Применение статической оптимизации.

Теория личного потребления.

1°. Множество благ. Доступные наборы благ.

Набор благ – упорядоченная совокупность col$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ количеств каждого из благ - n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ или точку x, где $x_j \geq 0$, $(j = \overline{1,n})$ - количество блага j в натуральных единицах (штуках, килограммах, метрах и т.д.). Всевозможные наборы благ образуют так называемое *множество благ*

$$R_+^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \middle| x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}) \right\} \qquad (1)$$

Если $x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}$, то множество наборов благ

$$G = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R_+^n \middle| x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, (j = \overline{1,n}) \right\} \qquad (2)$$

Множество наборов благ G может быть и неограниченным:

$$G = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R_+^n | \, x_j \geq x_j^{min}, (j = \overline{1,n}) \}$$
$$G = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R_+^n \middle| x_j \leq x_j^{max}, (j = \overline{1,n}) \right\}$$

M - доход, который он может использовать для приобретения благ.
Блага приобретаются по ценам

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ – цены соответственно 1-го, 2-го,..., n-го благ.

$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$, где $p_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ - *вектор цен благ.*

Стоимость любого набора равна

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

Бюджетное ограничение:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq M \qquad (3)$$

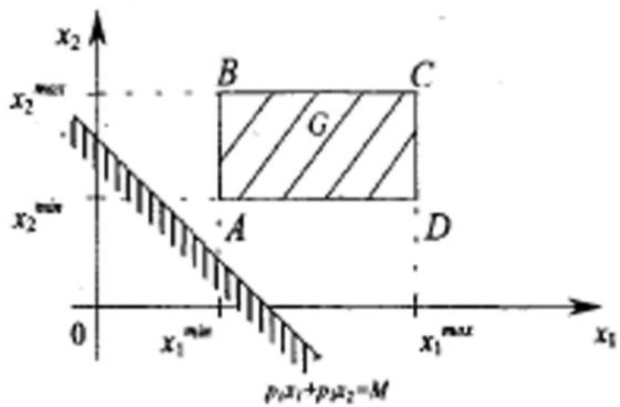
Множество *K* доступных наборов благ:

$$x_j \geq x_j^{min}, j \in J_1,$$
$$x_k \leq x_k^{max}, k \in J_2,$$
$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq M$$

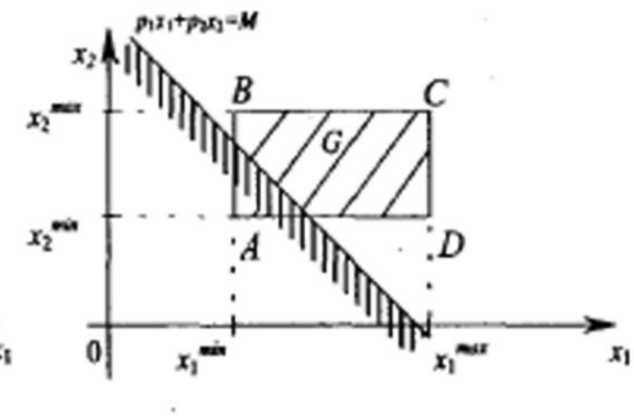
где J_1, и J_2 — некоторые подмножества множества {1,2,...,n}.

Множество *K* доступных наборов благ может быть одним из трех:

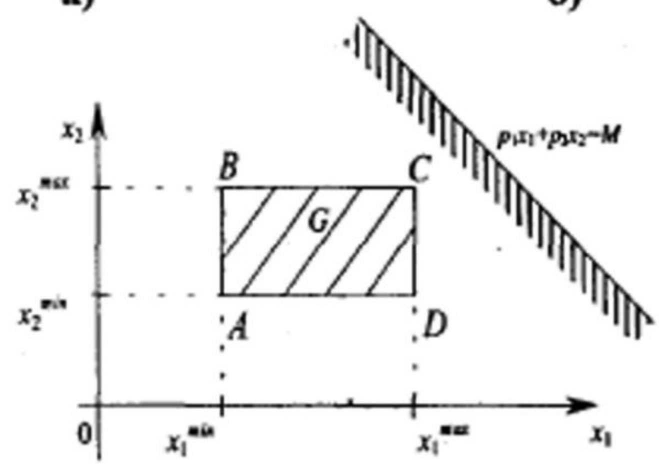
1) пустое множество
2) часть n-мерного параллелепипеда G
3) весь n-мерный параллелепипед G



