

**Применение статической
оптимизации.**

Теория личного потребления.

1°. Множество благ. Доступные наборы благ.

Набор благ – упорядоченная совокупность $col(x_1, x_2, \dots, x_n)$ количеств каждого из благ - n -мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ или точку x , где $x_j \geq 0, (j = \overline{1, n})$ - количество блага j в натуральных единицах (штуках, килограммах, метрах и т.д.). Всевозможные наборы благ образуют так называемое *множество благ*

$$R_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_j \geq 0, (j = \overline{1, n})\} \quad (1)$$

Если $x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}$, то множество наборов благ

$$G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R_+^n \mid x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, (j = \overline{1, n})\} \quad (2)$$

Множество наборов благ G может быть и неограниченным:

$$G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R_+^n \mid x_j \geq x_j^{min}, (j = \overline{1, n})\}$$

$$G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R_+^n \mid x_j \leq x_j^{max}, (j = \overline{1, n})\}$$

M - доход, который он может использовать для приобретения благ.

Блага приобретаются по ценам

p_1, p_2, \dots, p_n - цены соответственно 1-го, 2-го, ..., n -го благ.

$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$, где $p_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ - вектор цен благ.

Стоимость любого набора равна

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j$$

Бюджетное ограничение:

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j \leq M \quad (3)$$

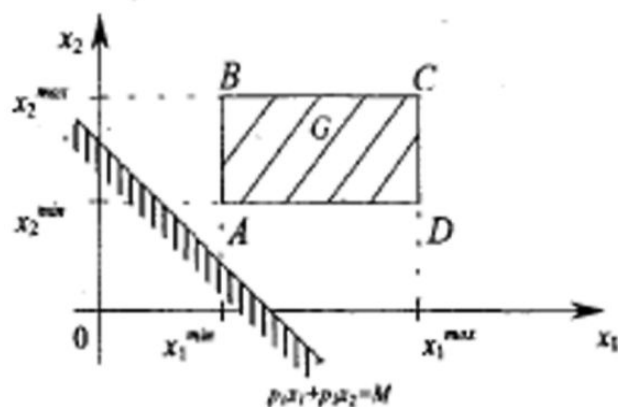
Множество K доступных наборов благ:

$$\begin{aligned} x_j &\geq x_j^{\min}, j \in J_1, \\ x_k &\leq x_k^{\max}, k \in J_2, \\ \sum_{j=1}^n p_j x_j &\leq M \end{aligned}$$

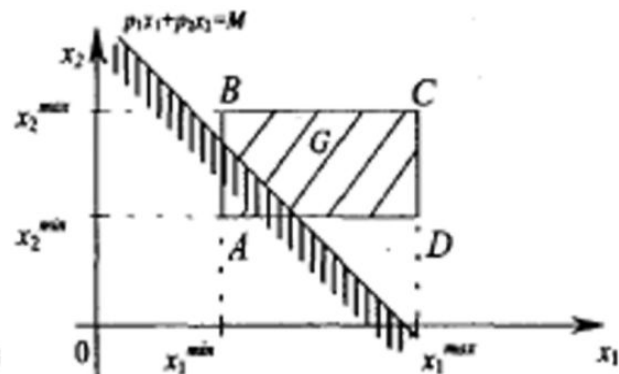
где J_1 , и J_2 - некоторые подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Множество K доступных наборов благ может быть одним из трех:

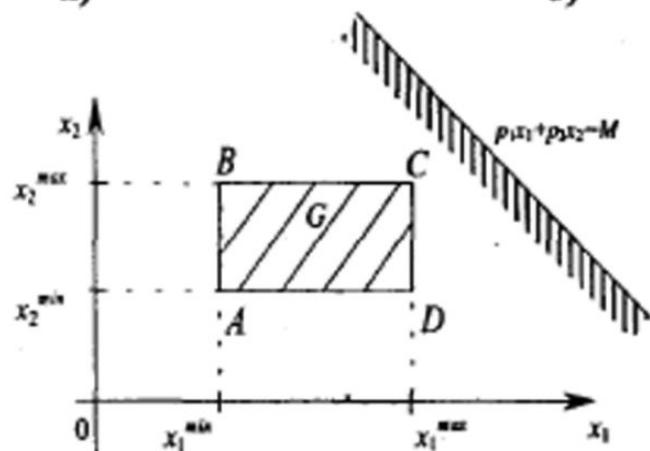
- 1) пустое множество
- 2) часть n -мерного параллелепипеда G
- 3) весь n -мерный параллелепипед G



а)



б)



в)

2°. Функция полезности и ее свойства. Способность удовлетворять ту или иную потребность называют *полезностью блага*.

