Строение пылевых комплексов, связанных со спутниками планет

Орлов С.А.

Научно-исследовательский астрономический институт им. В. В. Соболева

ВЕСТИ

РОССИЯ
ВЕСТИ

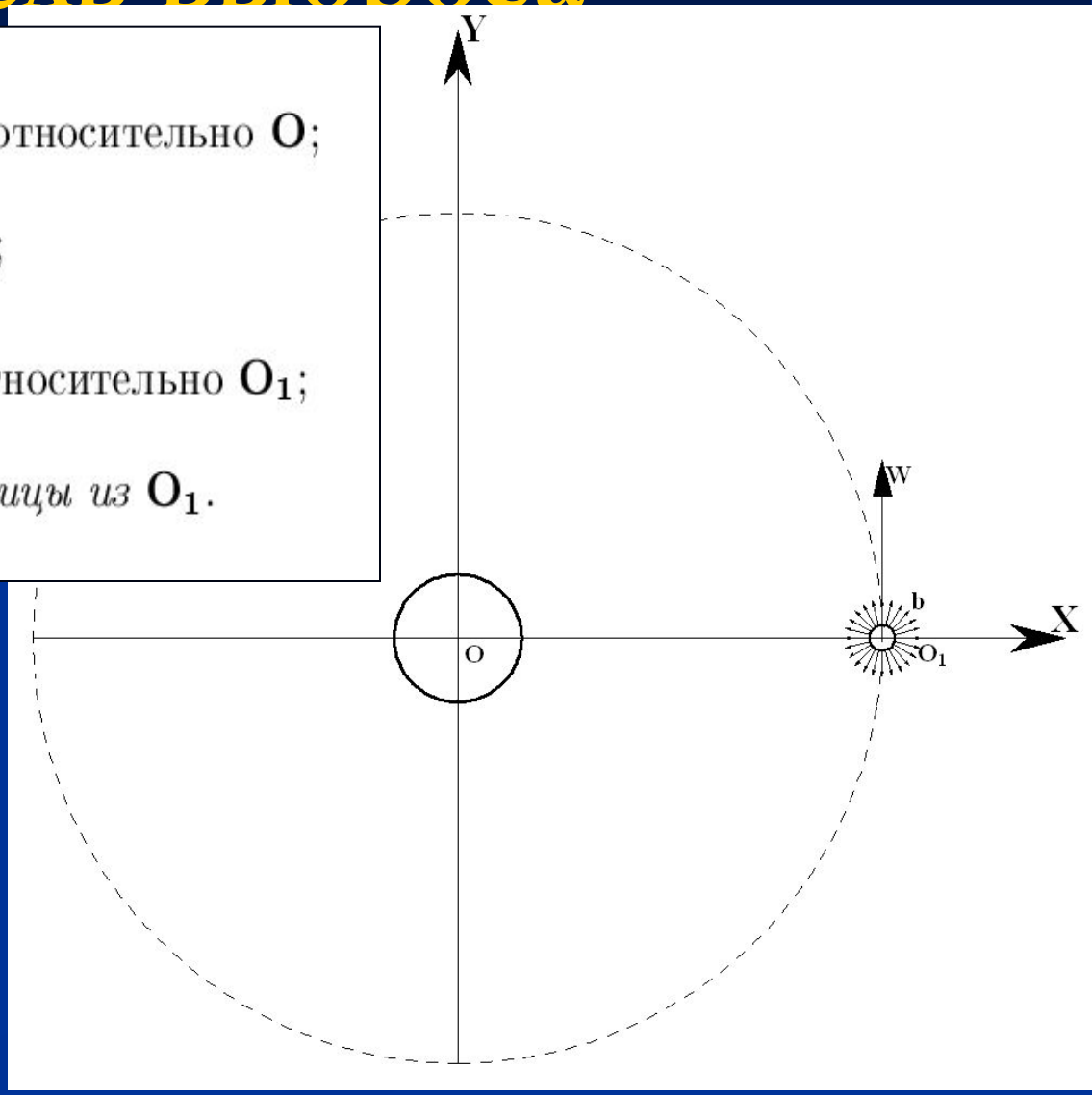
Модель выброса

R — радиус круговой орбиты $\mathbf{O_1}$ относительно $\mathbf{O}$;

$w = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{R}}$ — круговая скорость $\mathbf{O_1}$;

b — скорость выброса частицы относительно $\mathbf{O_1}$;

$c = \dfrac{b}{w}$ — *параметр выброса частицы из* $\mathbf{O_1}$.



