

Строение пылевых комплексов, связанных со спутниками планет

Орлов С.А.

Научно-исследовательский
астрономический институт
им. В. В. Соболева



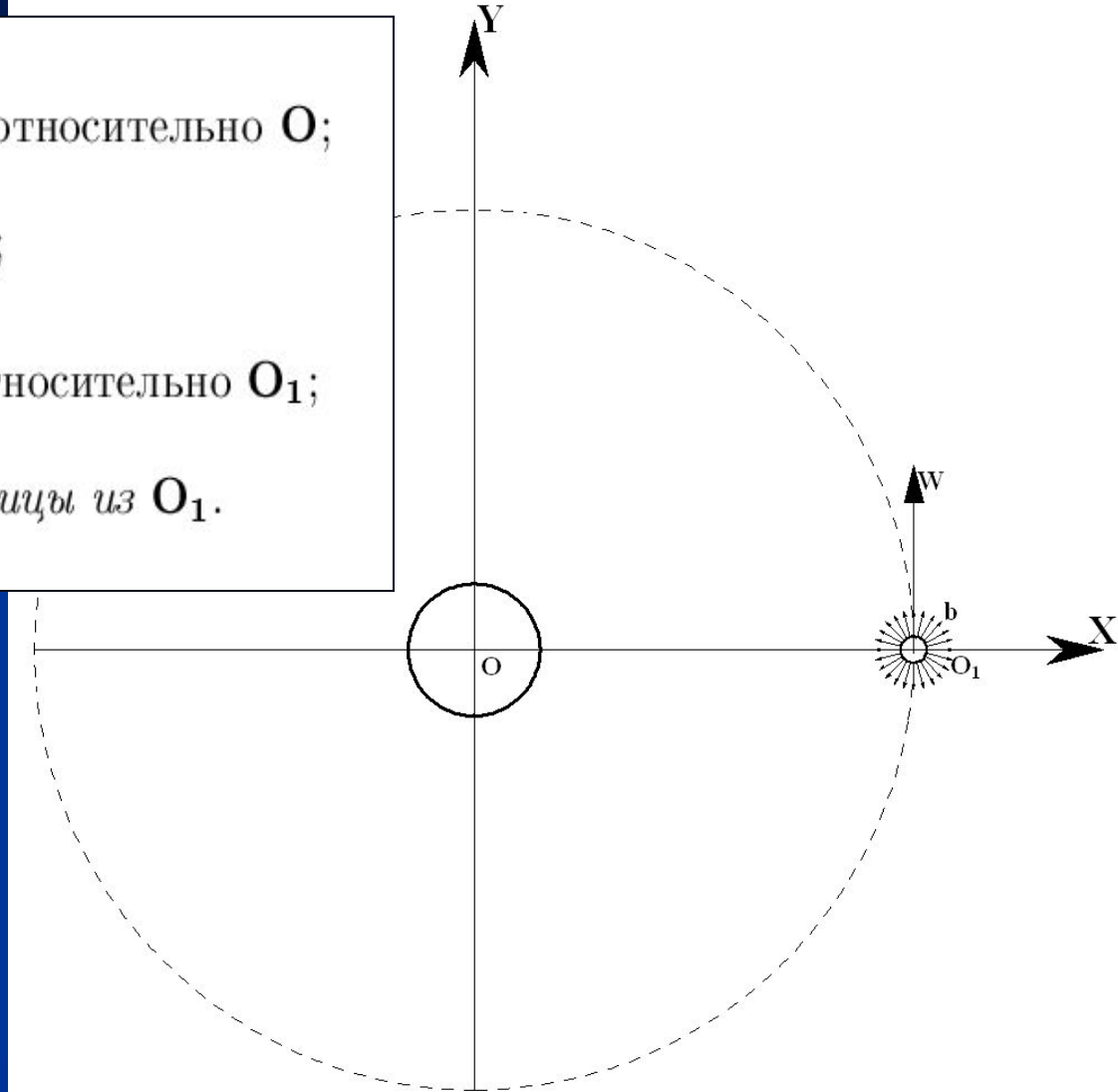
Модель выброса

R — радиус круговой орбиты O_1 относительно O ;

$w = \frac{v}{\sqrt{R}}$ — круговая скорость O_1 ;

b — скорость выброса частицы относительно O_1 ;

$c = \frac{b}{w}$ — параметр выброса частицы из O_1 .



Основные предположения и допущения

- ❑ Орбита спутника круговая кеплеровская
- ❑ Выброс частиц изотропен; их скорости одинаковы
- ❑ После выброса спутник не влияет на выброшенные частицы
- ❑ Рассматриваем только эллиптические орбиты частиц в прямом направлении движения (условие эллиптичности)

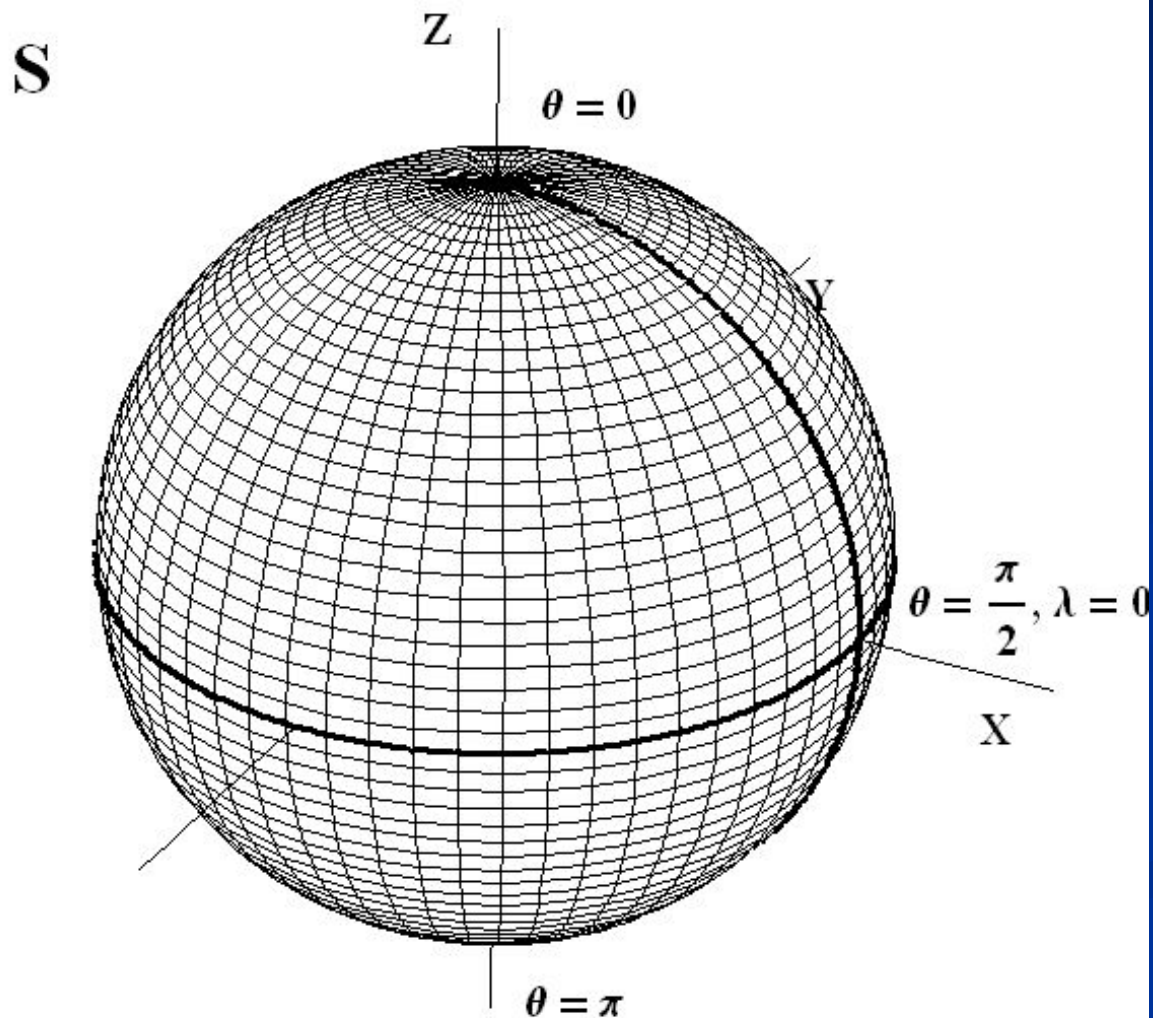
УСЛОВИЯ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ И ПРЯМОГО НАПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

$$b < w(\sqrt{2} - 1) = \frac{\varkappa}{\sqrt{R}}(\sqrt{2} - 1) \iff c < c_{max} = \sqrt{2} - 1.$$

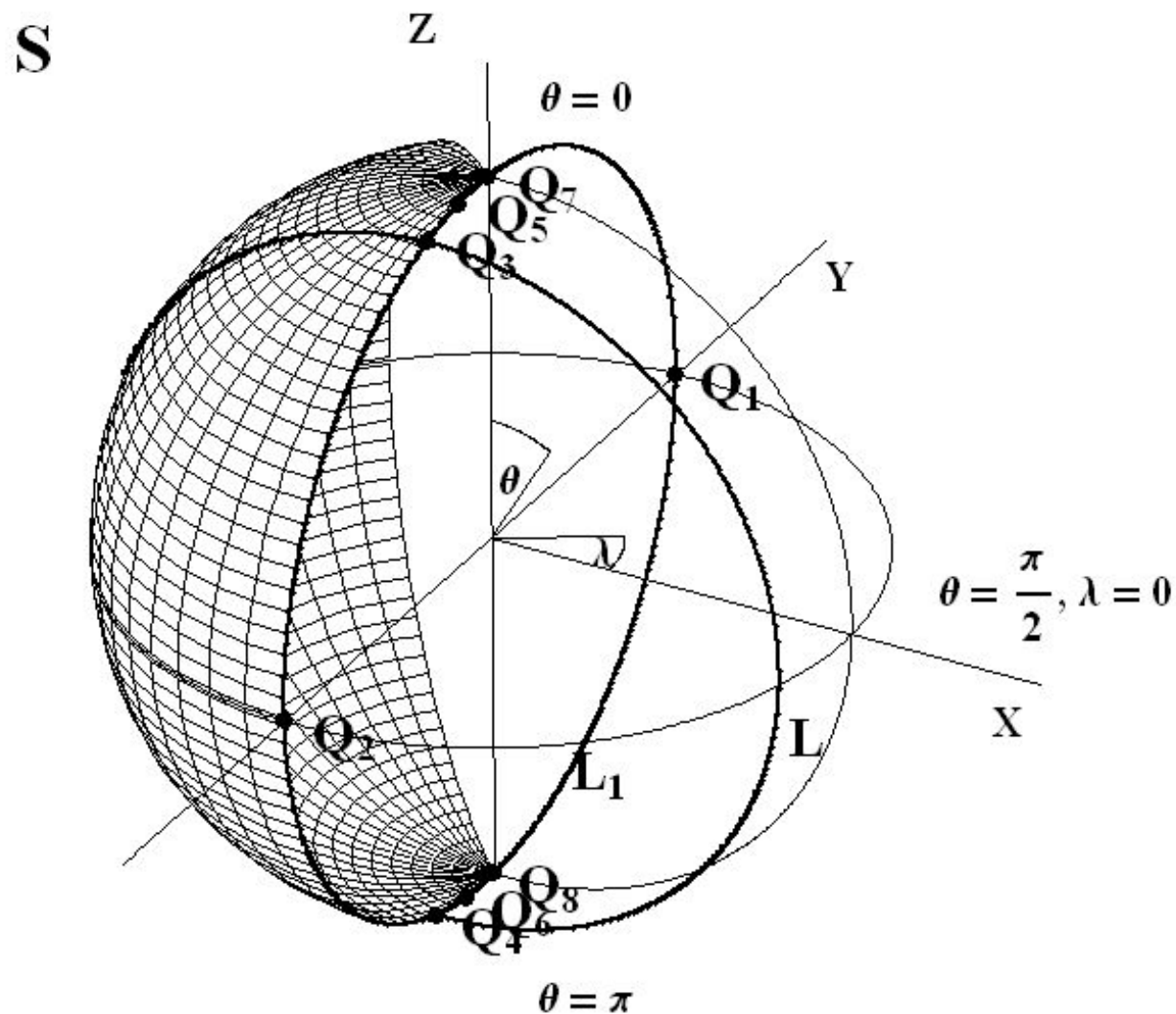
$$b < w \iff c < 1$$

$$c < c_{max} = \sqrt{2} - 1.$$

Сфера параметров



Сфера параметров



Начальные условия

Связь сферических и декартовых координат (\mathcal{O})

$$x = \sin \theta \cos \lambda, \quad y = \sin \theta \sin \lambda, \quad z = \cos \theta.$$

Координаты вектора скорости b относительно \mathbf{O}_1

$$V_x = b \sin \theta \cos \lambda, \quad V_y = b \sin \theta \sin \lambda, \quad V_z = b \cos \theta.$$

$$\mathbf{r}_0 = (R, 0, 0), \quad \mathbf{v}_0 = (b \sin \theta \cos \lambda, w + b \sin \theta \sin \lambda, b \cos \theta)$$

Элементы орбиты частицы

$$A = \sqrt{(1 + c \sin \theta \sin \lambda)^2 + c^2 \cos^2 \theta}, \quad 1 - c \leq A \leq 1 + c$$

$$p = A^2$$

$$a = \frac{1}{1 - 2c \sin \theta \sin \lambda - c^2}, \quad \frac{1}{1 + 2c - c^2} \leq a \leq \frac{1}{1 - 2c - c^2}$$

$$e^2 = (A^2 - 1)^2 + A^2 c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda, \quad 0 \leq e \leq c(2 + c)$$

$$\cos i = \frac{1 + c \sin \theta \sin \lambda}{A}, \quad \sin i = \frac{c \cos \theta}{A}, \quad -\pi/2 \leq i \leq \pi/2$$

$$\Omega = 0 \iff u_0 = 0$$

$$e \cos \varphi = A^2 - 1, \quad e \sin \varphi = A c \sin \theta \cos \lambda$$

$$g = -\varphi$$

**5-параметрическое семейство орбит
становится 2-параметрическим**

Семейство орбит

$$\mathbf{r} = r(\cos u, \cos i \sin u, \sin i \sin u),$$

$$r = \frac{A^2}{1 + \alpha \cos u + \beta \sin u},$$

$$\alpha = A^2 - 1, \quad \beta = -Ac \sin \theta \cos \lambda.$$

Для орбит экстремального наклона

$$\mathbf{r} = \frac{1 - c^2}{1 - c^2 \cos u} \left(\cos u, \sqrt{1 - c^2} \sin u, \pm c \sin u \right).$$