а)



б)



в)

2°. Функция полезности и ее свойства. Способность удовлетворять ту или иную потребность называют *полезностью блага.*

Потребитель при рассмотрении двух наборов благ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ выносит одно из суждений:

а) набор x предпочтительнее (полезнее), чем набор y (x>y);

б) набор y предпочтительнее, чем набор x (x<y);

в) наборы x и y равно предпочтительны (равноценны) $(x \sim y)$

Запись $x \geq y$ означает, что набор x не менее предпочтителен, чем набор y.

Функция $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная на R_+^n (или некотором $G \subset R_+^n$), называется *функцией полезности*, соответствующей отношению предпочтения ≥, если $u(x) \geq u(y)$, тогда и только тогда, когда $x \geq y$, причем если $u(x) = u(y)$,то $x \sim y$ и обратно, если $x \sim y$, то $u(x) = u(y)$. Потребитель предпочитает выбирать x, а не y, если $u(x) \geq u(y)$.

Тип функции полезности	Функция полезности	Ограничения
Логарифмическая	$u(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j \ln x_j$	$\alpha_j>0,\ x_j>0,\ j=\overline{1,n}$
Мультипликативная	$u(x)=a\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_j}$	$0<\alpha_j<1,\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n},$ $a>0$
Аддитивная	$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_j x_j^{\beta_j}$	$\alpha_j>0,\ 0<\beta_j<1,\ x_j\geq 0,$ $j=\overline{1,n}$
Квадратичная	$u(x)=\sum_{i=1}^{n}a_j x_j+$ $+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_i x_j$	$\alpha_j+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_j>0,\ j=\overline{1,n},$ $B=\left(b_{ij}\right)<0$ (отриц. опред. матрица)

Общие свойства функции полезности:

1) Предполагают, что функция полезности дважды дифференцируема и строго вогнута.

2) Свойство ненасыщаемости: для любых заданных двух наборов $x, y \in R_+^n$ соотношение $x \geq y$ влечет $u(x) \geq u(y)$, ($x > y$ влечет $u(x) > u(y)$).

Предельная полезность $\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} > 0 \; \forall j = \overline{1, n}, x \in R_+^n$. Кроме того, часто предполагают, что

$$\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \infty \text{ и } \lim_{x_j \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n}$$

В ортанте R_+^n уравнению $u(x) = c$ соответствует поверхность с уравнением $u(x) = c$ - *поверхность безразличия.*

Для данной функции полезности кривые (поверхности) безразличия обладают следующими свойствами:
1) через каждую точку множества товаров проходит лишь одна кривая (поверхность) безразличия;
2) линии (поверхности) безразличия не пересекаются, причем кривая, лежащая выше и правее другой кривой, представляет собой более предпочтительные наборы товаров;
3) линии (поверхности) безразличия обращены выпуклостью к началу координат (вытекает из строгой вогнутости функции полезности);
4) множество наборов x, для которых $u(x) \geq c$ (предпочтительное множество) является выпуклым множеством.

3°. Предельная полезность и предельная норма замещения благ. Пусть количество j-го блага изменилось на величин Δx_j, а количества остальных благ не изменилось. Это вызывает частное приращение функции полезности

$\Delta u_j = u(x_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - u(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, причем Δx_j>0.

Величина $\frac{\Delta u_j}{\Delta x_j} > 0$ указывает на изменение полезности на дополнительную единицу j-го блага. Переходя к пределу при $\Delta x_j \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta u_j}{\Delta x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} \geq 0$$

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ называется *предельной полезностью j-го блага*.

Пусть объемы потребляемых благ изменились соответственно на малые величины $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$. Тогда полным приращением полезности является величина $\Delta u \cong du$, где

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

– полный дифференциал функции полезности.

