Меры, инвариантные относительно отображения $z \to z^2$

Лапин М.В.

Белорусский государственный университет

Компоненты динамической системы

- *Фазовое пространство X*, элементы которого (“точки”) представляют собой возможные состояния системы.
- “*Время*”, которое может быть дискретным или непрерывным.
- *Закон эволюции системы*.

Динамическая система – математическая модель некоторого мира

- В начале XX века Пуанкаре обнаружил невозможность явного описания форм траекторий точек пространства в общем случае
- Это означает, что в общем случае динамическая система может вести себя «слишком» хаотично.

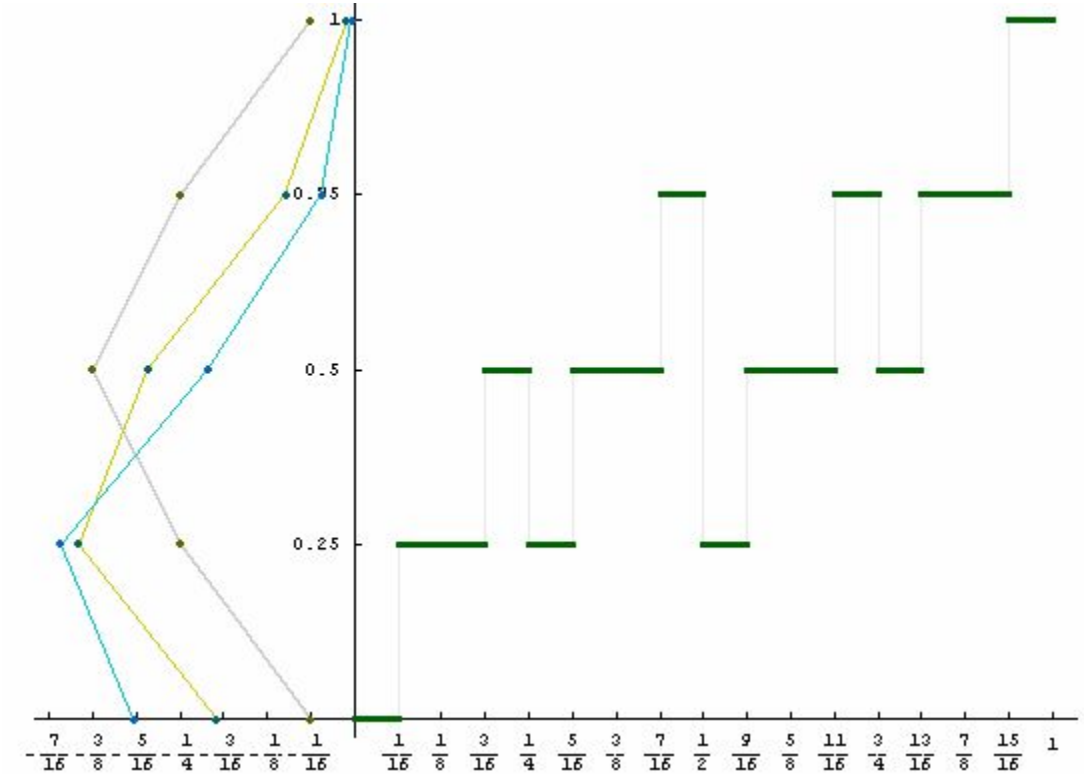
Инвариантные меры

- Вместо описания орбиты каждой точки можно попытаться описать, как орбиты ведут себя в среднем или изучать их асимптотическое поведение при устремлении времени к бесконечности.
- Инвариантные меры представляют собой один из мощных способов описания асимптотических свойств систем со сложными структурами.