Основная идея

Искать границу
семейства траекторий частиц
применив
теорию огибающих

Невозмущенные орбиты; ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda \in [0, 2\pi)$$

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \quad r = \frac{A^2}{1 + \alpha \cos u + \beta \sin u}.$$

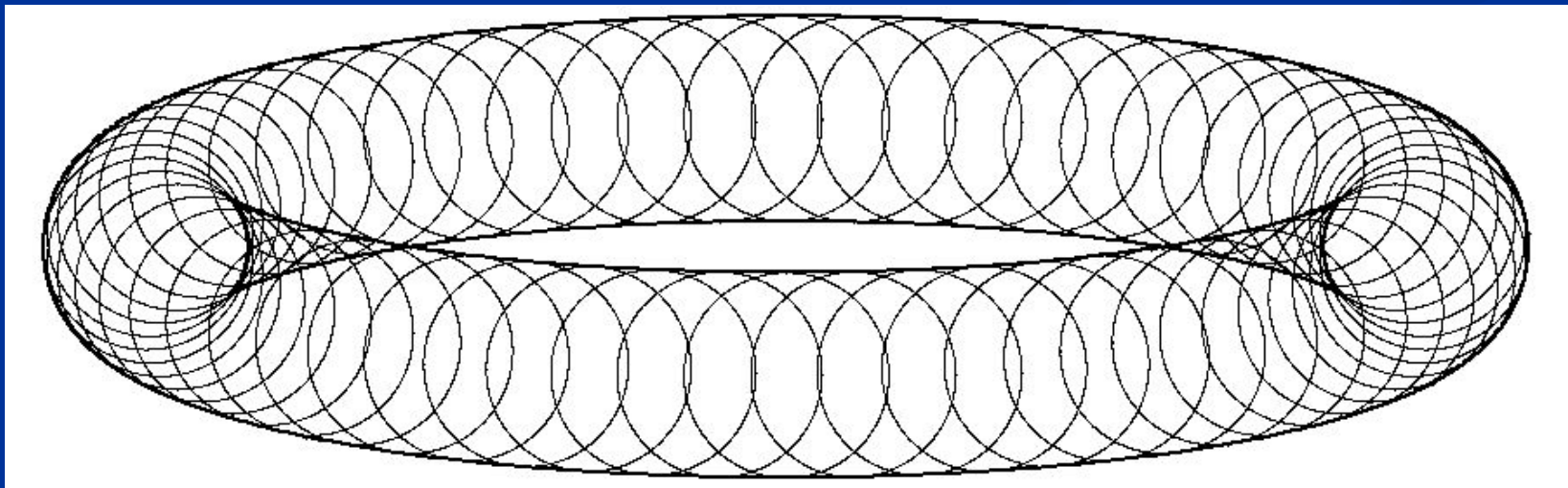
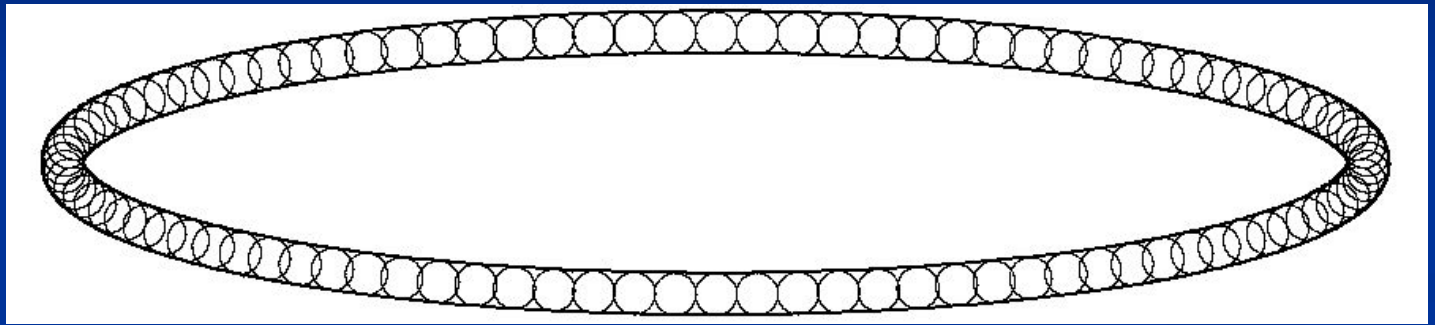
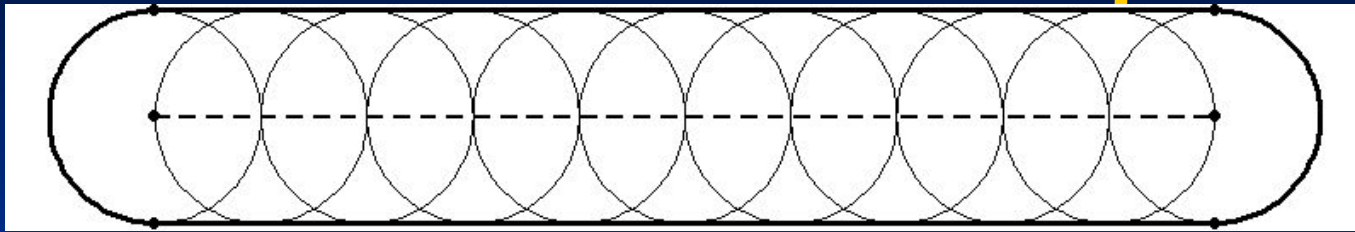
Здесь

$$A = 1 + c \sin \lambda,$$

$$\alpha = A^2 - 1 = c(2 + c \sin \lambda) \sin \lambda,$$

$$\beta = -A c \cos \lambda = -c(1 + c \sin \lambda) \cos \lambda.$$

Огибающая = Граница ?



Невозмущенные орбиты; ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

[Залгаллер В.А. "Теория огибающих"]

$$\lambda \in [0, 2\pi),$$

$$x = r \cos u; \quad y = r \sin u; \quad r(u, \lambda) = \frac{A^2}{1 + \alpha \cos u + \beta \sin u}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = \frac{-AcF(u, \lambda)}{(1 + \alpha \cos u + \beta \sin u)^2} = 0$$

$$F(u, \lambda) = 2 \sin \frac{u}{2} \left[A(c + \sin \lambda) \cos \frac{u}{2} - 2 \cos \lambda \sin \frac{u}{2} \right] = 0.$$

$$\cos u = \frac{4 \cos^2 \lambda - A^2(c + \sin \lambda)^2}{4 \cos^2 \lambda + A^2(c + \sin \lambda)^2}, \quad \sin u = \frac{4A(c + \sin \lambda) \cos \lambda}{4 \cos^2 \lambda + A^2(c + \sin \lambda)^2}.$$

Невозмущенные орбиты; ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

Параметрические уравнения огибающей:

$$u = 2\lambda + F_1(\lambda), \quad r = F_2(\lambda).$$

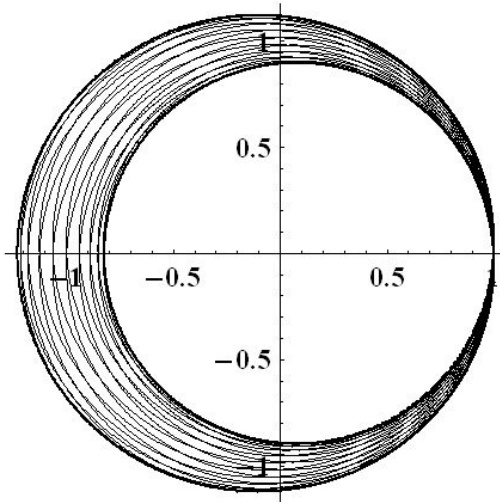
$$F_1(\lambda) = 2 \operatorname{arctg} \frac{h(s) \cos \lambda}{2 + sh(s)},$$

$$F_2(\lambda) = \frac{(A^2 - 4)s^2 + 2A^2cs + (A^2c^2 + 4)}{4cs^3 + (-A^2 + 4c^2 - 2)s^2 - 2A^2cs - (A^2c^2 + 2c^2 - 4)},$$

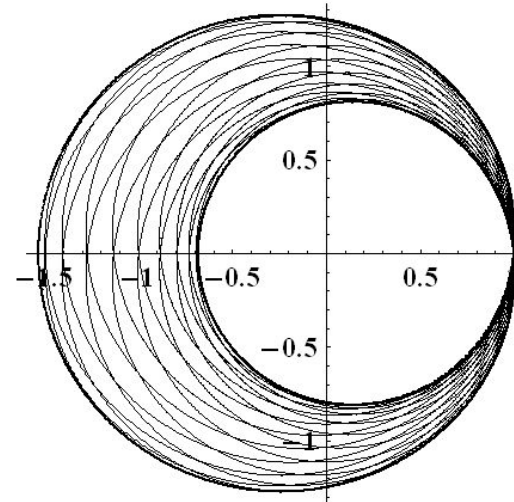
$$h(s) = cs^2 - (1 - c^2)s + c, \quad s = \sin \lambda.$$

Невозмущенные орбиты; ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

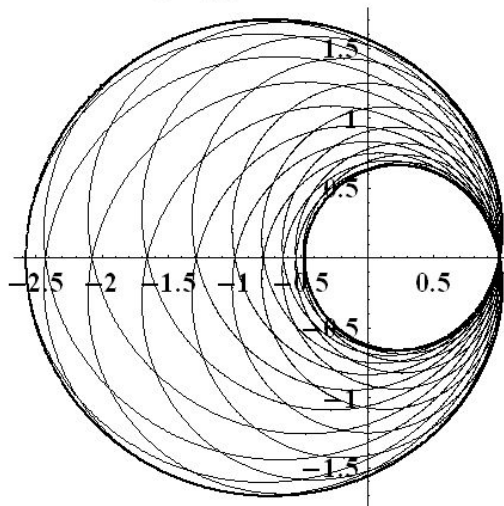
$c = 0.05$



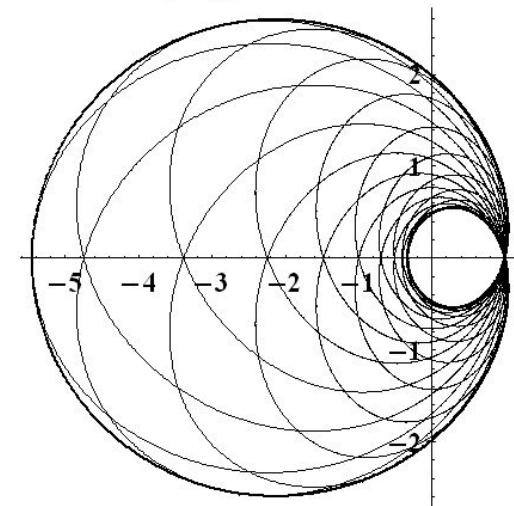
$c = 0.1$



$c = 0.2$



$c = 0.3$



Спутники и МКС

Пусть

$$R_c = 7200 \text{ км.} \quad R_{\text{МКС}} = 6760 \text{ км.}$$

$$\frac{R_{\text{МКС}}}{R_c} = 0.9389$$

$$r_{\min} = \frac{(1 - c)^2}{1 + 2c - c^2} = 0.9389 \quad \Rightarrow \quad c = 0.0158$$

Принимая $V_c = 7000 \text{ м/с}$ получим

критическую скорость выброса осколка $V_{\text{кр}} = 110 \text{ м/с}$

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

$$\mathbf{r}(u, \theta, \lambda) = r(\cos u, \cos i \sin u, \sin i \sin u),$$

$$r = \frac{A^2}{1 + \alpha \cos u + \beta \sin u},$$

$$\alpha = A^2 - 1, \quad \beta = -Ac \sin \theta \cos \lambda$$

$$\Phi(u, \theta, \lambda) = (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) = 0.$$

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

$$\Phi = \begin{vmatrix} r_1 \cos u - r \sin u & r_1 \cos i \sin u + r \cos i \cos u & r_1 \sin i \sin u + r \sin i \cos u \\ r_2 \cos u & r_2 \cos i \sin u - r i_2 \sin i \sin u & r_2 \sin i \sin u + r i_2 \cos i \sin u \\ r_3 \cos u & r_3 \cos i \sin u - r i_3 \sin i \sin u & r_3 \sin i \sin u + r i_3 \cos i \sin u \end{vmatrix}.$$

$$\Phi = r^2 \sin u (i_2 r_3 - i_3 r_2).$$

ИЛИ

$$\Phi(u, \theta, \lambda) = \frac{2c^2 r^4}{A^2} \sin \theta \sin u \sin \frac{u}{2} \Phi_3(u, \theta, \lambda),$$

где

$$\Phi_3(u, \theta, \lambda) = A(\sin \theta \sin \lambda + c) \cos \frac{u}{2} - 2 \sin \theta \cos \lambda \sin \frac{u}{2}.$$

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{A(\sin \theta \sin \lambda + c)}{2 \sin \theta \cos \lambda},$$

$$\cos u = \frac{4 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda - A^2(\sin \theta \sin \lambda + c)^2}{4 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda + A^2(\sin \theta \sin \lambda + c)^2},$$

$$\sin u = \frac{4A \sin \theta \cos \lambda (\sin \theta \sin \lambda + c)}{4 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda + A^2(\sin \theta \sin \lambda + c)^2}.$$