Если допустить, что $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$, то $du = 0$. Предположим, что количество всех благ, кроме k и j, которые взаимозаменяемы, не изменяются. Тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \text{ для всех } i \neq j, k$$

Тогда полное приращение выпуска продукции будет

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = -\frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k \Rightarrow \qquad \frac{dx_j}{dx_k} = -\frac{\partial u / \partial x_k}{\partial u / \partial x_j}$$

Тогда

$$n_{jk} = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_k} = \frac{dx_j}{dx_k} = -\frac{\partial u/_{\partial x_k}}{\partial u/_{\partial x_j}}$$

Величина $n_{jk} = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_k}$ называется *коэффициентом (нормой) предельной эквивалентной замены благ*. Поскольку $\partial u/_{\partial x_j}$>0, $j = \overline{1, n}$, то n_{jk}<0, т.е. увеличение потребления одного блага вызывает уменьшение другого для сохранения одного и того же уровня полезности. Вторые частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ характеризуют изменение предельной полезности $\frac{\partial u}{\partial x_j}$. Например, $\frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2}$ характеризуют изменение предельной полезности $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ блага j при изменении потребления этого же блага. Предполагаем, что $\frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2} < 0$

Задача оптимального выбора благ потребителем

1° Математическая модель задачи оптимального выбора благ потребителем. Математическая модель выбора благ потребителем имеет следующий вид задачи математического программирования (задачи I):

$$\max_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x}) \text{ при условии } \boldsymbol{px} \le \boldsymbol{M}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

или в развернутой форме

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \le M \quad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \quad (3),$$

где $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и M — заданные положительные параметры.

Для n = 2 получаем задачу II:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

при условии

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le M, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = U(\boldsymbol{x}) + \lambda(I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} - \lambda \boldsymbol{p} \leq \mathbf{0}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x} \geq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} - \lambda \boldsymbol{p}\right)\boldsymbol{x} = 0, \qquad \lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \lambda \geq 0$$

Все переменные и частные производные здесь вычисляются в $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$, где вектор $\mathbf{x}^*$ — решение задачи (1).

Таким образом, из условий (4) следует, что если $x_j^* > 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} - \lambda^* p_j = 0, \text{т. е.} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda^* p_j, \qquad j = \overline{1,n} \qquad (5)$$

$$M - \boldsymbol{px}^* = 0 \qquad (6)$$

Т.о., вместо задачи I можно рассматривать задачу III

$$\max_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x}) \text{ при условии } \boldsymbol{px} = M, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

или в развернутой форме

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = M$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Для решения задачи III составляем функцию Лагранжа

$$L(\boldsymbol{x},\lambda) = u(\boldsymbol{x}) + \lambda(M - \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}) = u(x_1,\dots,x_n) + \lambda\left(M - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right)$$

для которой

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, j = 1,2,\dots,n \text{ и } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

Т.е. выполняются условия

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda^* p_j, \qquad j = \overline{1,n} \text{ и } \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = M$$

Следствия, имеющие место при оптимальном выборе благ потребителем.

1. Предельные полезности благ пропорциональны их ценам:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} = \lambda^* p_j, \ \ j = 1,2,..,n$$

2. Отношение предельных полезностей двух благ равно отношению их цен:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} = p_j : p_k, \ \ j,k = 1,2,..,n, \ \ j \neq k$$

3. Предельная полезность, приходящаяся на денежную единицу, одинакова для всех приобретаемых благ:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : p_j = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} : p_k, \ \ j,k = 1,2,..,n, \ \ j \neq k$$

4. Равные предельные полезности, приходящиеся на денежную единицу, равны множителю λ^* - предельной полезности денежной единицы, которую потребитель расходует для приобретения благ:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : p_j = \lambda^*, \quad j, k = 1,2,..,n$$

5. Норма замещения

$$n_{kl} = \frac{\Delta x_k}{\Delta x_l} = -\frac{p_l}{p_k}, \quad k, l = 1,2,\ldots,n, k \neq l$$

6. В оптимальной точке имеет место равенство

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial M} = \lambda^*$$

Действительно, из равенства

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = M \ \text{ следует } \ \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = 1$$

Используя правило дифференцирования сложной функции и следствие 1, получим

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial M} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dM} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^* p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = \lambda^* \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = \lambda^*$$

2°. Взаимная задача к задаче оптимального выбора благ потребителем.