Основные предположения и допущения

- Орбита спутника круговая кеплеровская
- Выброс частиц изотропен; их скорости одинаковы
- После выброса спутник не влияет на выброшенные частицы
- Рассматриваем только эллиптические орбиты частиц в прямом направлении движения (условие эллиптичности)

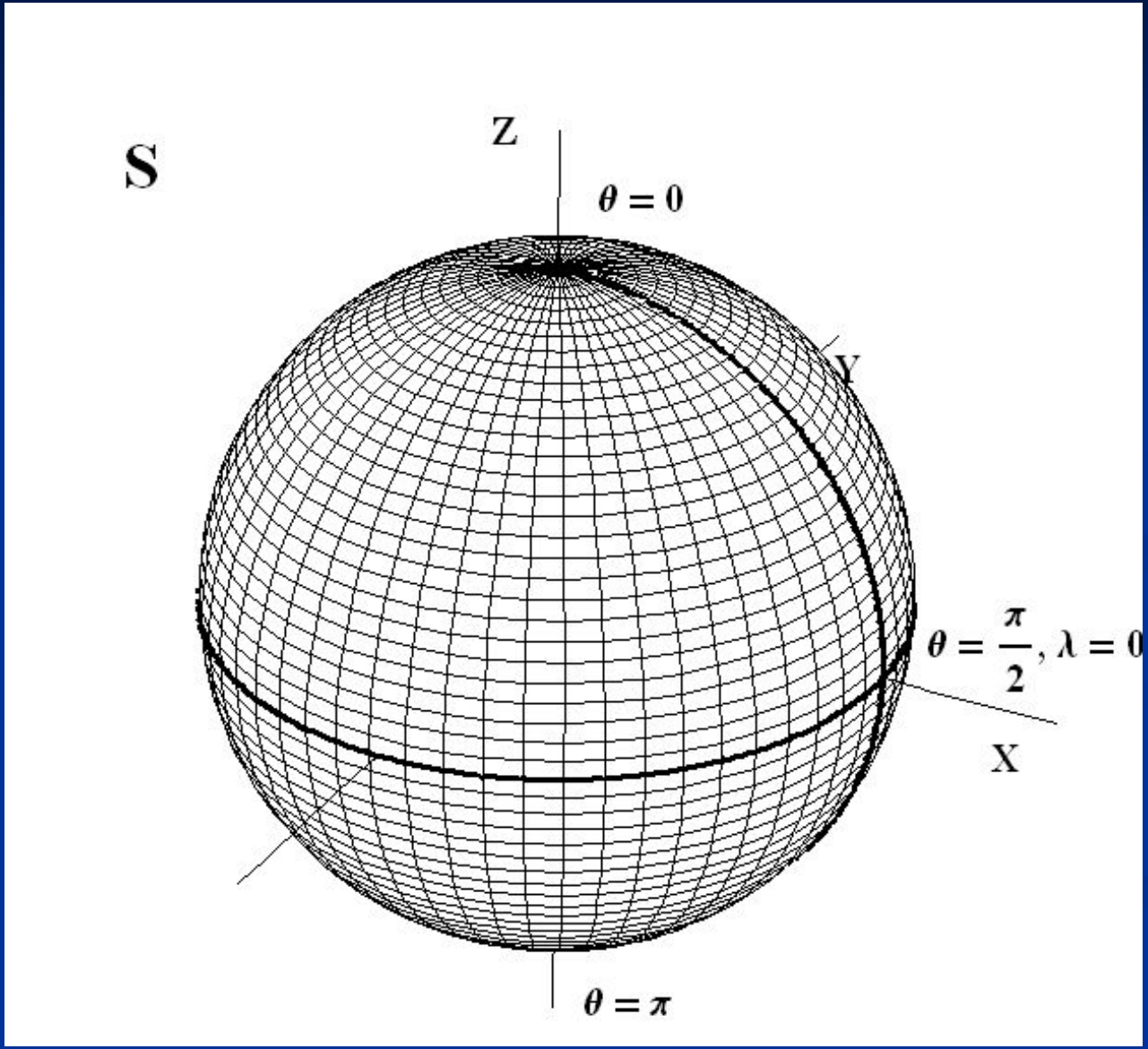
Условия эллиптичности и прямого направления движения частиц

$$b < w(\sqrt{2}-1) = \frac{\varkappa}{\sqrt{R}}(\sqrt{2}-1) \Longleftrightarrow c < c_{max} = \sqrt{2}-1.$$