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

Параметрические уравнения огибающей:

$$x = \frac{h_1}{h}, \quad y = \frac{h_2}{h}, \quad z = \frac{h_3}{h},$$

где

$$h_1 = 4 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda - A^2 B^2,$$

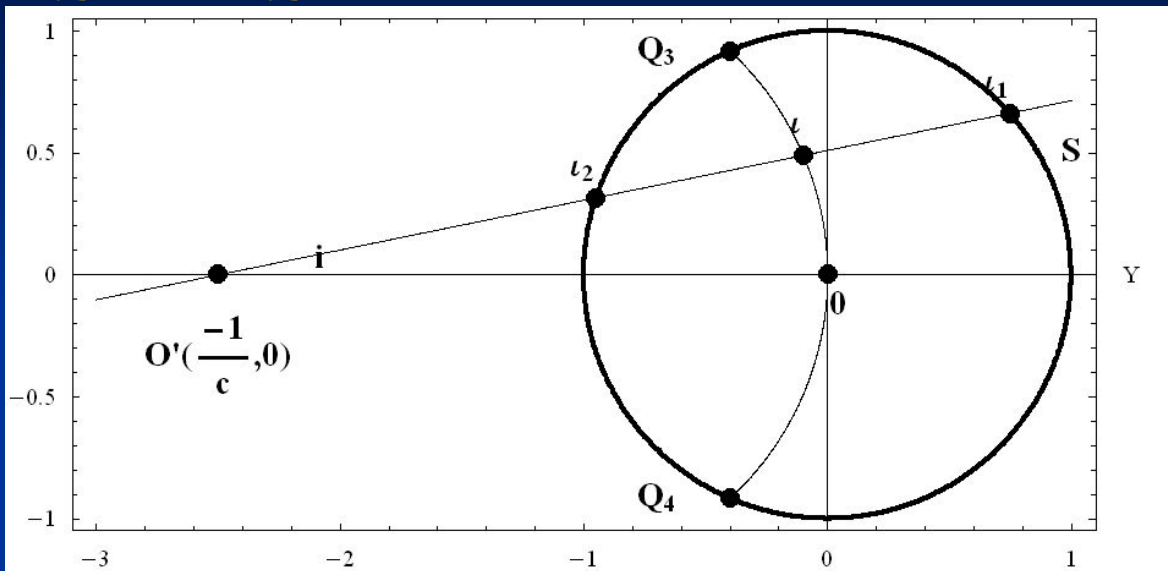
$$h_2 = 4B \sin \theta \cos \lambda (1 + c \sin \theta \sin \lambda),$$

$$h_3 = 4Bc \sin \theta \cos \theta \cos \lambda,$$

$$h = (2 - A^2) B^2 + 4(1 - cB) \sin^2 \theta \cos^2 \lambda,$$

$$A = \sqrt{(1 + c \sin \theta \sin \lambda)^2 + c^2 \cos^2 \theta}, \quad B = \sin \theta \sin \lambda + c.$$

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

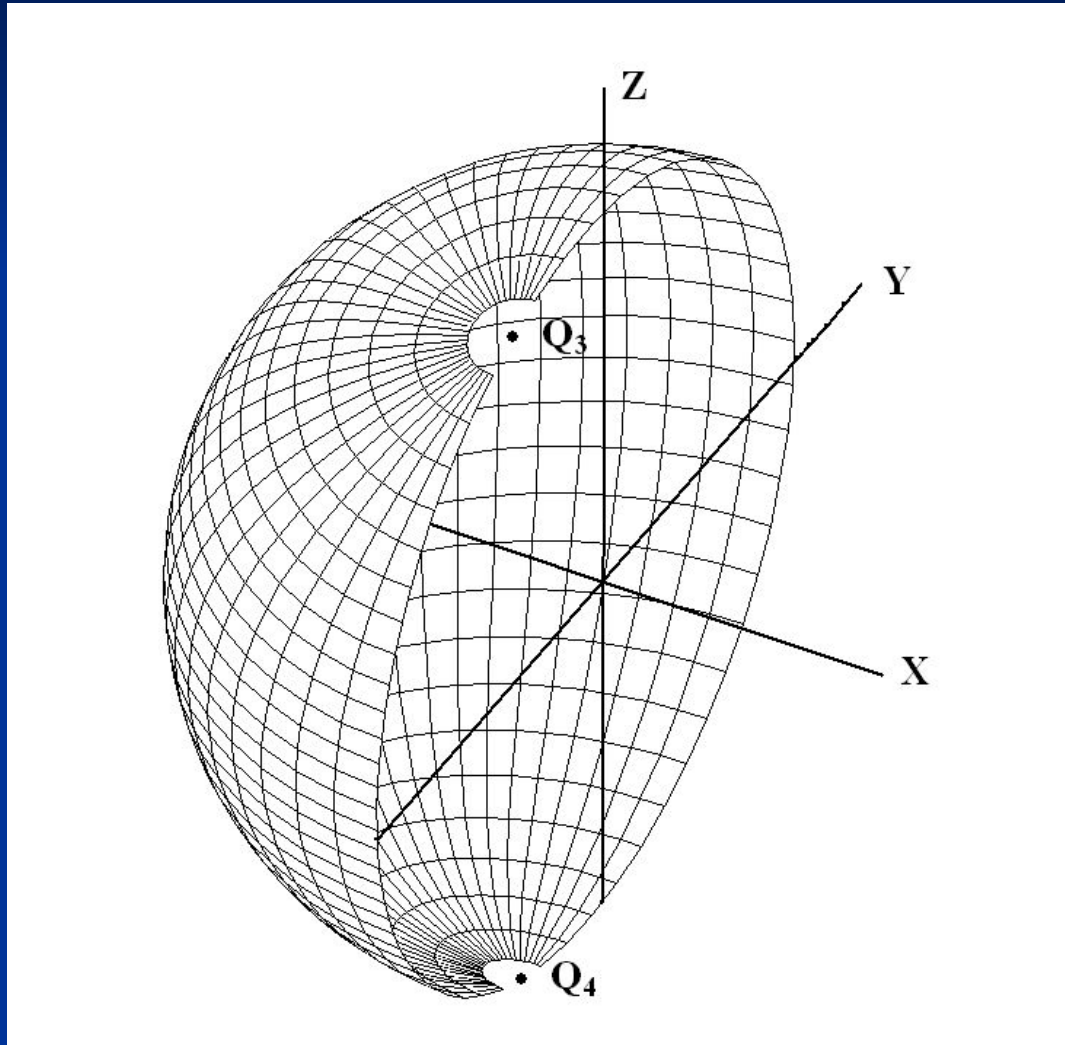


$$f_x = \frac{\cos \lambda (c + \sin \theta)}{\sqrt{1 + c^2 + 2c \sin \theta}},$$

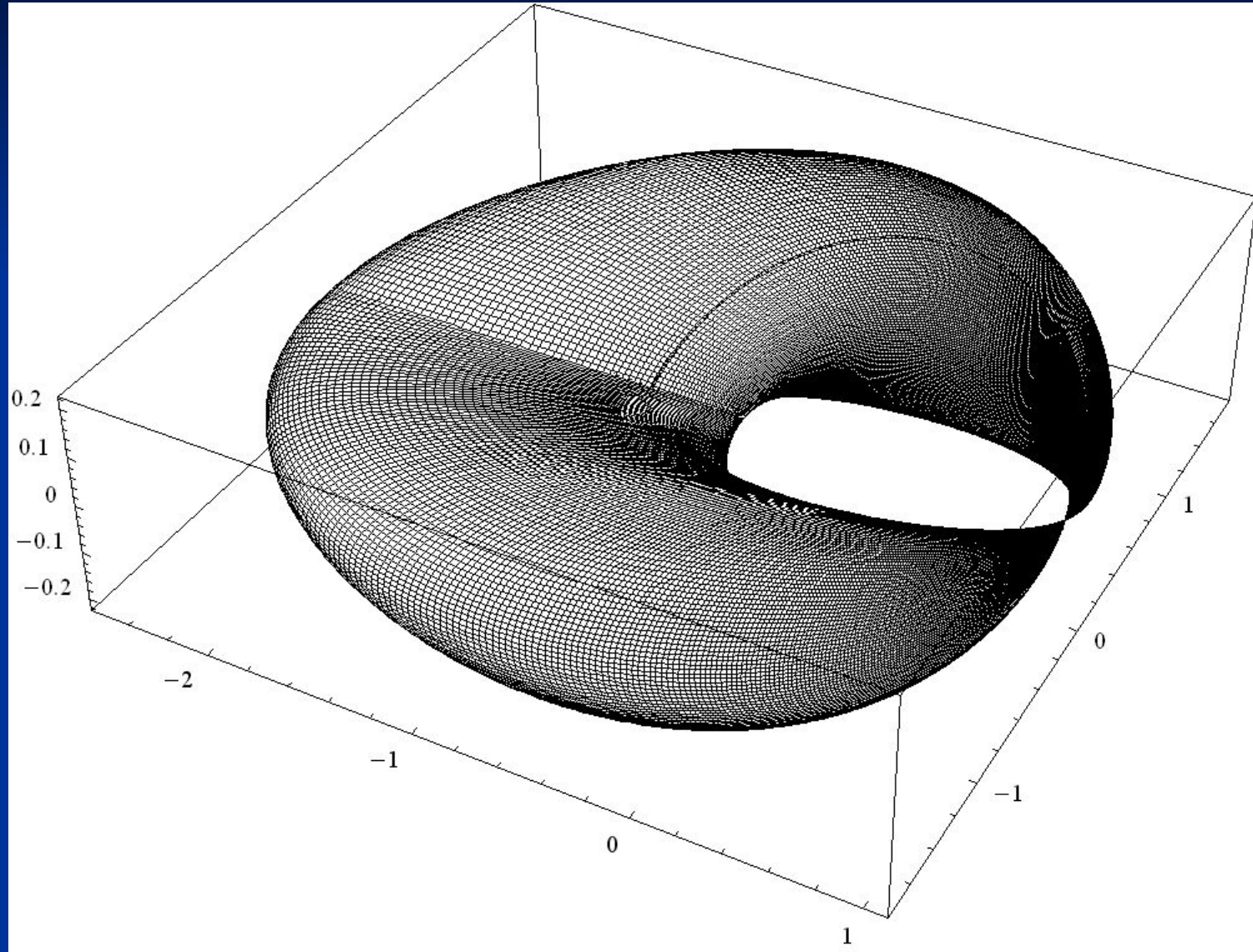
$$f_y = \frac{\sin \lambda (c + \sin \theta) (1 + c \sin \theta) - c \cos^2 \theta}{1 + c^2 + 2c \sin \theta},$$

$$f_z = \frac{\cos \theta \left[1 + c \sin \theta + c \sin \lambda (c + \sin \theta) \right]}{1 + c^2 + 2c \sin \theta}.$$

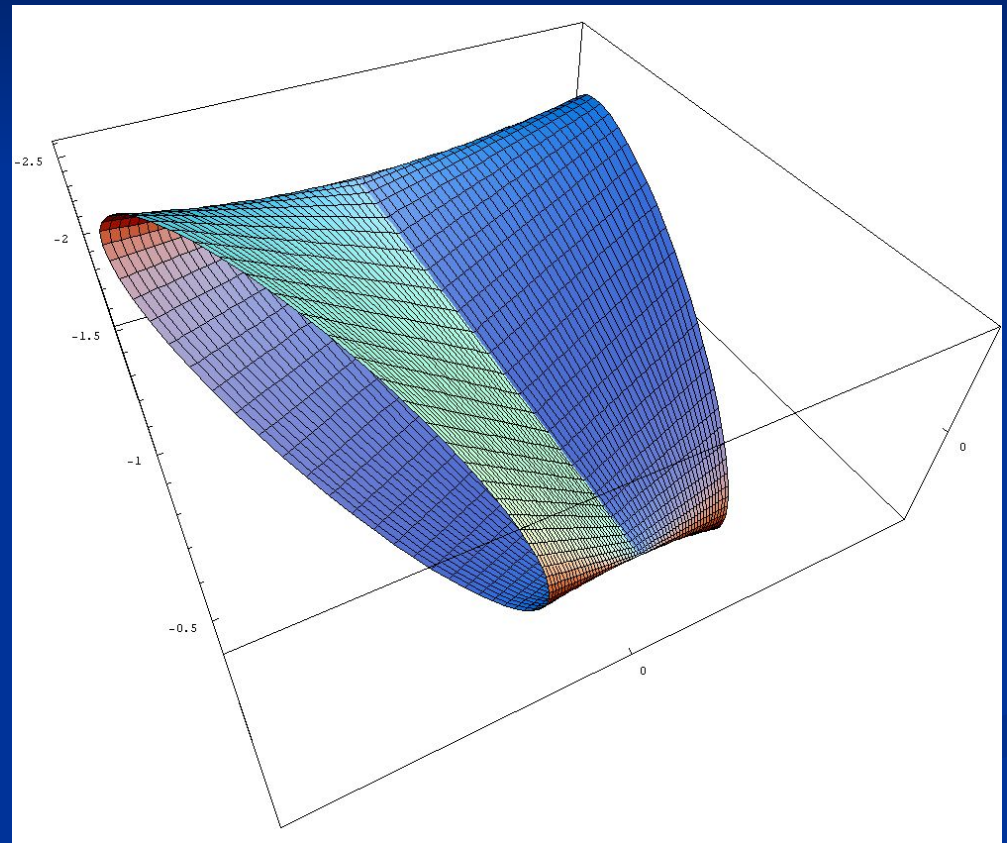
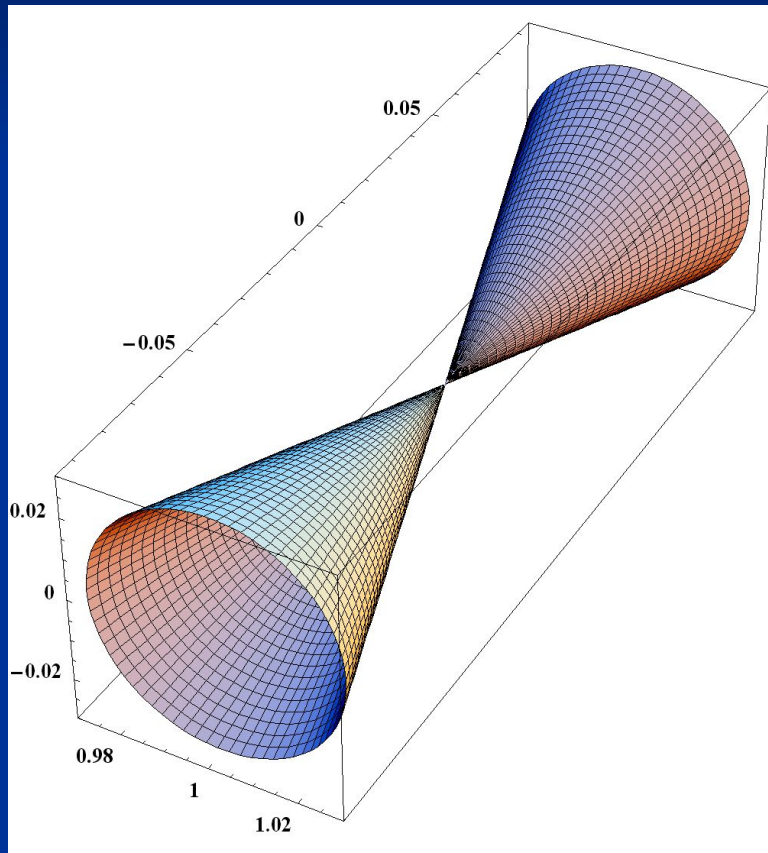
Невозмущенные орбиты; пространственный случай