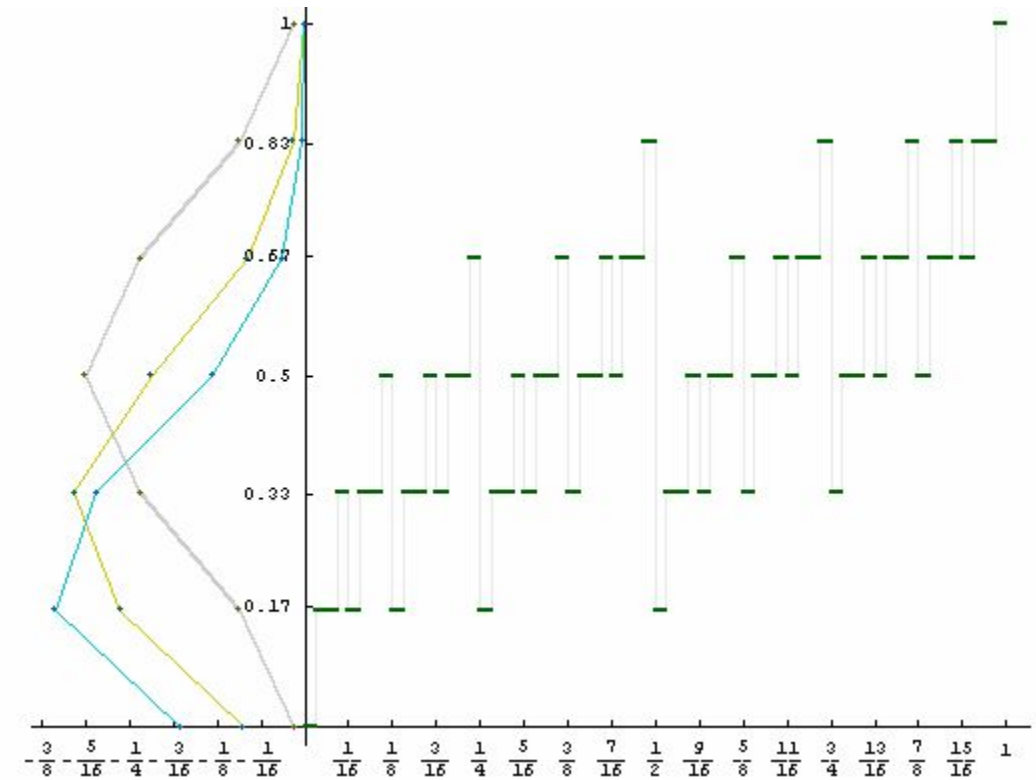
Компьютерное моделирование первых приближений плотностей мер μ_p

- На графиках изображено распределение частоты единиц в первых n знаках двоичного разложения чисел из отрезка [0, 1], а также первые приближения плотностей мер μ_p.

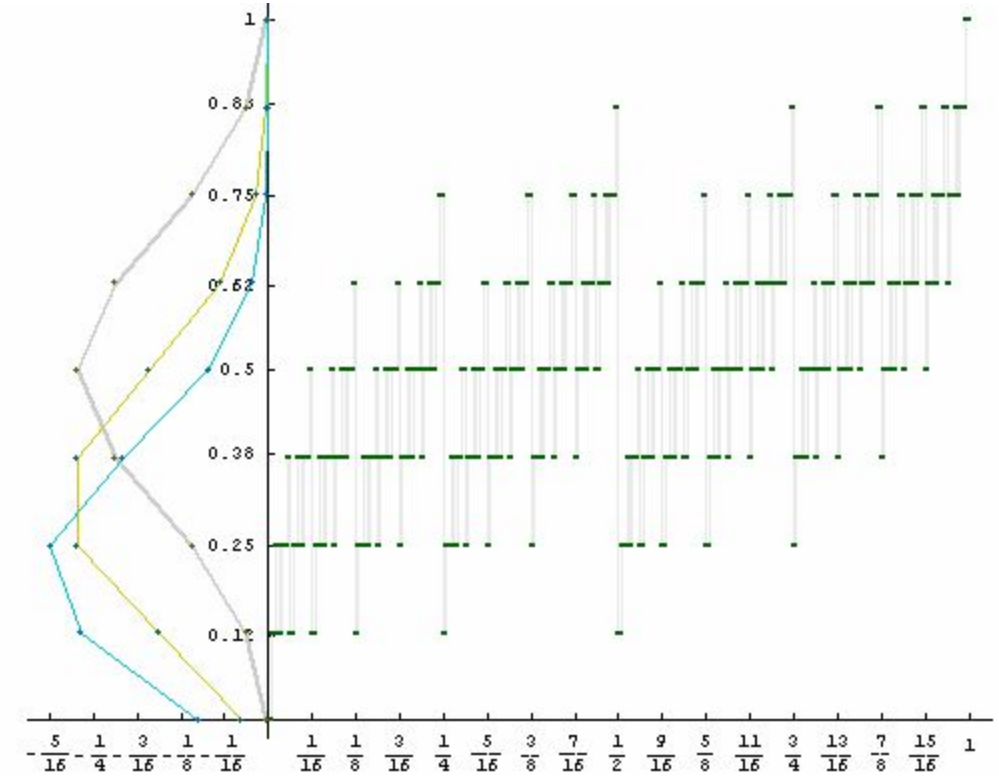
N = 4


1
0.75
0.5
0.25
7/16 3/8 5/16 1/4 3/16 1/8 1/16
1/16 1/8 3/16 1/4 5/16 3/8 7/16 1/2 9/16 5/8 11/16 3/4 13/16 7/8 15/16 1