Потребитель при рассмотрении двух наборов благ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ выносит одно из суждений:

- а) набор x предпочтительнее (полезнее), чем набор y ($x > y$);
- б) набор y предпочтительнее, чем набор x ($x < y$);
- в) наборы x и y равно предпочтительны (равноценны) ($x \sim y$)

Запись $x \geq y$ означает, что набор x не менее предпочтителен, чем набор y .

Функция $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная на R_+^n (или некотором $G \subset R_+^n$), называется *функцией полезности*, соответствующей отношению предпочтения \geq , если $u(x) \geq u(y)$, тогда и только тогда, когда $x \geq y$, причем если $u(x) = u(y)$, то $x \sim y$ и обратно, если $x \sim y$, то $u(x) = u(y)$. Потребитель предпочитает выбирать x , а не y , если $u(x) \geq u(y)$.

Тип функции полезности	Функция полезности	Ограничения
<i>Логарифмическая</i>	$u(x) = \sum_{j=1}^n a_j \ln x_j$	$\alpha_j > 0, x_j > 0, j = \overline{1, n}$
<i>Мультипликативная</i>	$u(x) = a \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$	$0 < \alpha_j < 1, x_j \geq 0, j = \overline{1, n},$ $a > 0$
<i>Аддитивная</i>	$u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^{\beta_j}$	$\alpha_j > 0, 0 < \beta_j < 1, x_j \geq 0,$ $j = \overline{1, n}$
<i>Квадратичная</i>	$u(x) = \sum_{j=1}^n a_j x_j +$ $+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j$	$\alpha_j + \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i > 0, j = \overline{1, n},$ $B = (b_{ij}) < 0$ (отриц. опред. матрица)

Общие свойства функции полезности:

- 1) Предполагают, что функция полезности дважды дифференцируема и строго вогнута.
- 2) Свойство ненасыщаемости: для любых заданных двух наборов $x, y \in R_+^n$ соотношение $x \geq y$ влечет $u(x) \geq u(y)$, ($x > y$ влечет $u(x) > u(y)$).

Предельная полезность $\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} > 0 \forall j = \overline{1, n}, x \in R_+^n$. Кроме того, часто предполагают, что

$$\lim_{x_j \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \infty \text{ и } \lim_{x_j \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n}$$

В ортанте R_+^n уравнению $u(x) = c$ соответствует поверхность с уравнением $u(x) = c$ - поверхность безразличия.

Для данной функции полезности кривые (поверхности) безразличия обладают следующими свойствами:

- 1) через каждую точку множества товаров проходит лишь одна кривая (поверхность) безразличия;
- 2) линии (поверхности) безразличия не пересекаются, причем кривая, лежащая выше и правее другой кривой, представляет собой более предпочтительные наборы товаров;
- 3) линии (поверхности) безразличия обращены выпуклостью к началу координат (вытекает из строгой вогнутости функции полезности);
- 4) множество наборов x , для которых $u(x) \geq c$ (предпочтительное множество) является выпуклым множеством.

3°. Предельная полезность и предельная норма замещения благ.

Пусть количество j -го блага изменилось на величину Δx_j , а количества остальных благ не изменилось. Это вызывает частное приращение функции полезности

$$\Delta u_j = u(x_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - u(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n), \text{ причем } \Delta x_j > 0.$$

Величина $\frac{\Delta u_j}{\Delta x_j} > 0$ указывает на изменение полезности на дополнительную единицу j -го блага. Переходя к пределу при $\Delta x_j \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\Delta u_j}{\Delta x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} \geq 0$$

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ называется *предельной полезностью j -го блага*.

Пусть объемы потребляемых благ изменились соответственно на малые величины $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Тогда полным приращением полезности является величина $\Delta u \cong du$, где

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

– полный дифференциал функции полезности.