Невозмущенные орбиты; пространственный случай



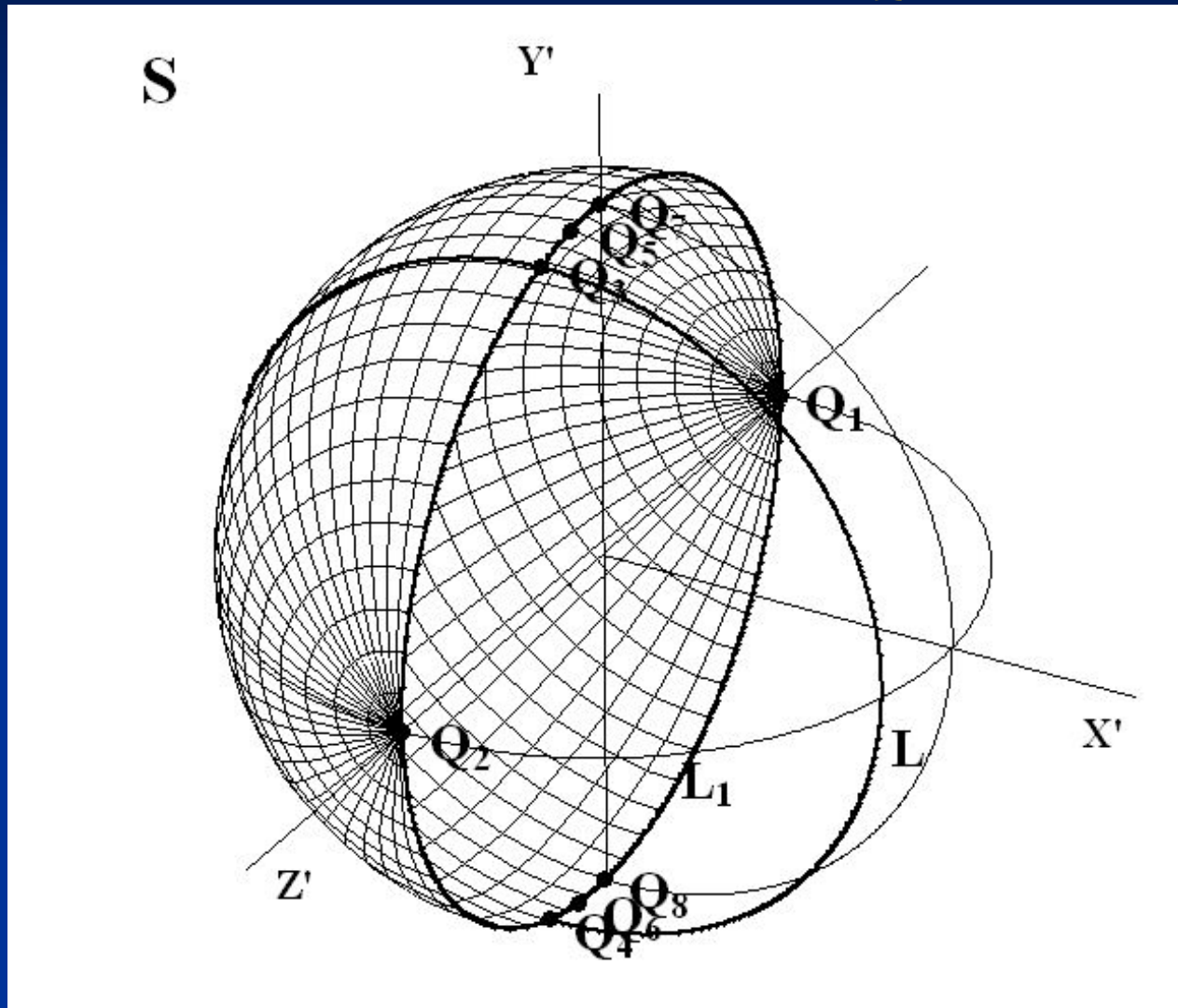
пространственный случай; коническая точка и перетяжка



Г. О. Рябова, 2008 г.



Динамика облака частиц на начальном этапе разлета



Динамика облака частиц на начальном этапе разлета

$$\begin{aligned}a_1 &= R(1 - 2c - c^2)^{-1}, & a_2 &= R(1 + 2c - c^2)^{-1}, \\n_1 &= n_0(1 - 2c - c^2)^{3/2}, & n_2 &= n_0(1 + 2c - c^2)^{3/2}, \\T_1 &= T_0(1 - 2c - c^2)^{-3/2}, & T_2 &= T_0(1 + 2c - c^2)^{-3/2}.\end{aligned}$$

Здесь

$$n_0 = \varkappa R^{-3/2}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{n_0} = \frac{2\pi}{\varkappa} R^{3/2}$$

Эти формулы позволяют описать динамику частиц на начальном этапе разлета.

$$(n_2 - n_1)T_c = 2\pi; \quad T_c = \frac{\sqrt{1 + 2c - c^2} + \sqrt{1 - 2c - c^2}}{4c(2 - 2c^2 + \sqrt{1 - 6c^2 + c^4})} T_0.$$

$$T_c = T_0 \left(\frac{1}{6c} + \frac{c}{9} + \frac{17c^3}{108} + \dots \right).$$

Период замыкания облака в случае Фобоса и Деймоса

$$\kappa^2 = 4.2828 \times 10^{13} \text{ м}^3/\text{с}^2, \quad R = 9377.2 \text{ км (Фобос)}, \quad R = 23459 \text{ км (Деймос)}.$$

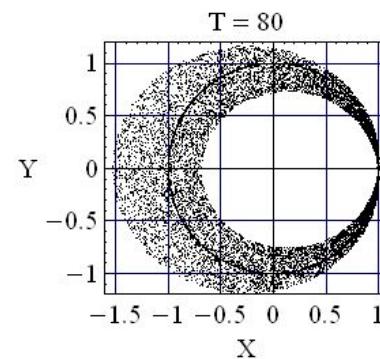
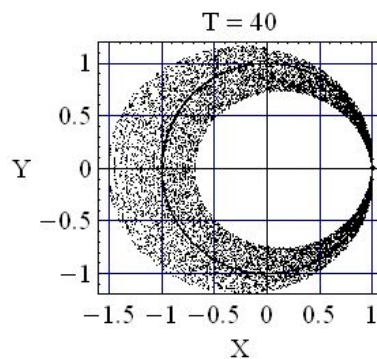
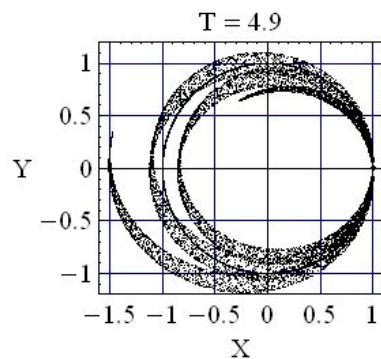
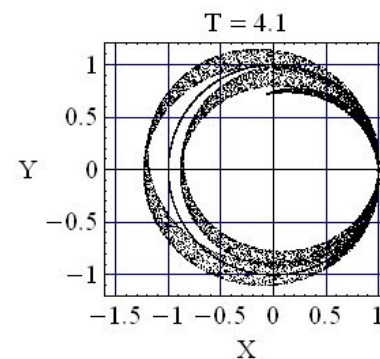
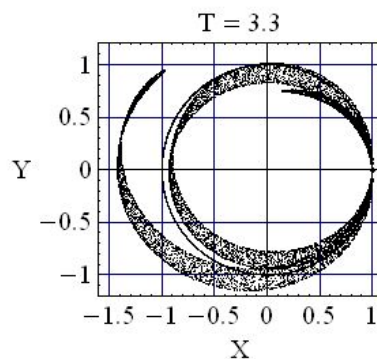
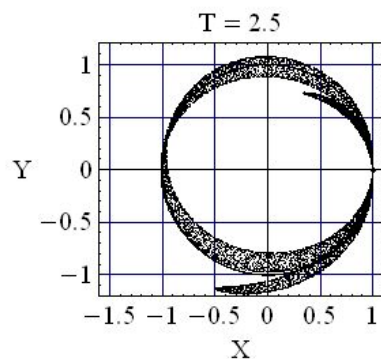
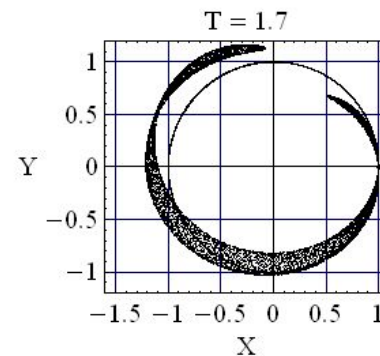
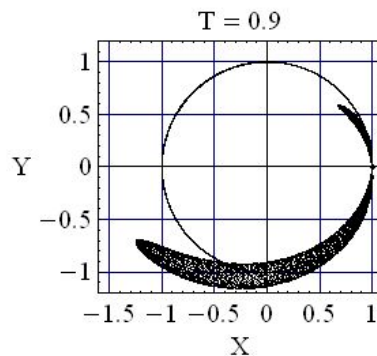
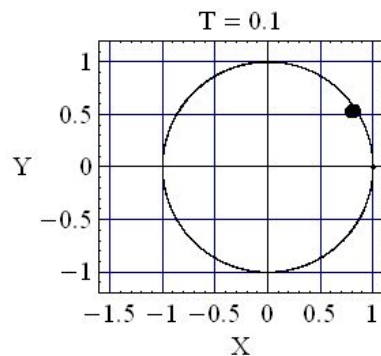
b	1	10	50	100	500	885.183
c	4.679×10^{-4}	4.679×10^{-3}	2.339×10^{-2}	4.679×10^{-2}	2.339×10^{-1}	c_{max}
T_c	112.1	11.21	2.243	1.122	0.233	0.145

Табл. 2 Приведены значения c и T_c (в сутках) в зависимости от b (в м/с) для Фобоса

b	1	10	50	100	500	559.672
c	7.401×10^{-4}	7.401×10^{-3}	3.700×10^{-2}	7.401×10^{-2}	3.700×10^{-1}	c_{max}
T_c	280.4	28.04	5.614	2.815	0.622	0.572

Табл. 3 Приведены значения c и T_c (в сутках) в зависимости от b (в м/с) для Деймоса

Динамика облака частиц



Средние движения

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= \kappa a^{-3/2}, \\ \frac{n_M}{\tilde{n}} &= 1 + \frac{3J_2 R_0^2 (2 - 3 \sin^2 i)}{4a^2 (1 - e^2)^{3/2}}, \\ \frac{n_\Omega}{\tilde{n}} &= -\frac{3J_2 R_0^2 \cos i}{2a^2 (1 - e^2)^2}, \\ \frac{n_g}{\tilde{n}} &= \frac{3J_2 R_0^2 (4 - 5 \sin^2 i)}{4a^2 (1 - e^2)^2}.\end{aligned}$$

Для оценки периода применимости развитой выше теории достаточно считать a, e, i равными соответствующим элементам орбиты спутника \mathbf{O}_1 . В частности, $a = R, e = 0$:

$$\begin{aligned}n_\Omega &= -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{7/2} n^0 \cos i, \\ n_g &= \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{7/2} n^0 (4 - 5 \sin^2 i),\end{aligned}$$

Период применимости теории невозмущенных орбит

$$\Delta T = \min \left\{ \frac{\pi}{6|n_{\Omega}|}, \frac{\pi}{6|n_g|} \right\}.$$

$$\kappa^2 = 4.2828 \times 10^{13} \text{ м}^3/\text{с}^2, \quad R_0 = 3394.0 \text{ км}, \quad J_2 = 8.7460 \times 10^{-4};$$

$$R = 9377.2 \text{ км (Фобос)}, \quad R = 23459 \text{ км (Деймос)}.$$

В результате

$$n_{\Omega} = -1.2386 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{сут}}, \quad n_g = 2.4772 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{сут}} \quad (\text{Фобос}),$$

$$n_{\Omega} = -5.0016 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{сут}}, \quad n_g = 1.0003 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{сут}} \quad (\text{Деймос}).$$

Поэтому

$$\Delta T = 211.37 \text{ сут (Фобос)}, \quad \Delta T = 5234.3 \text{ сут (Деймос)}.$$

Частоты средних движений

$$n_M = \omega_1, \quad n_\Omega = \omega_2, \quad n_g = \omega_3,$$

Установлено, что частоты
линейно-независимы.