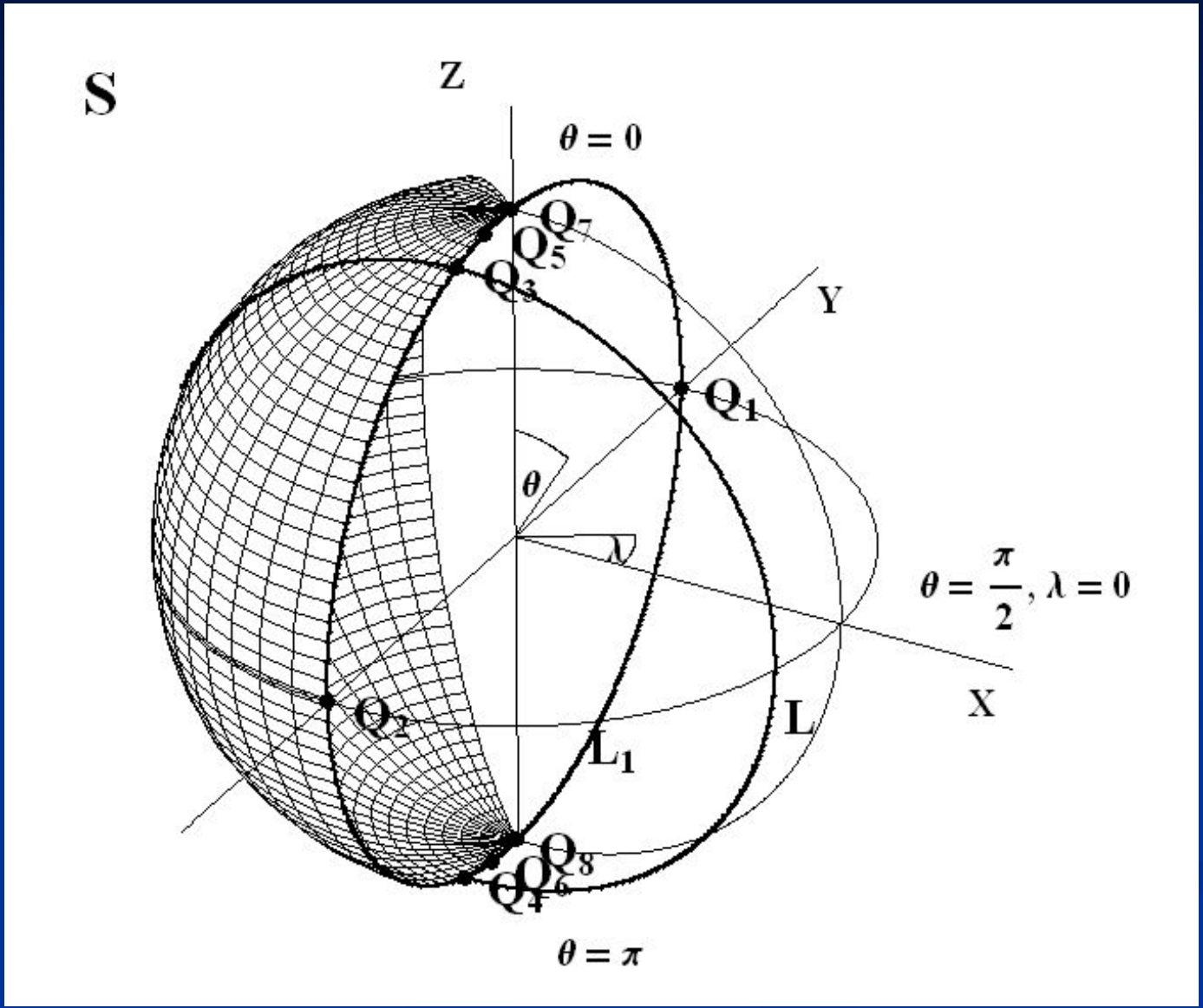
$$b < w \Longleftrightarrow c < 1$$

$$c < c_{max} = \sqrt{2}-1.$$

Сфера параметров



Сфера параметров



Начальные условия

Связь сферических и декартовых координат ($\mathcal{O}$)

$$x = \sin\theta\cos\lambda, \quad y = \sin\theta\sin\lambda, \quad z = \cos\theta\,.$$

Координаты вектора скорости b относительно $\mathbf{O_1}$

$$V_x = b\sin\theta\cos\lambda, \quad V_y = b\sin\theta\sin\lambda, \quad V_z = b\cos\theta\,.$$

$$\mathbf{r}_0 = (R, 0, 0), \quad \mathbf{v}_0 = (b\sin\theta\cos\lambda,\ w + b\sin\theta\sin\lambda,\ b\cos\theta)$$

