачи](#)  
[Объект](#)  
[иссле-](#)  
[дова-](#)  
[ния](#)  
[Научные](#)  
[допу-](#)  
[щения](#)  
[Основные](#)  
[результаты](#)  
[Научная](#)  
[новизна](#)  
[Положения,](#)  
[выноси-](#)  
[мые на](#)  
[защиту](#)  
[Спасибо за](#)  
[внима-](#)  
[ние](#)



# Основные результаты

Из граничного условия на нормальные напряжения в относительной системе координат, связанной с вращающимся цилиндром, выведено уравнение для определения свободной поверхности неподвижного стационарного слоя:

$$\frac{2}{R_s} = -\frac{1}{2} We(2Eu + h^2 - 1)$$



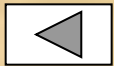
# Основные результаты

Получены первые интегралы уравнений относительного равновесия плоских и осесимметричных слоев жидкости:

$$h'^2 = -h^2 \frac{Q_1(h, B) \cdot Q_2(h, B)}{Q_0^2(h, B)}$$

и, соответственно,

$$h'^2 = -\frac{Q_1(h, B) \cdot Q_2(h, B)}{Q_0^2(h, B)}$$

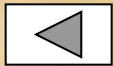




# Основные результаты

Проведено численное интегрирование уравнения равновесия плоского слоя и построены графики полученных решений:

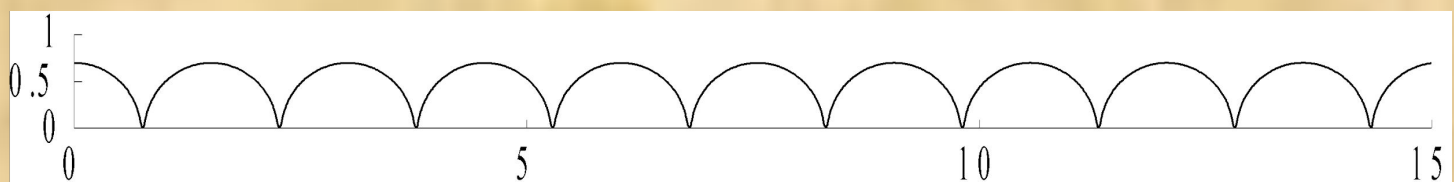
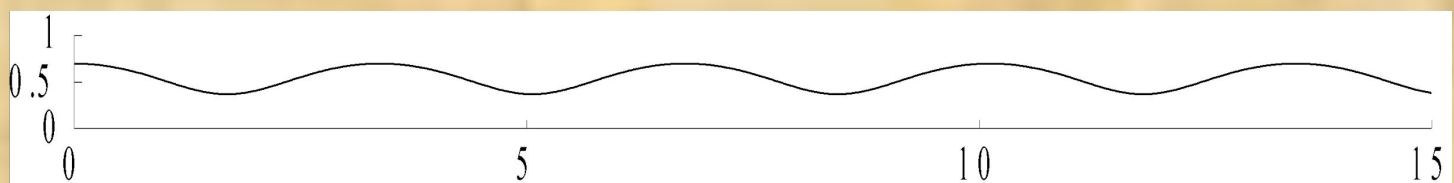
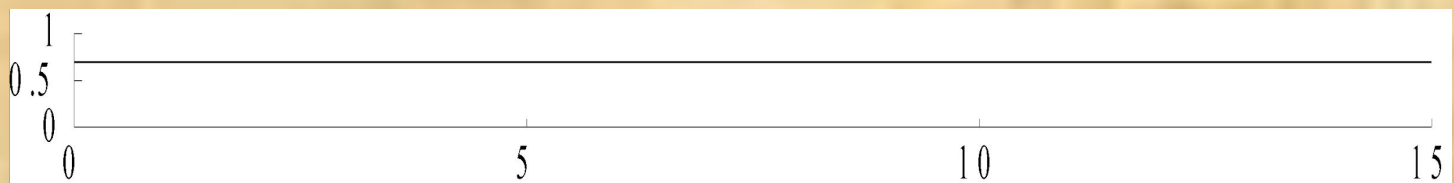
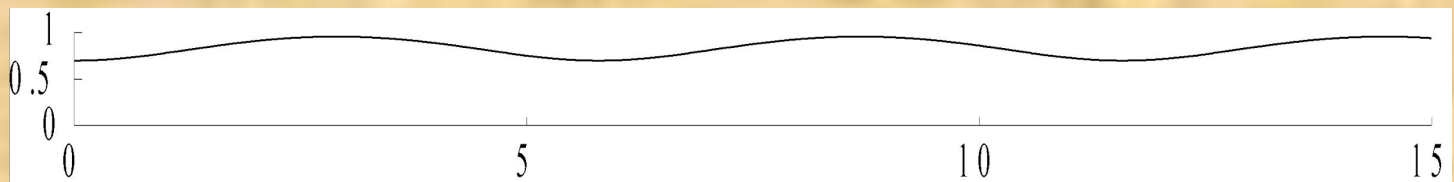
[Актуаль-](#)  
[ность](#)  
[Поставлен-](#)  
[ные](#)  
[задачи](#)  
[Объект](#)  
[иссле-](#)  
[дова-](#)  
[ния](#)  
[Научные](#)  
[допу-](#)  
[щения](#)  
[Основные](#)  
[результы-](#)  
[таты](#)  
[Научная](#)  
[новизна](#)  
[Положения,](#)  
[выноси-](#)  
[мые на](#)  
[защиту](#)  
[Спасибо за](#)  
[внима-](#)  
[ние](#)