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; плоский случай

В плоском случае $\theta = \pi/2$, $i = 0$.

$$x = r \cos(u + \Omega),$$

$$y = r \sin(u + \Omega)$$

при

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - g)}.$$

Введем замену переменных: $g' = u - g$, $u' = u + \Omega$.

$$x = r \cos u; \quad y = r \sin u \quad \text{при} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos g}.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; плоский случай

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, g, \lambda)}.$$

Особым точкам соответствует ранг, равный 1 или 0. Выпишем матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -r \sin u & r_2 \cos u & r_3 \cos u \\ r \cos u & r_2 \sin u & r_3 \sin u \end{pmatrix}.$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

Здесь

$$a_{12} = -rr_2, \quad a_{13} = -rr_3, \quad a_{23} = 0.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; плоский случай

$$p_2 = 0, \quad p_3 = 2cA \cos \lambda, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = \frac{c^2 A}{e} \cos \lambda (c + 3 \sin \lambda), \quad r_2 = \frac{e}{p} r^2 \sin g,$$

$$r_3 = \frac{cA}{e(1 + e \cos g)^2} \left[f_1(g, \lambda) \cos \lambda + Acf(\lambda) \sin g \right],$$

где

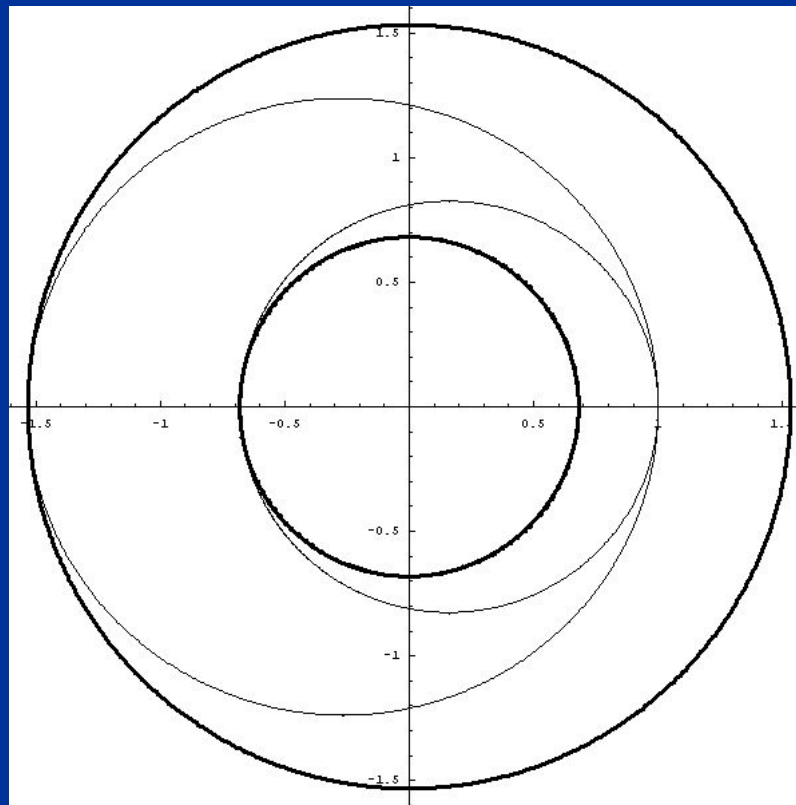
$$f(\lambda) = 1 + 2c \sin \lambda + (3 + c^2) \sin^2 \lambda + 2c \sin^3 \lambda,$$

$$f_1(g, \lambda) = 2e(1 + e \cos g) - cA^2(c + 3 \sin \lambda) \cos g.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

Особенности в плоскости xy лежат на окружностях

$$r = \frac{(1 + cm)^2}{1 + ck(2 + cm)}, \quad k = \pm 1, m = \pm 1.$$



Возмущенные орбиты; нулевой наклон; пространственный случай

Основное отображение.

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \cos i \sin u \sin \Omega),$$

$$y = r(\cos u \sin \Omega + \cos i \sin u \cos \Omega),$$

$$z = r \sin i \sin u$$

при

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - g)}.$$

$$g' = u - g, \quad \Omega' = \Omega + \Omega'',$$

где

$$\cos \Omega'' = \frac{\cos u}{\xi}, \quad \sin \Omega'' = \frac{\cos i \sin u}{\xi}, \quad \xi = \sqrt{\cos^2 u + \cos^2 i \sin^2 u} = \sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 u}.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; пространственный случай

$$x = r\xi \cos \Omega', \quad y = r\xi \sin \Omega', \quad z = r \sin i \sin u,$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos g'}.$$

Сечение (отображение Φ):

$$x = r\xi, \quad z = r \sin i \sin u$$

при

$$r = \frac{p}{1 + e \cos g}, \quad \xi = \sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u + \cos^2 i \sin^2 u}.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; пространственный случай

$$\mathcal{A} = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\theta, \lambda, u, g)}$$

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} r_1 \xi - i_1 r \xi^{-1} \sin i \cos i \sin^2 u & (r_1 \sin i + i_1 r \cos i) \sin u \\ r_2 \xi - i_2 r \xi^{-1} \sin i \cos i \sin^2 u & (r_2 \sin i + i_2 r \cos i) \sin u \\ -r \xi^{-1} \sin^2 i \cos u \sin u & r \sin i \cos u \\ r_4 \xi & r_4 \sin i \sin u \end{pmatrix} .$$

Вырождение \mathcal{A} равносильно обращению в нуль всех a_{mn} :

$$\begin{aligned} a_{12} &= \cos i \sin u (r_1 i_2 - r_2 i_1), & a_{13} &= \sin i \cos u r_1, \\ a_{14} &= -\cos i \sin u r_4 i_1, & a_{23} &= \sin i \cos u r_2, \\ a_{24} &= -\cos i \sin u r_4 i_2, & a_{34} &= -\sin i \cos u r_4. \end{aligned}$$

$$a_{mn} = 0$$

Список кривых

$$S_{2,3} : \quad x = \frac{\sqrt{1+c^2}}{1+c^2 \cos g}, \quad z = \pm \frac{c\sqrt{1+c^2}}{1+c^2 \cos g}$$

$$S_{4,5} : \quad x = \frac{(1-c^2)^{3/2}}{1+c^2 \cos g}, \quad z = \pm \frac{c(1-c^2)}{1+c^2 \cos g}$$

$$S_{6,7} : \quad x = \frac{\sqrt{1+2c \sin \theta + c^2}}{1+kc(c+2 \sin \theta)}(1+c \sin \theta), \quad z = \frac{\sqrt{1+2c \sin \theta + c^2}}{1+kc(c+2 \sin \theta)}c \cos \theta$$

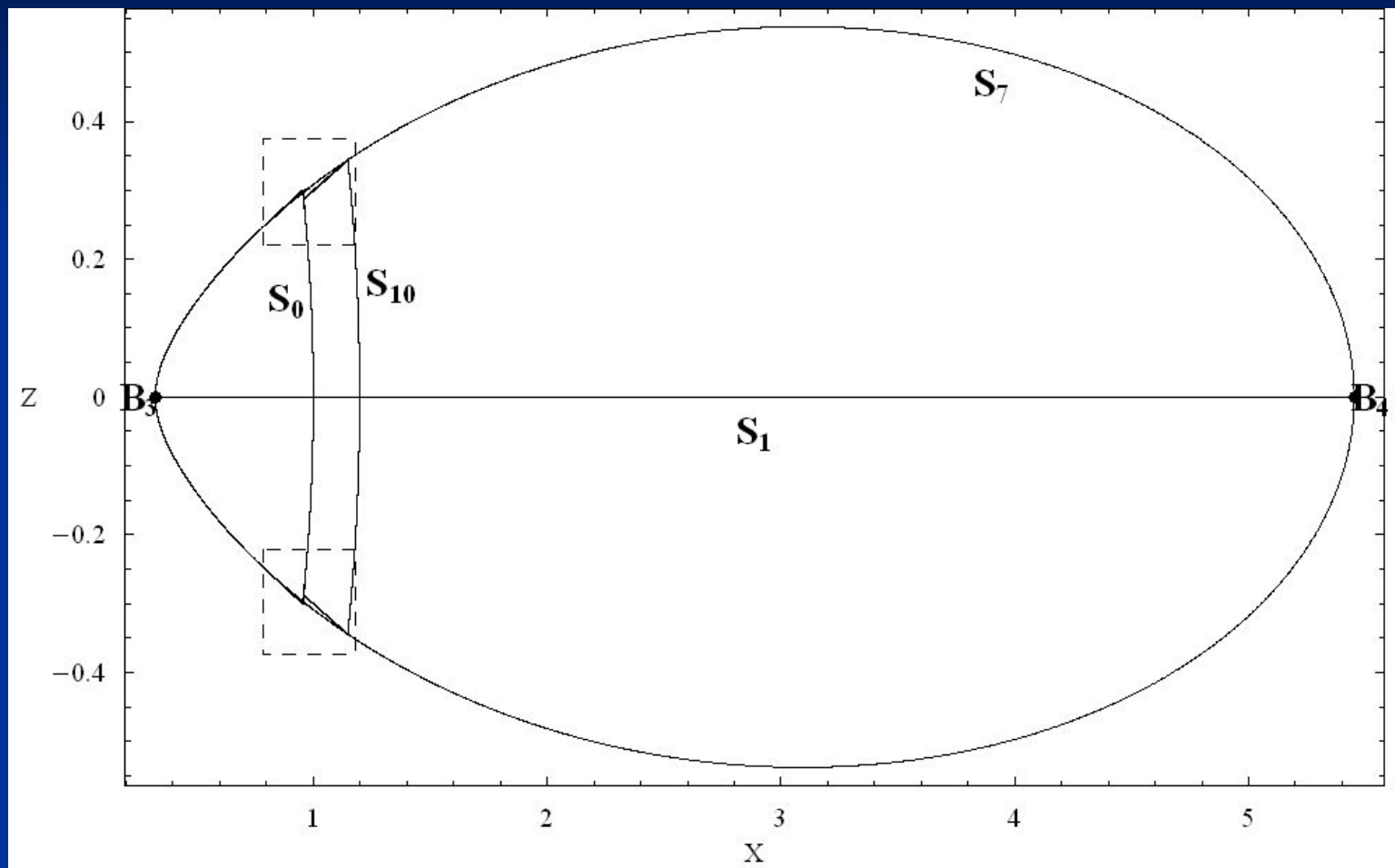
$$S_8 : \quad x = \sqrt{1+cs}, \quad z = \pm \frac{c\sqrt{h_6}}{2-cs-c^2}$$

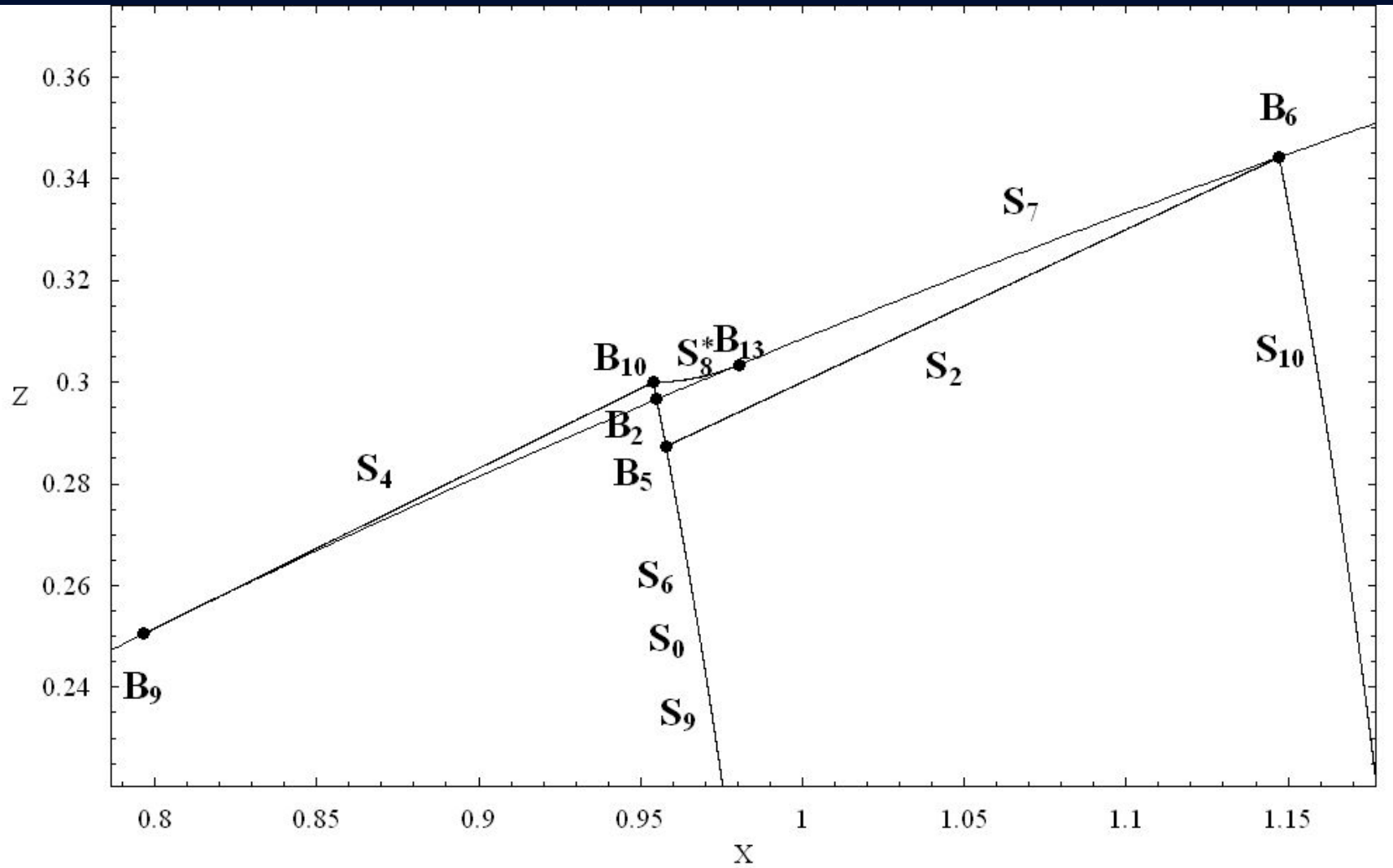
$$S_{9,10} : \quad x = \frac{\sqrt{1+c^2}}{1+kc^2} \sqrt{1+c^2 \cos^2 u}, \quad z = \frac{\sqrt{1+c^2}}{1+kc^2} k_1 c \sin u.$$