Решение задачи об оптимальном выборе благ найдено в виде

$$x_j^* = x_j^*(\boldsymbol{p}, M), \qquad j = 1, \ldots, n$$

Если подставить эти значения в функцию полезности, то получим

$$u^* = u^*(\boldsymbol{p}, M)$$

Зафиксируем значение функции полезности на уровне u_0 и рассмотрим те блага, для которых $u(\boldsymbol{x}) = u_0$

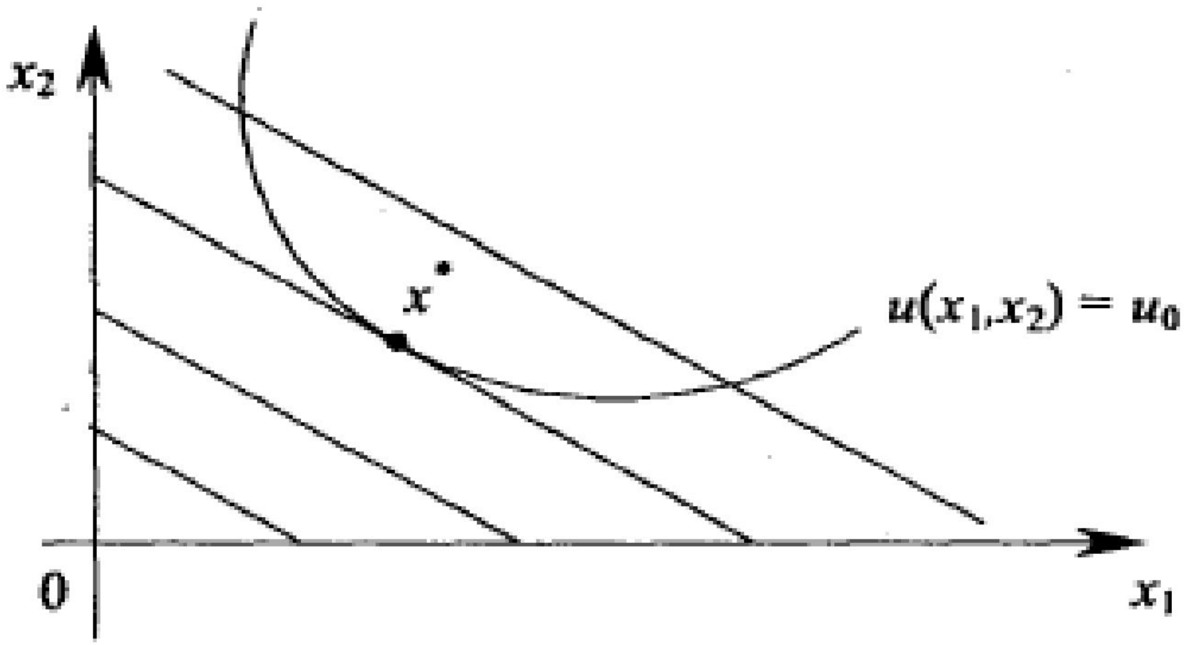
$$M = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

Взаимная задача IV: найти минимум функции

$$M = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} p_j x_j$$

при условии

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_0; \;\; x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$



x_2
x^*
$u(x_1,x_2) = u_0$
0
x_1

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \mu(u_0 - u(x_1, \dots, x_n))$$

Система уравнений, определяющая экстремум, следующая

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = p_j - \mu \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = u_0 - u(x_1, \dots, x_n);\ \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{1}{\mu} p_j, j = \overline{1, n};\ u(x_1, \dots, x_n) = u_0 \quad (7)$$

Решая полученную систему (7), найдем оптимальный набор благ

$$x_j^* = x_j^*(\boldsymbol{p}, u_0), \qquad j = 1, \dots, n$$

и множитель μ^*. Минимальные затраты

$$M^* = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j{}^*$$

Полный дифференциал функции затрат

$$dM = \sum_{j=1}^{n} p_j \mathrm{d}x_j$$

Так как в точке минимума $\boldsymbol{x}^*$ справедливы равенства

$$p_j = \mu^* \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

то получаем

$$dM = \sum_{j=1}^{n} \mu^* \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = \mu^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = \mu^* du$$