Элементы орбиты частицы

$$A = \sqrt{(1 + c\sin\theta\sin\lambda)^2 + c^2\cos^2\theta}, \qquad 1 - c \leqslant A \leqslant 1 + c$$

$$p = A^2$$

$$a = \frac{1}{1 - 2c\sin\theta\sin\lambda - c^2}, \qquad \frac{1}{1 + 2c - c^2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{1 - 2c - c^2}$$

$$e^2 = (A^2 - 1)^2 + A^2c^2\sin^2\theta\cos^2\lambda, \qquad 0 \leqslant e \leqslant c(2 + c)$$

$$\cos i = \frac{1 + c\sin\theta\sin\lambda}{A}, \qquad \sin i = \frac{c\cos\theta}{A}, \qquad -\pi/2 \leqslant i \leqslant \pi/2$$

$$\Omega = 0 \Longleftrightarrow u_0 = 0$$

$$e\cos\varphi = A^2 - 1, \quad e\sin\varphi = Ac\sin\theta\cos\lambda$$

$$g = -\varphi$$

5-параметрическое семейство орбит становится 2-параметрическим

Семейство орбит

$$\mathbf{r} = r(\cos u,\, \cos i \sin u,\, \sin i \sin u),$$

$$r = \frac{A^2}{1 + \alpha \cos u + \beta \sin u},$$

$$\alpha = A^2 - 1, \qquad \beta = -Ac \sin\theta \cos\lambda\,.$$

Для орбит экстремального наклона

$$\mathbf{r} = \frac{1 - c^2}{1 - c^2 \cos u} \left(\cos u,\, \sqrt{1 - c^2} \sin u,\, \pm c \sin u\right).$$

Основная идея

Искать границу
семейства траекторий частиц
применив
теорию огибающих

Невозмущенные орбиты; плоский случай

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \lambda \in [0, 2\pi)$$

$$x = r\cos u\,, \quad y = r\sin u\,, \quad r = \frac{A^2}{1 + \alpha\cos u + \beta\sin u}.$$