где

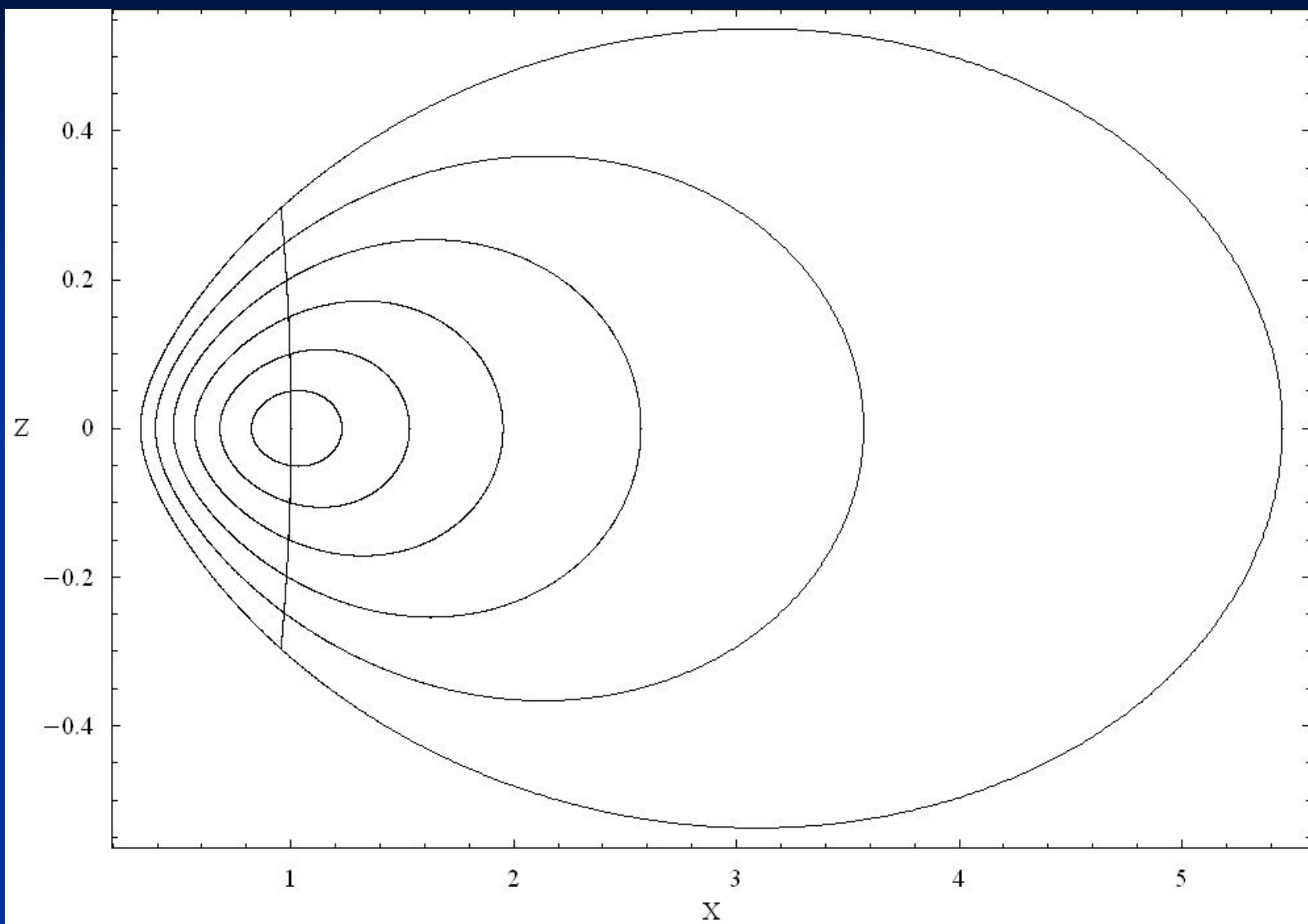
$$h_6 = (4+3s^2) + cs(2-s^2) - c^2(1+2s^2) - c^3s, \quad s = \sin \theta$$

Общий вид кривых

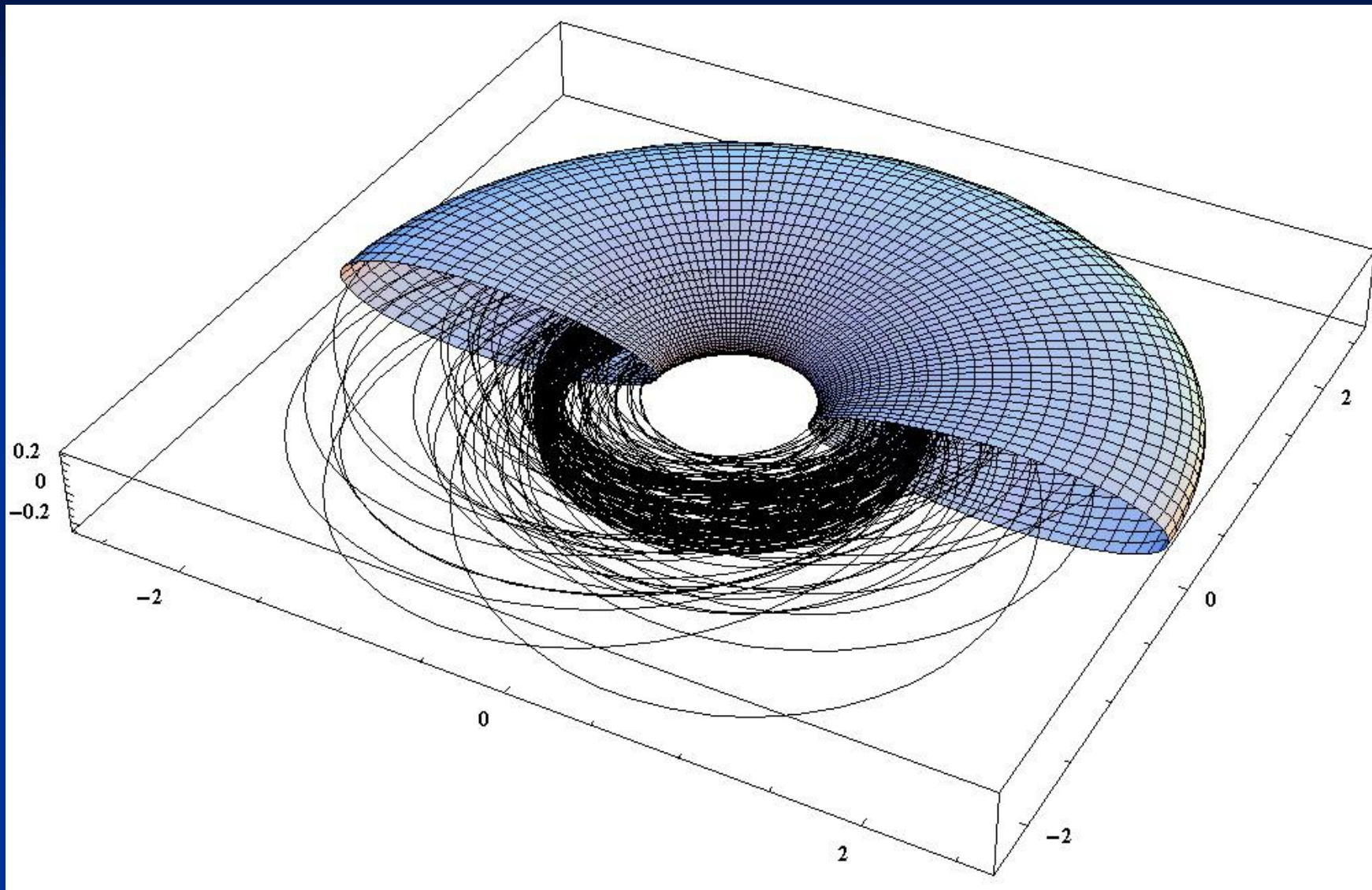




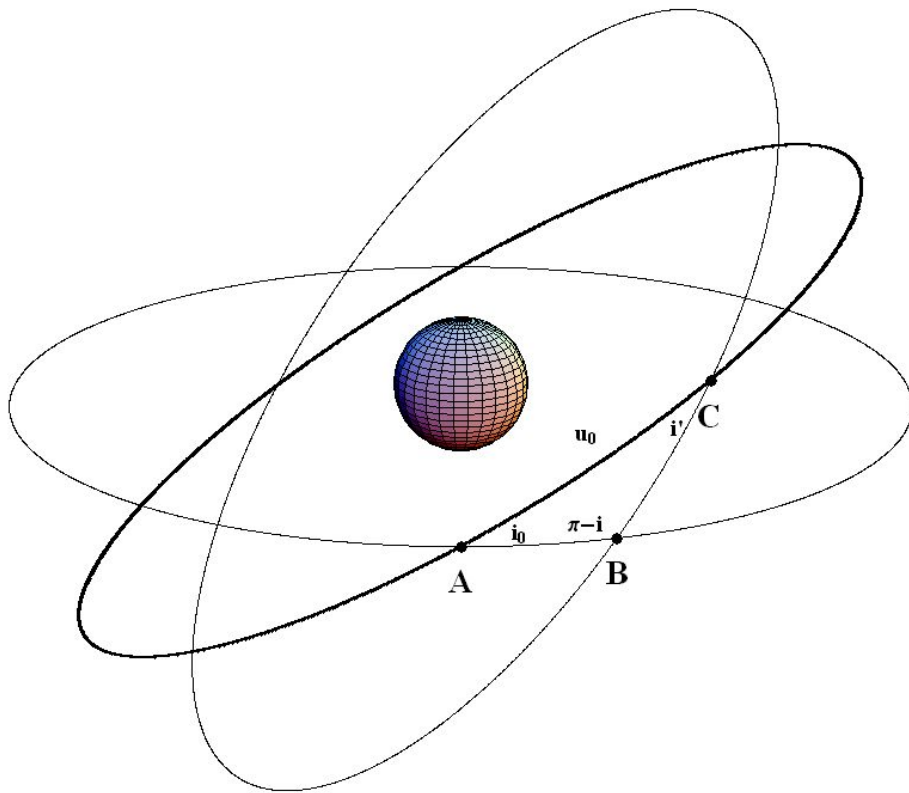
Свойство вложенности



Огибающая в пространстве



Возмущенные орбиты; произвольный наклон;



$$p = A^2 = (1 + c \sin \theta \sin \lambda)^2 + c^2 \cos^2 \theta,$$

$$a = \frac{1}{1 - 2c \sin \theta \sin \lambda - c^2},$$

$$e^2 = (A^2 - 1)^2 + A^2 c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \lambda,$$

$$\cos i' = \frac{1 + c \sin \theta \sin \lambda}{A}, \quad \sin i' = \frac{c \cos \theta}{A}.$$

$$\cos i = \cos i_0 \cos i' - \sin i_0 \sin i' \cos u_0.$$

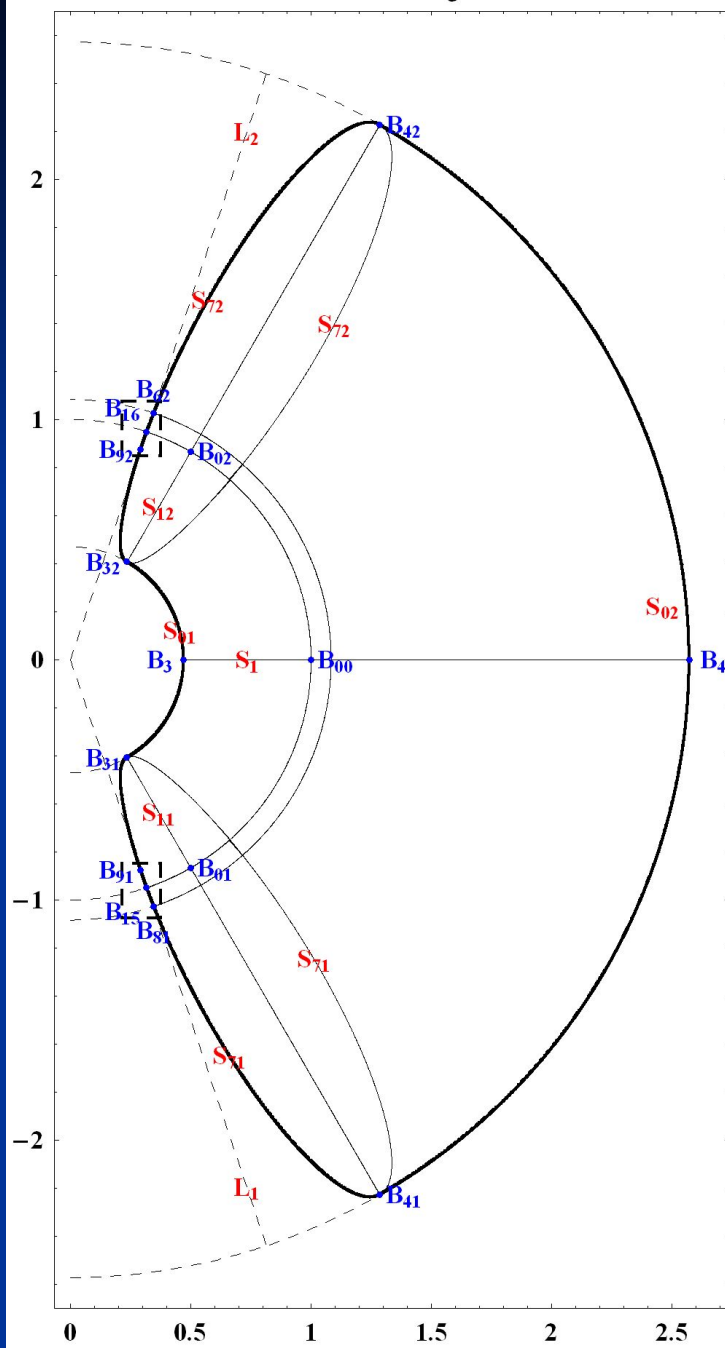
$$i = i_0 + i' \sin d,$$

Возмущенные орбиты; произвольный наклон;