Если допустить, что $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$, то $du = 0$. Предположим, что количество всех благ, кроме k и j , которые взаимозаменяемы, не изменяются. Тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \text{ для всех } i \neq j, k$$

Тогда полное приращение выпуска продукции будет

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = - \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k \Rightarrow \frac{dx_j}{dx_k} = - \frac{\partial u / \partial x_k}{\partial u / \partial x_j}$$

Тогда

$$n_{jk} = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_k} = \frac{dx_j}{dx_k} = - \frac{\partial u / \partial x_k}{\partial u / \partial x_j}$$

Величина $n_{jk} = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_k}$ называется коэффициентом (нормой) предельной эквивалентной замены благ. Поскольку $\partial u / \partial x_j > 0, j = \overline{1, n}$, то

$n_{jk} < 0$, т.е. увеличение потребления одного блага вызывает уменьшение другого для сохранения одного и того же уровня полезности.

Вторые частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ характеризуют изменение предельной полезности $\frac{\partial u}{\partial x_j}$. Например, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ характеризуют изменение предельной полезности $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ блага j при изменении потребления этого же блага. Предполагаем, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} < 0$

Задача оптимального выбора благ потребителем

1° Математическая модель задачи оптимального выбора благ потребителем. Математическая модель выбора благ потребителем имеет следующий вид задачи математического программирования (задачи I):

$$\max_x u(\mathbf{x}) \text{ при условии } \mathbf{p}\mathbf{x} \leq M, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

или в развернутой форме

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \leq M \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (3),$$

где $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и M — заданные положительные параметры.

Для $n = 2$ получаем задачу II:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

при условии

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq M, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



$$L(\mathbf{x}, \lambda) = U(\mathbf{x}) + \lambda(I - \mathbf{p}\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - \lambda \mathbf{p} \leq \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - \mathbf{p}\mathbf{x} \geq 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - \lambda \mathbf{p} \right) \mathbf{x} = 0, \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(I - \mathbf{p}\mathbf{x}) = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \lambda \geq 0$$

Все переменные и частные производные здесь вычисляются в $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$, где вектор \mathbf{x}^* — решение задачи (1).

Таким образом, из условий (4) следует, что если $x_j^* > 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} - \lambda^* p_j = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda^* p_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (5)$$

$$M - \mathbf{p}\mathbf{x}^* = 0 \quad (6)$$

Т.о., вместо задачи I можно рассматривать задачу III

$$\max_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) \text{ при условии } \mathbf{p}\mathbf{x} = M, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

или в развернутой форме

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = M$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Для решения задачи III составляем функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda(M - \mathbf{p}\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n) + \lambda \left(M - \sum_{j=1}^n p_j x_j \right)$$

для которой

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n \text{ и } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

Т.е. выполняются условия

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda^* p_j, \quad j = \overline{1, n} \text{ и } \sum_{j=1}^n p_j x_j = M$$

Следствия, имеющие место при оптимальном выборе благ потребителем.

1. Предельные полезности благ пропорциональны их ценам:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} = \lambda^* p_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

2. Отношение предельных полезностей двух благ равно отношению их цен:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} = p_j : p_k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq k$$

3. Предельная полезность, приходящаяся на денежную единицу, одинакова для всех приобретаемых благ:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : p_j = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} : p_k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq k$$

4. Равные предельные полезности, приходящиеся на денежную единицу, равны множителю λ^* - предельной полезности денежной единицы, которую потребитель расходует для приобретения благ:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} : p_j = \lambda^*, \quad j, k = 1, 2, \dots, n$$

5. Норма замещения

$$n_{kl} = \frac{\Delta x_k}{\Delta x_l} = -\frac{p_l}{p_k}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n, k \neq l$$

6. В оптимальной точке имеет место равенство

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial M} = \lambda^*$$

Действительно, из равенства

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = M \text{ следует } \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = 1$$

Используя правило дифференцирования сложной функции и следствие 1, получим

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial M} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dM} = \sum_{j=1}^n \lambda^* p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = \lambda^* \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = \lambda^*$$

2°. Взаимная задача к задаче оптимального выбора благ потребителем.