Таким образом, в оптимальной точке

$$\mu^* = \frac{dM^*}{du}$$

Ранее было показано, что

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial M} = \lambda^*$$

Взаимная задача IV примет вид: найти

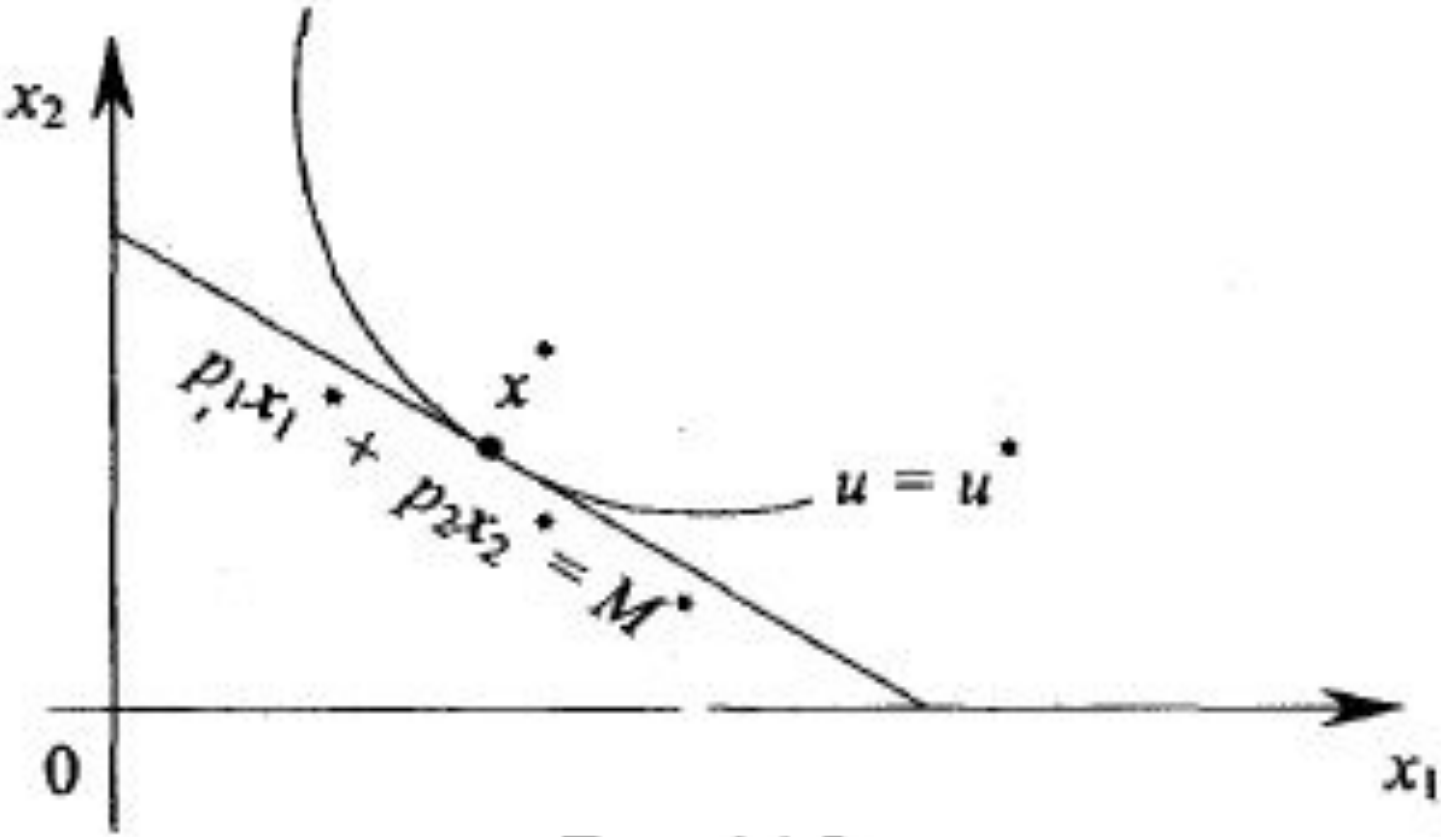
$$\min\left(M = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right)$$

при ограничениях

$$u = u^*; x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$
$$M = M^*$$

В этом случае оптимальные решения взаимной и исходной задач совпадут. Для n = 2 имеем одну и ту же точку касания бюджетной прямой и кривой безразличия:

$$\mu^* = \frac{1}{\lambda^*} \text{ и } M = M^*$$


x_2
x^*
$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = M^*$
$u = u^*$
0
x_1