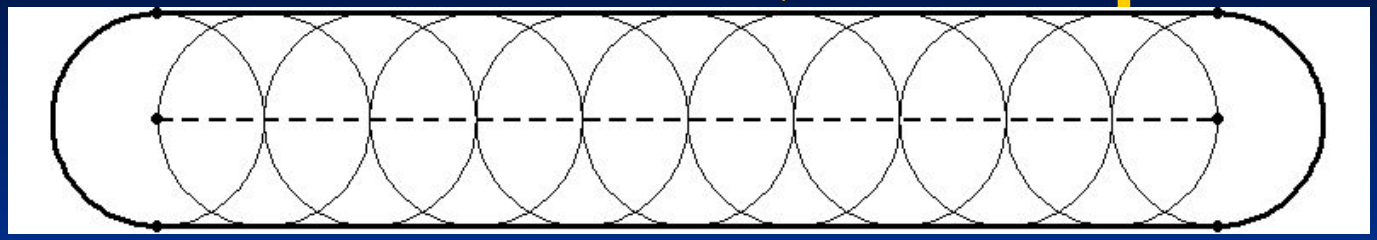
Здесь

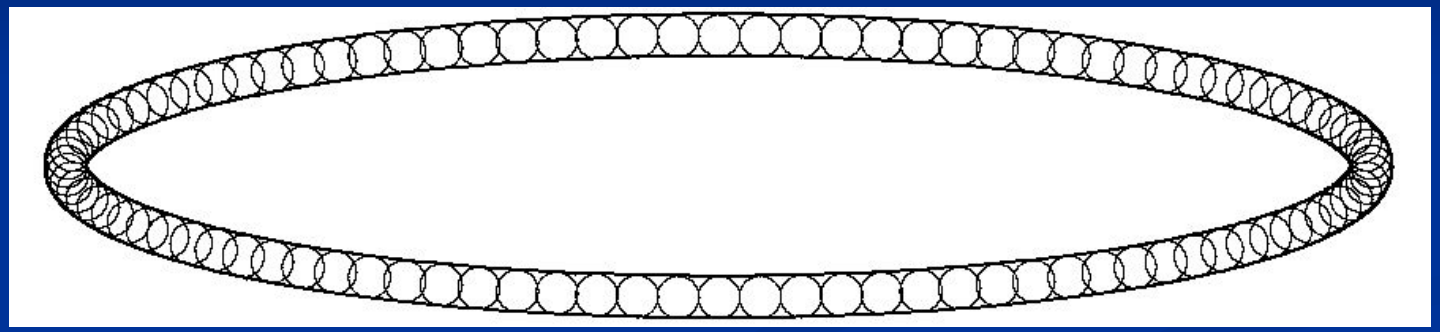
$$A = 1 + c\sin\lambda\,,$$

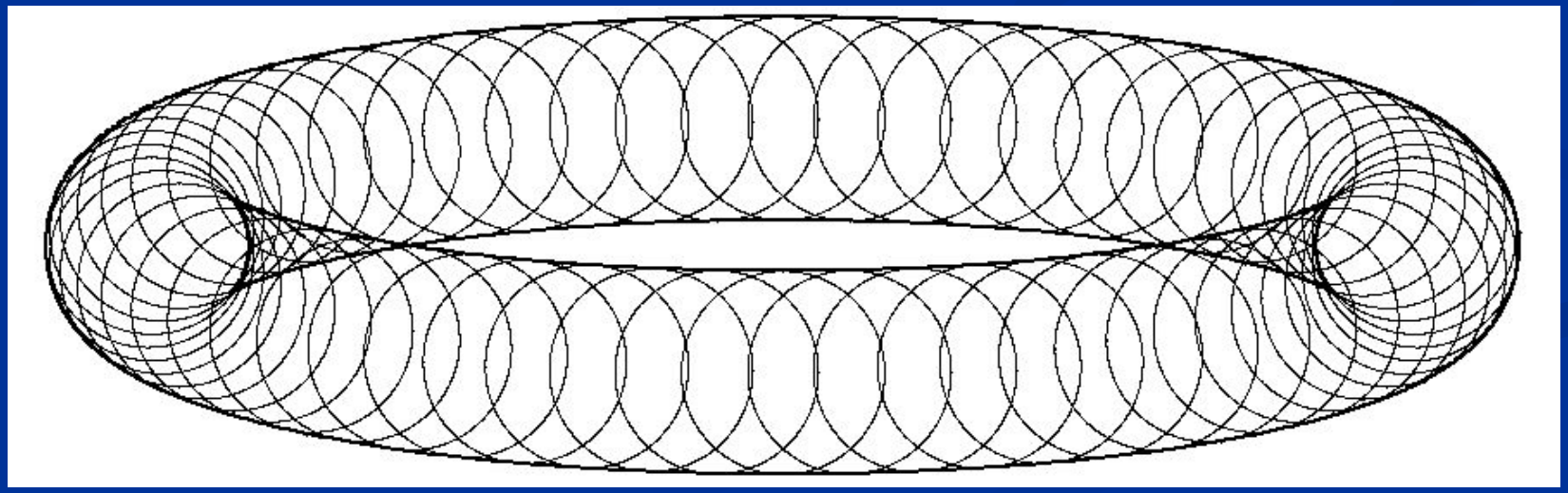
$$\alpha = A^2 - 1 = c(2 + c\sin\lambda)\sin\lambda\,,$$

$$\beta = -Ac\cos\lambda = -c(1 + c\sin\lambda)\cos\lambda\,.$$

Огибающая = Граница ?







Невозмущенные орбиты; плоский случай

[*Залгаллер В.А.* "Теория огибающих"]

$$\lambda \in [0, 2\pi),$$

$$x = r\cos u; \quad y = r\sin u; \qquad r(u,\lambda) = \frac{A^2}{1 + \alpha\cos u + \beta\sin u}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = \frac{-AcF(u,\lambda)}{(1 + \alpha\cos u + \beta\sin u)^2} = 0$$

$$F(u,\lambda) = 2\sin\frac{u}{2}\left[A(c + \sin\lambda)\cos\frac{u}{2} - 2\cos\lambda\sin\frac{u}{2}\right] = 0.$$

$$\cos u = \frac{4\cos^2\lambda - A^2(c + \sin\lambda)^2}{4\cos^2\lambda + A^2(c + \sin\lambda)^2}, \qquad \sin u = \frac{4A(c + \sin\lambda)\cos\lambda}{4\cos^2\lambda + A^2(c + \sin\lambda)^2}.$$

Невозмущенные орбиты; плоский случай

Параметрические уравнения огибающей:

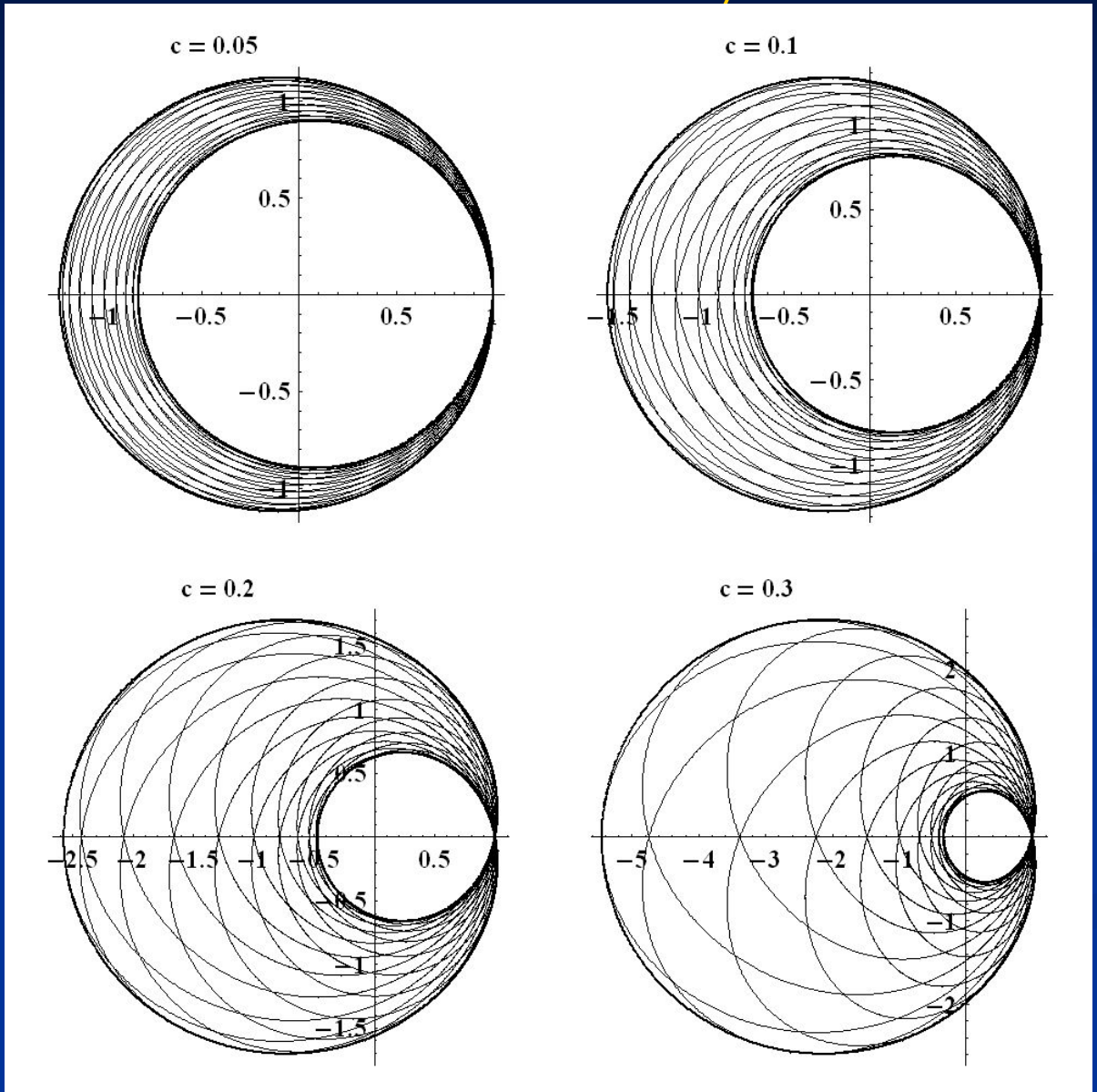
$$u = 2\lambda + F_1(\lambda), \qquad r = F_2(\lambda).$$

$$F_1(\lambda) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{h(s)\cos\lambda}{2 + sh(s)},$$

$$F_2(\lambda) = \frac{(A^2-4)s^2 + 2A^2cs + (A^2c^2+4)}{4cs^3 + (-A^2+4c^2-2)s^2 - 2A^2cs - (A^2c^2+2c^2-4)},$$

$$h(s) = cs^2 - (1-c^2)s + c\,, \qquad s = \sin\lambda\,.$$

Невозмущенные орбиты; плоский случай



Спутники и МКС

Пусть

$R_{\text{С}}$=7200 км. $R_{\text{МКС}}$=6760 км.

$$\frac{R_{\text{МКС}}}{R_{\text{С}}} = 0.9389$$

$$r_{min} = \frac{(1-c)^2}{1+2c-c^2} = 0.9389 \quad \Rightarrow \quad c = 0.0158$$