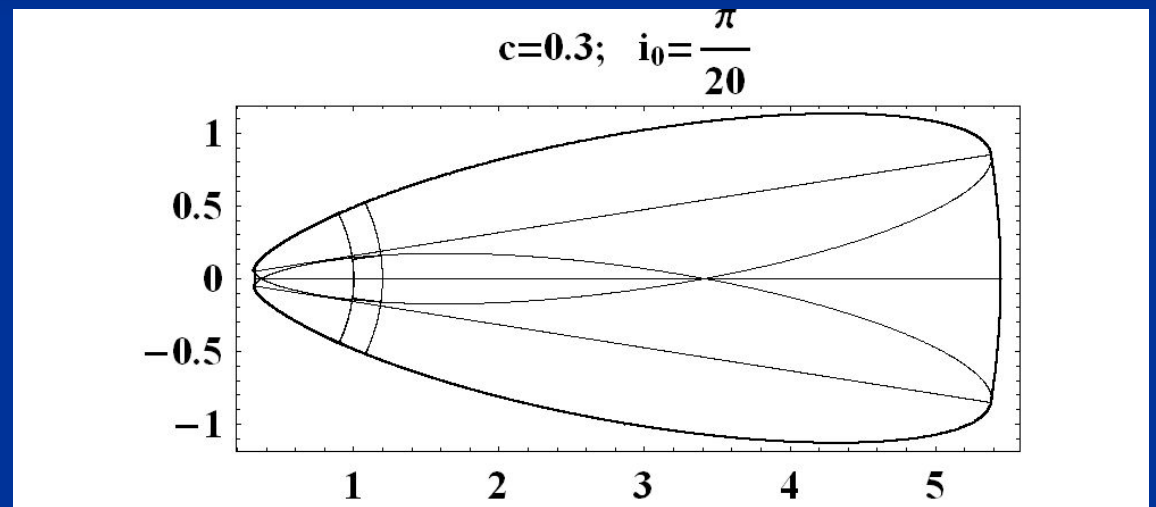
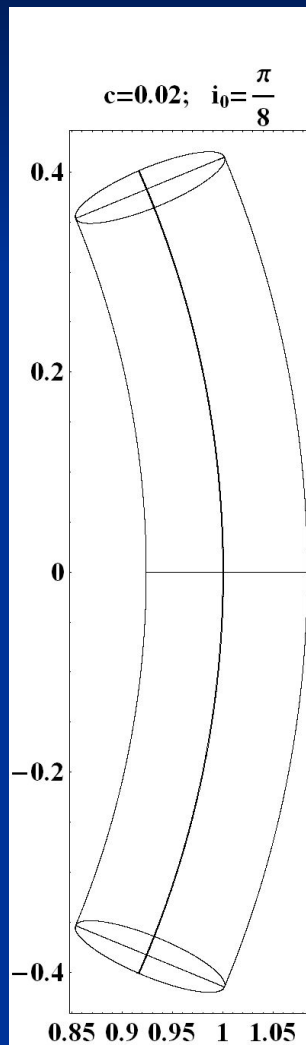
Метод используемый для поиска решений
аналогичен методу в главе 2.

Система уравнений несколько усложняется,
что приводит к появлению
дополнительных кривых.

$$c=0.2; \quad i_0 = \frac{\pi}{3}$$

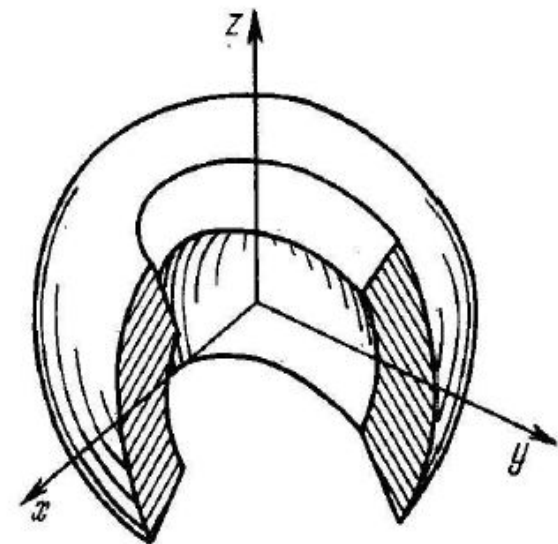
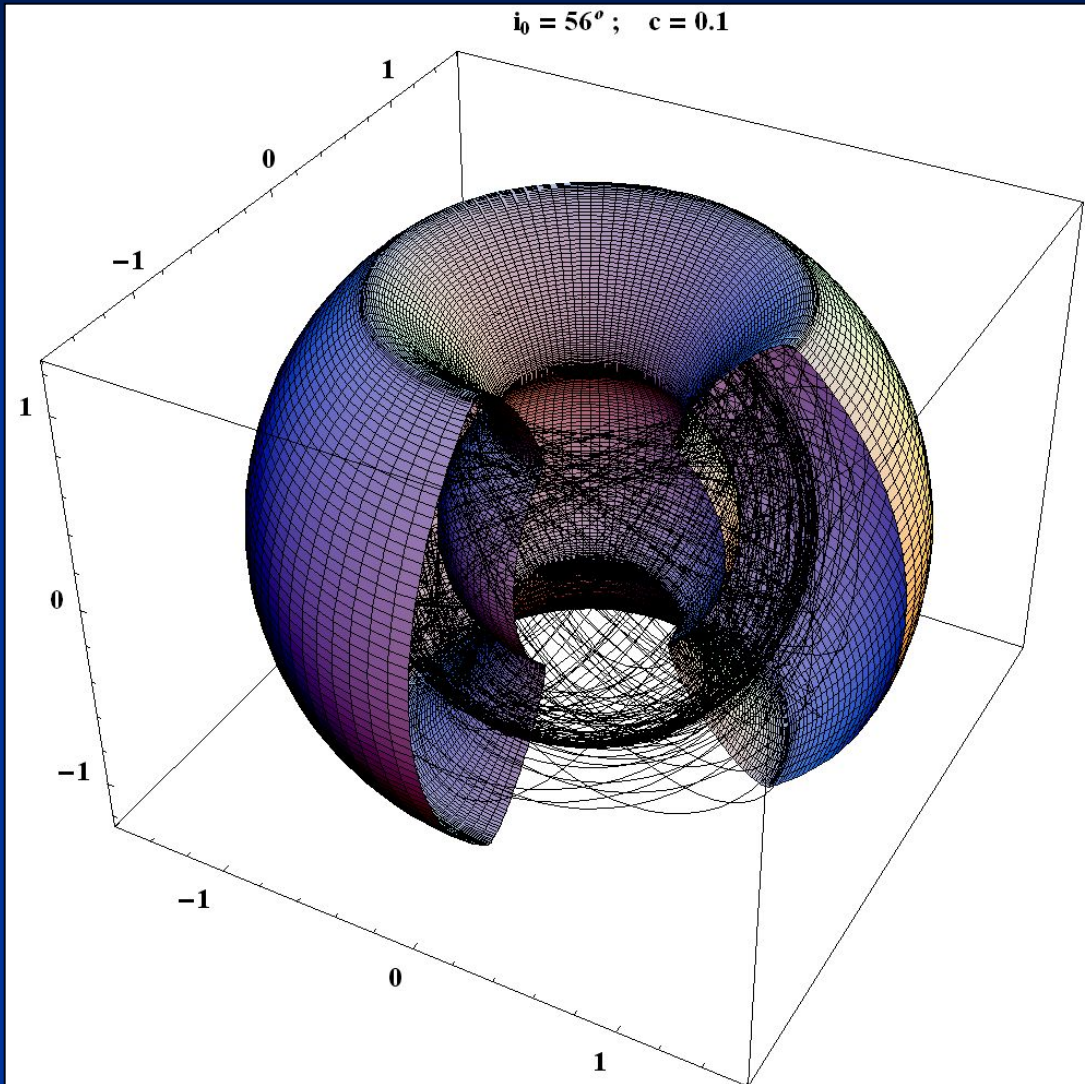


Возмущенные орбиты; произвольный наклон;

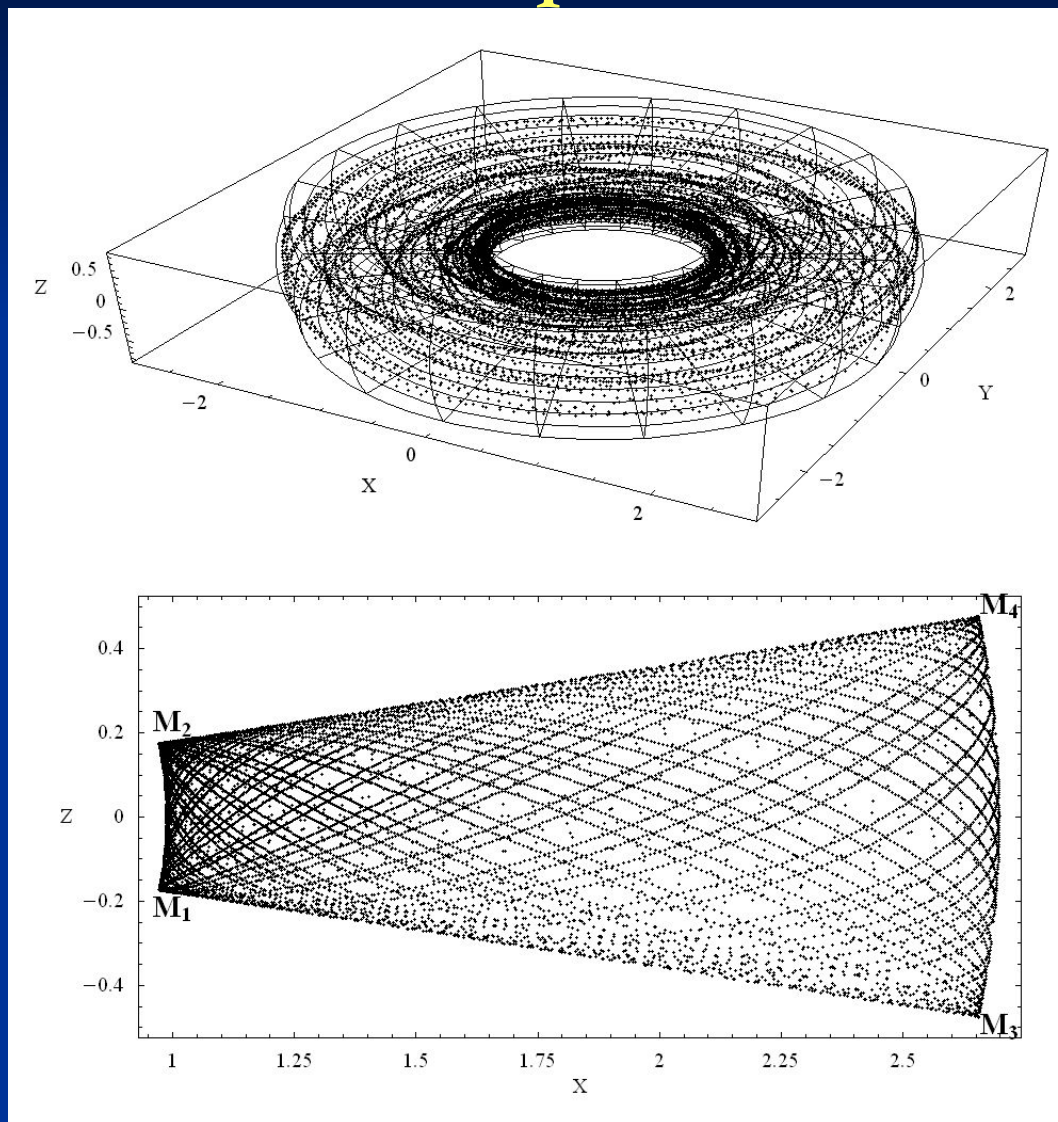


Возмущенные орбиты; произвольный наклон;