Решение задачи об оптимальном выборе благ найдено в виде

$$x_j^* = x_j^*(\mathbf{p}, M), \quad j = 1, \dots, n$$

Если подставить эти значения в функцию полезности, то получим

$$u^* = u^*(\mathbf{p}, M)$$

Зафиксируем значение функции полезности на уровне u_0 и рассмотрим те блага, для которых $u(\mathbf{x}) = u_0$

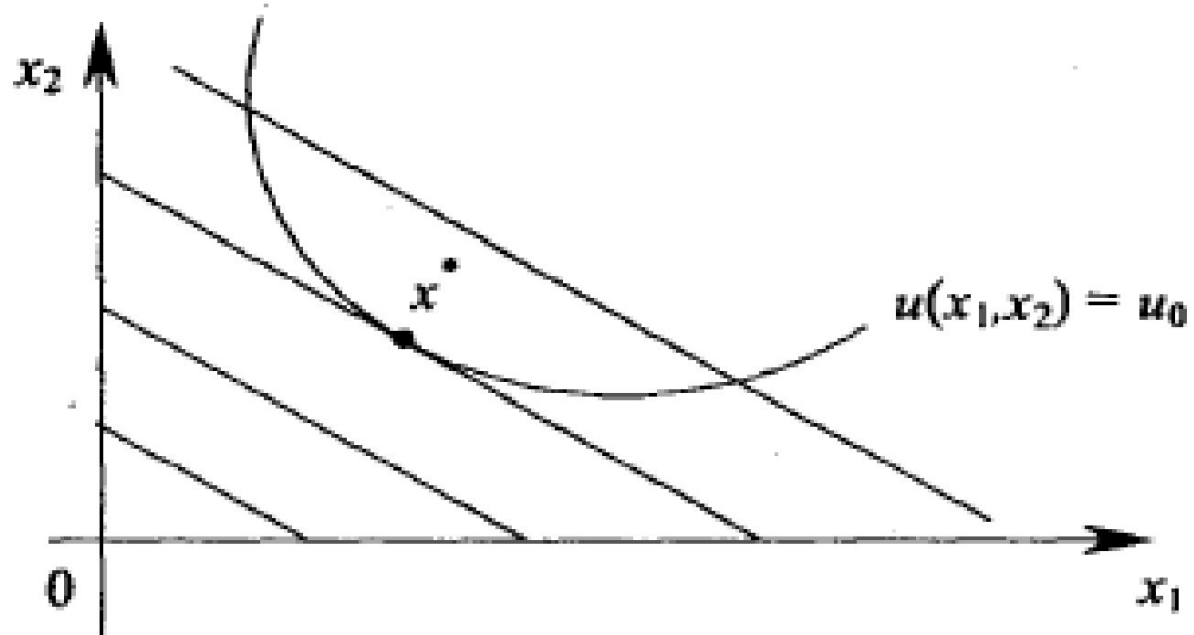
$$M = \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

Взаимная задача IV: найти минимум функции

$$M = \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

при условии

$$u(x_1, \dots, x_n) = u_0; \quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$



Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu) = \sum_{j=1}^n p_j x_j + \mu(u_0 - u(x_1, \dots, x_n))$$

Система уравнений, определяющая экстремум, следующая

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = p_j - \mu \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = u_0 - u(x_1, \dots, x_n); \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{1}{\mu} p_j, j = \overline{1, n}; u(x_1, \dots, x_n) = u_0 \quad (7)$$

Решая полученную систему (7), найдем оптимальный набор благ

$$x_j^* = x_j^*(\mathbf{p}, u_0), \quad j = 1, \dots, n$$

и множитель μ^* . Минимальные затраты

$$M^* = \sum_{j=1}^n p_j x_j^*$$

Полный дифференциал функции затрат

$$dM = \sum_{j=1}^n p_j dx_j$$

Так как в точке минимума x^* справедливы равенства

$$p_j = \mu^* \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

то получаем

$$dM = \sum_{j=1}^n \mu^* \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = \mu^* \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = \mu^* du$$

Таким образом, в оптимальной точке

$$\mu^* = \frac{dM^*}{du}$$

Ранее было показано, что

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial M} = \lambda^*$$

Взаимная задача IV примет вид: найти

$$\min \left(M = \sum_{j=1}^n p_j x_j \right)$$

при ограничениях

$$u = u^*; x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$
$$M = M^*$$

В этом случае оптимальные решения взаимной и исходной задач совпадут. Для $n = 2$ имеем одну и ту же точку касания бюджетной прямой и кривой безразличия:

$$\mu^* = \frac{1}{\lambda^*} \text{ и } M = M^*$$