Показано, что существование волнообразных поверхностей неподвижных плоских слоёв жидкости является невозможным

# Основные результаты

Получены все характерные формы осесимметричной свободной поверхности:



Актуальность  
Поставленные задачи  
Объект исследования  
Научные допущения  
Основные результаты  
Научная новизна  
Положения, выносимые на защиту  
Спасибо за внимание



# Основные результаты

- Для плоских слоев показано, что в линейной постановке бифуркации решений не происходит
- В осесимметричном случае ветвление решений определяется двумя бифуркационными параметрами:

$$We_k = \frac{1 - (k\alpha h_0)^2}{h_0^3} > 0; \quad \chi_k = \frac{[3 - (k\alpha h_0)^2] h_0^2}{2[(k\alpha h_0)^2 - 1]}$$

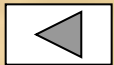


# Основные результаты

Для достаточно быстрого вращения цилиндра получена система уравнений для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя жидкости конечной толщины в поле сил инерции, поверхностного натяжения и тяжести

$$\delta_\tau = H(\delta)T_\varphi + R(\delta, T)\delta_\varphi;$$

$$T_\tau = -\frac{60}{\delta E_0(\delta)} \sum_{n=1}^5 I_n(\delta, \delta_\varphi, T, T_\varphi) + \frac{1}{We} \frac{60}{(1-\delta)^4 E_0(\delta)} \left( 6\delta_\varphi^3 + 6(1-\delta)\delta_\varphi\delta_{\varphi\varphi} + (1-\delta)^2(\delta_\varphi + \delta_{\varphi\varphi}) \right) + \frac{1}{Fr} \frac{30(\delta-2)\cos(\varphi+\tau)}{E_0(\delta)} + \frac{1}{Re} \frac{10T}{\delta^2 E_0(\delta)} (6+3\delta-\delta^2)$$



# Основные результаты

В последних уравнениях введены следующие обозначения:

$$H(\delta) = \frac{\delta(5\delta - 8)}{24(\delta - 1)}, \quad R(\delta, T) = \frac{T(5\delta - 4)}{12(\delta - 1)},$$

$$-\frac{60}{\delta E_0(\delta)} \sum_{n=1}^5 I_n(\delta, \delta_\varphi, T, T_\varphi) = U\delta_\varphi + VT_\varphi;$$

$$U(\delta, T) = T^2 U_2(\delta) + T U_1(\delta) + U_0(\delta); \quad V(\delta, T) = T V_1(\delta) + V_0(\delta);$$

$$U_2(\delta) = \frac{1}{\delta E_0(\delta)} \left( \frac{1}{42} (-336 + 553\delta - 38\delta^2) + \frac{5\delta - 4}{12(\delta - 1)} (20 - 50\delta + 27\delta^2) \right);$$

$$U_1(\delta) = \frac{40 - 50\delta}{E_0(\delta)}; \quad U_0(\delta) = \frac{60(\delta - 1)}{E_0(\delta)};$$

$$V_1(\delta) = \frac{1}{E_0(\delta)} \left( \frac{1}{21} (-336 + 161\delta + 34\delta^2) + \frac{5\delta - 8}{24(\delta - 1)} (20 - 50\delta + 27\delta^2) \right);$$

$$V_0(\delta) = \frac{\delta(40 - 25\delta)}{E_0(\delta)}; \quad E_0(\delta) = -20 + 25\delta - 9\delta^2.$$

Актуаль-  
ность  
Поставлен-  
ные  
задачи  
Объект  
иссле-  
дова-  
ния  
Научные  
допу-  
щения  
Основные  
результы-  
таты  
Научная  
новизна  
Положения,  
выноси-  
мые на  
защиту  
Спасибо за  
внима-  
ние



# Научная новизна

- Получение уравнения равновесия слоя жидкости внутри вращающегося цилиндра и его исследование при помощи первого интеграла
- Доказательство невозможности существования волнообразных поверхностей плоских слоёв жидкости
- Вывод уравнений эволюции плоского слоя жидкости при достаточно быстром вращении цилиндра

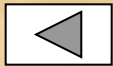
[Актуальность](#)  
[Поставленные задачи](#)  
[Объект исследования](#)  
[Научные допущения](#)  
[Основные результаты](#)  
[Научная новизна](#)  
[Положения, выносимые на защиту](#)  
[Спасибо за внимание](#)



# Положения, выносимые на защиту

- Равновесие слоя жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра
- Первые интегралы уравнений равновесия плоских и осесимметричных слоев жидкости
- Эволюция поверхности в случае плоского движения

Актуальность  
Поставленные задачи  
Объект исследования  
Научные допущения  
Основные результаты  
Научная новизна  
Положения, выносимые на защиту  
Спасибо за внимание



СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ!

[Актуаль-  
ность](#)  
[Поставлен-  
ные  
задачи](#)  
[Объект  
иссле-  
дова-  
ния](#)  
[Научные  
допу-  
щения](#)  
[Основные  
результы](#)  
[Научная  
новизна](#)  
[Положения,  
выноси-  
мые на  
защиту](#)  
[Спасибо за  
внима-  
ние](#)