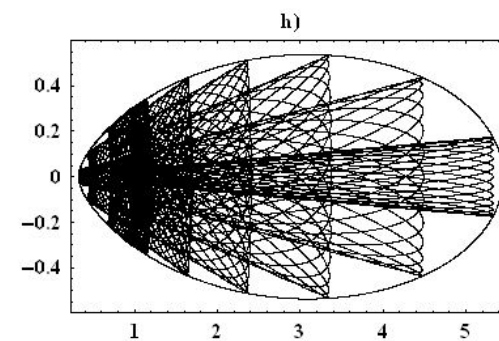
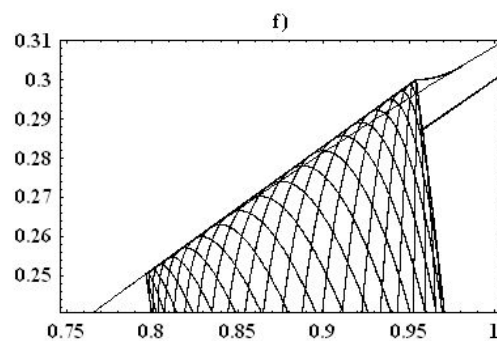
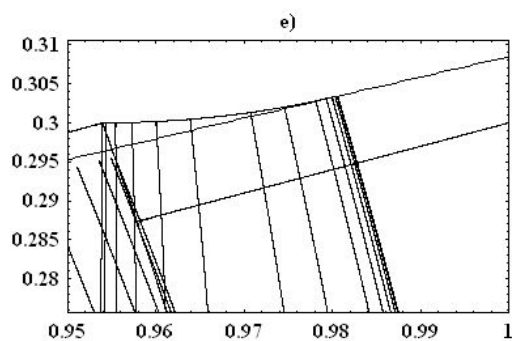
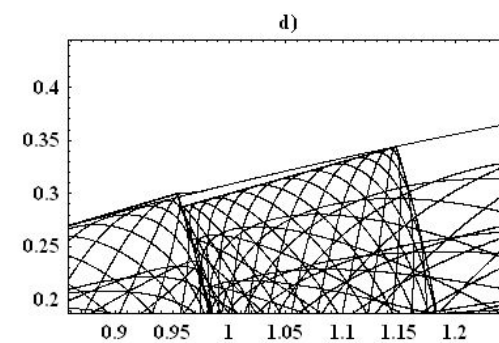
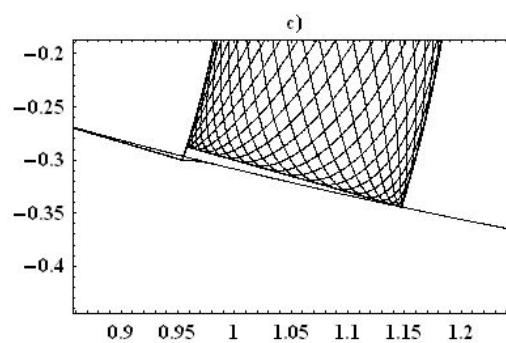
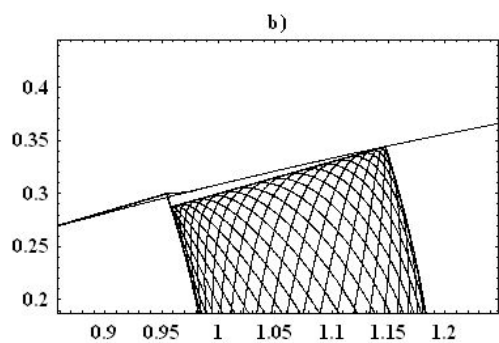
$i_0 = 56^\circ$; $c = 0.1$



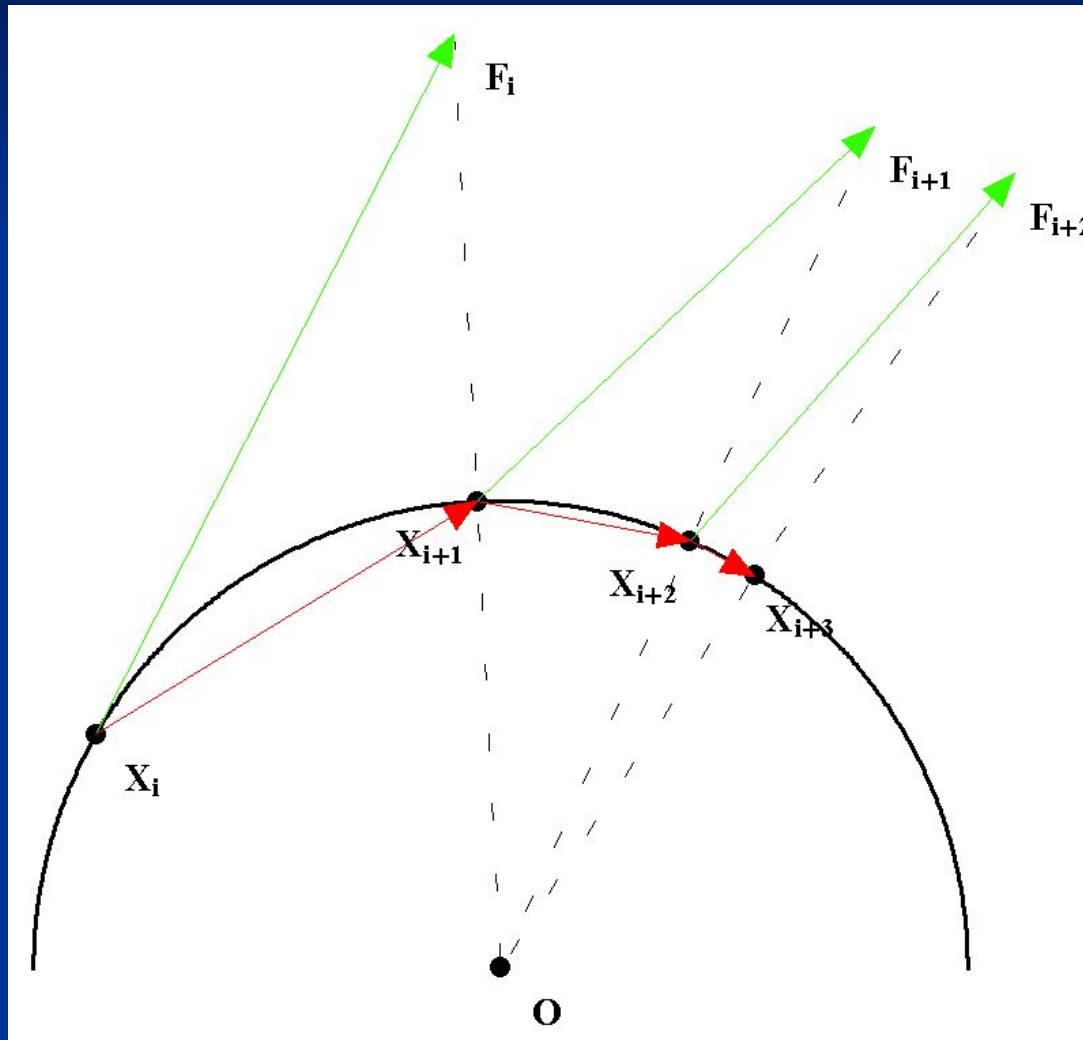
Численные эксперименты. Ящик орбиты



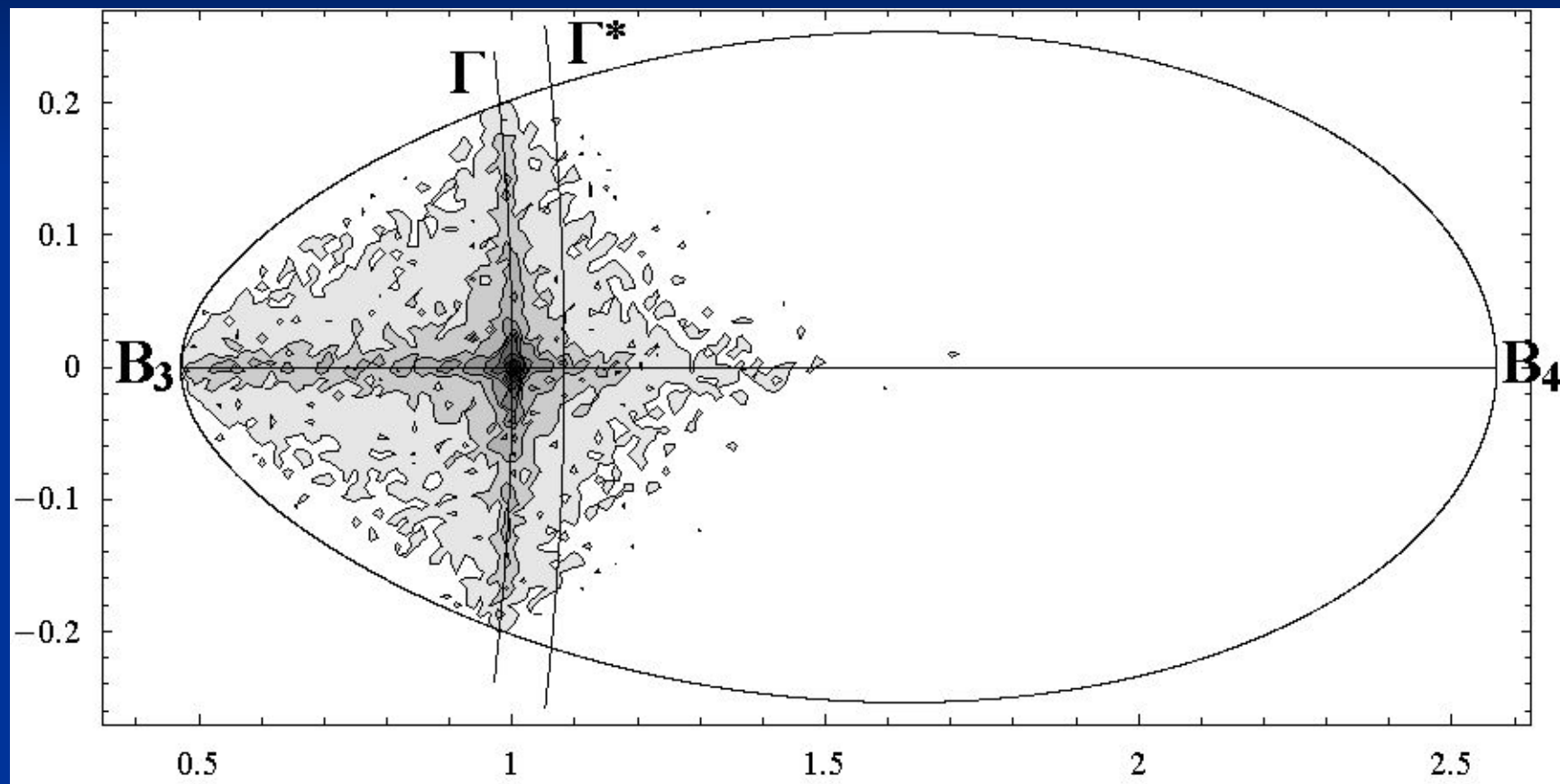
Численные эксперименты. Касание кривых орбитами



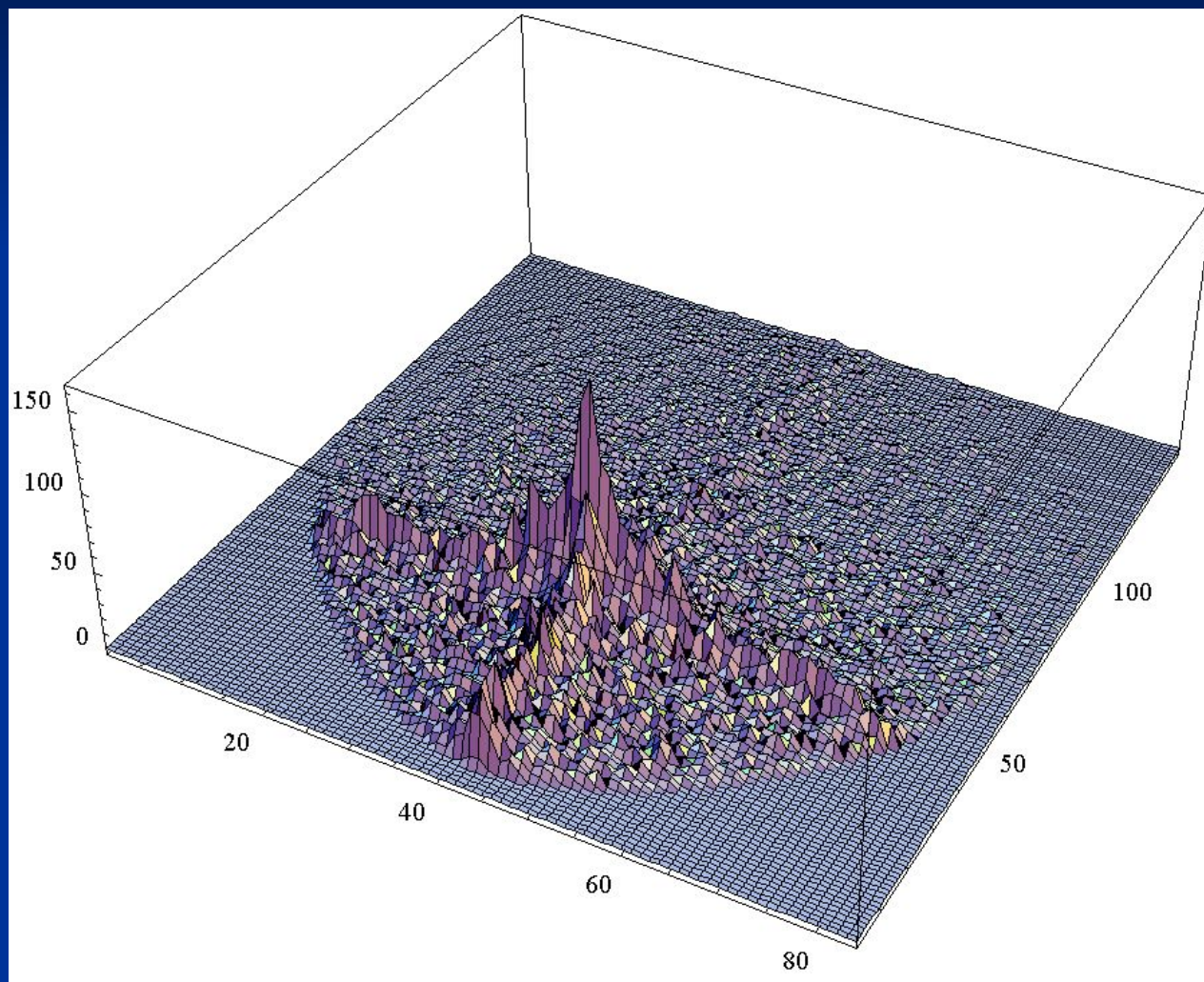
Численные эксперименты. Схема получения равномерного распределения точек по сфере



Численные эксперименты. Концентрация частиц в профиле



Численные эксперименты. Концентрация частиц в профиле



Положения, выносимые на защиту

- Создан метод поиска границы, как огибающей семейства траекторий;
- Найдена граница в трех классах задач и исследованы ее топологические и геометрические свойства;
- Исследованы форма и динамика пылевого комплекса на начальном этапе разлета и в процессе эволюции;

Благодарю за внимание

Литература

Собственные публикации