Принимая $V_c = 7000$ м/с получим

критическую скорость выброса осколка $V_{\text{кр}} = 110$ м/с

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

$$\mathbf{r}(u,\theta,\lambda) = r(\cos u,\ \cos i \sin u,\ \sin i \sin u),$$

$$r = \frac{A^2}{1 + \alpha \cos u + \beta \sin u},$$

$$\alpha = A^2 - 1, \quad \beta = -Ac \sin\theta \cos\lambda$$

$$\Phi(u,\theta,\lambda) \quad = \quad (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) \quad = \quad 0\,.$$

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

$$\Phi = \begin{vmatrix} r_1 \cos u - r \sin u & r_1 \cos i \sin u + r \cos i \cos u & r_1 \sin i \sin u + r \sin i \cos u \\ r_2 \cos u & r_2 \cos i \sin u - r i_2 \sin i \sin u & r_2 \sin i \sin u + r i_2 \cos i \sin u \\ r_3 \cos u & r_3 \cos i \sin u - r i_3 \sin i \sin u & r_3 \sin i \sin u + r i_3 \cos i \sin u \end{vmatrix}.$$

$$\Phi = r^2 \sin u (i_2 r_3 - i_3 r_2).$$

или

$$\Phi(u, \theta, \lambda) = \frac{2c^2 r^4}{A^2} \sin\theta \sin u \sin\frac{u}{2} \Phi_3(u, \theta, \lambda),$$

где

$$\Phi_3(u, \theta, \lambda) = A(\sin\theta \sin\lambda + c) \cos\frac{u}{2} - 2 \sin\theta \cos\lambda \sin\frac{u}{2}.$$

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \frac{A(\sin\theta\sin\lambda + c)}{2\sin\theta\cos\lambda},$$

$$\cos u = \frac{4\sin^2\theta\cos^2\lambda - A^2(\sin\theta\sin\lambda + c)^2}{4\sin^2\theta\cos^2\lambda + A^2(\sin\theta\sin\lambda + c)^2},$$

$$\sin u = \frac{4A\sin\theta\cos\lambda(\sin\theta\sin\lambda + c)}{4\sin^2\theta\cos^2\lambda + A^2(\sin\theta\sin\lambda + c)^2}.$$

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

Параметрические уравнения огибающей:

$$x = \frac{h_1}{h}, \qquad y = \frac{h_2}{h}, \qquad z = \frac{h_3}{h},$$

где

$$h_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\lambda - A^2B^2,$$

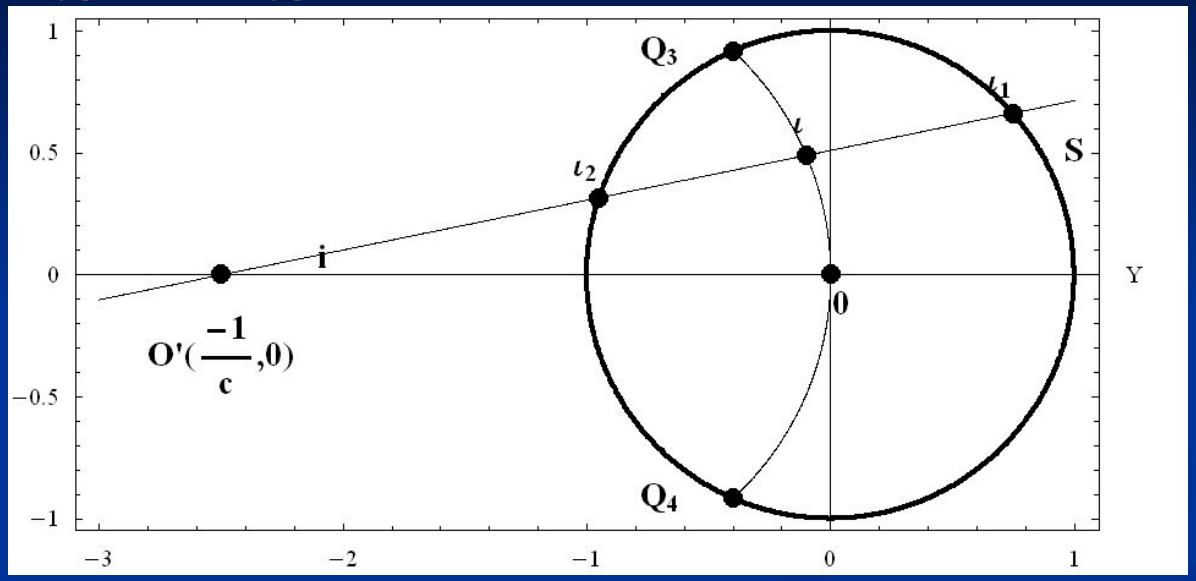
$$h_2 = 4B\sin\theta\cos\lambda(1 + c\sin\theta\sin\lambda),$$

$$h_3 = 4Bc\sin\theta\cos\theta\cos\lambda,$$

$$h = (2 - A^2)B^2 + 4(1 - cB)\sin^2\theta\cos^2\lambda,$$

$$A = \sqrt{(1 + c\sin\theta\sin\lambda)^2 + c^2\cos^2\theta}, \quad B = \sin\theta\sin\lambda + c.$$