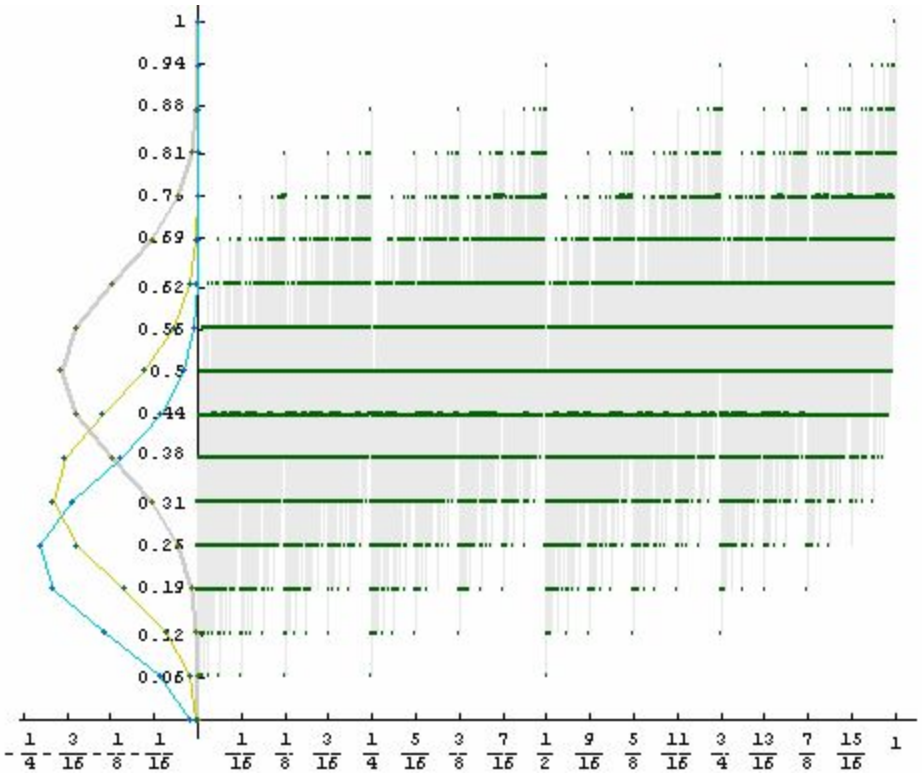
N = 6


1
0.83
0.67
0.5
0.33
0.17
3/8 5/16 1/4 3/16 1/8 1/16
1/16 1/8 3/16 1/4 5/16 3/8 7/16 1/2 9/16 5/8 11/16 3/4 13/16 7/8 15/16 1

N = 8


1
0.88
0.75
0.62
0.5
0.38
0.25
0.12
$-\frac{5}{16}$ $-\frac{1}{4}$ $-\frac{3}{16}$ $-\frac{1}{8}$ $-\frac{1}{16}$
$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{11}{16}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{13}{16}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{15}{16}$ 1

N = 16


1
0.94
0.88
0.81
0.75
0.69
0.62
0.56
0.5
0.44
0.38
0.31
0.25
0.19
0.12
0.06
-1/4 -3/16 -1/8 -1/16 1/16 1/8 3/16 1/4 5/16 3/8 7/16 1/2 9/16 5/8 11/16 3/4 13/16 7/8 15/16 1

Литература

1. Антоневич А. Б., Радыно Я. В., Функциональный анализ и интегральные уравнения, 2-е изд., Мн.: БГУ, 2003
2. Каток А. Б., Хасселблатт Б., Введение в современную теорию динамических систем, М.: Факториал, 1999
3. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Теория вероятностей, Мн.: БГУ, 2003
4. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, в двух томах, т. 1, М.: Мир, 1984
5. Халмош П.Р., Лекции по эргодической теории, Библиотека «Регулярная и хаотическая динамика», т. 12, Ижевск.: Удмуртский университет, 1999
6. Brin M., Stuck G., Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press, 2002
7. Luzzatto S., Determinism and randomness in dynamical systems, http://www.ma.ic.ac.uk/~luzzatto/StefIC/
8. Springer Online Reference Works, Invariant measure, http://eom.springer.de/I/i052250.htm