Невозмущенные орбиты; пространственный случай

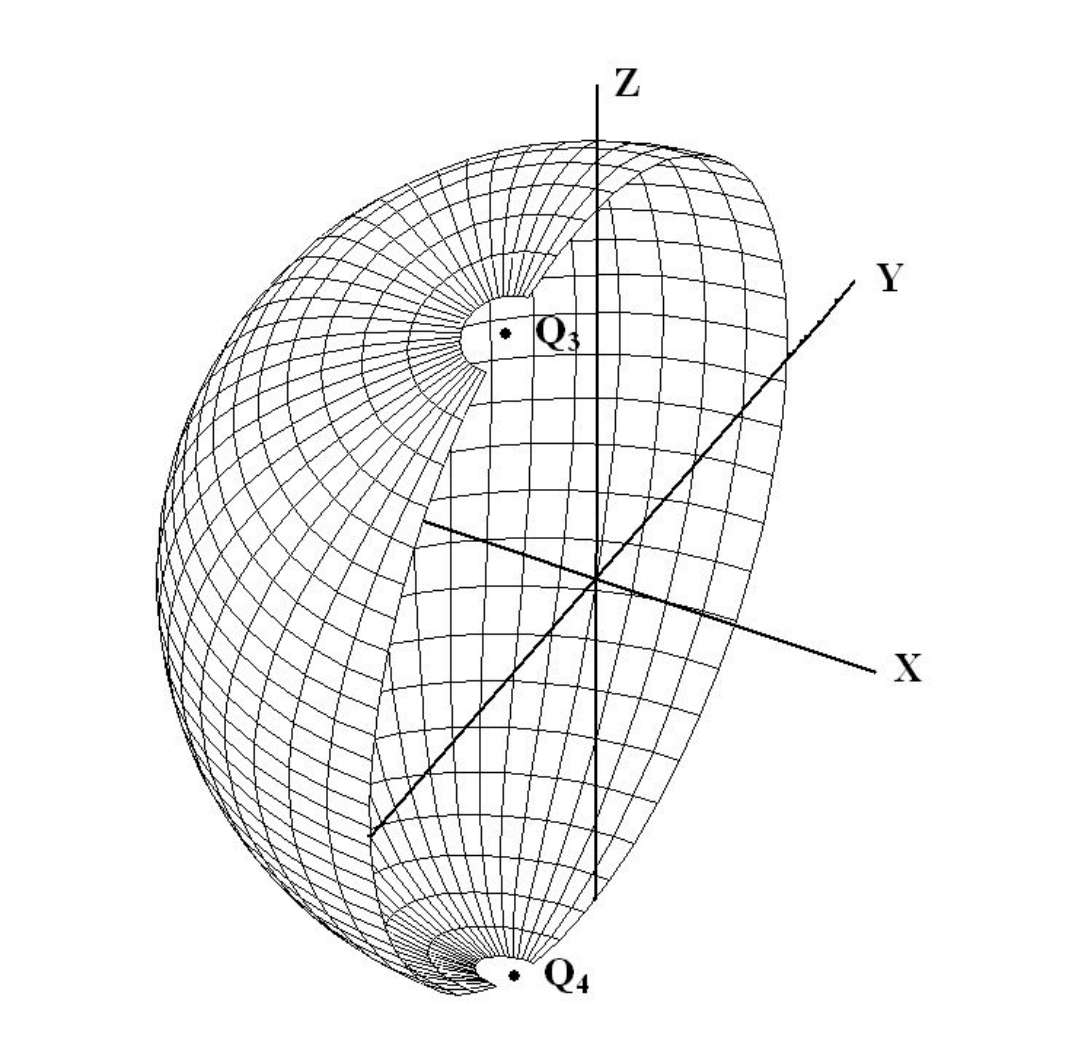


$$f_x = \frac{\cos\lambda(c+\sin\theta)}{\sqrt{1+c^2+2c\sin\theta}},$$

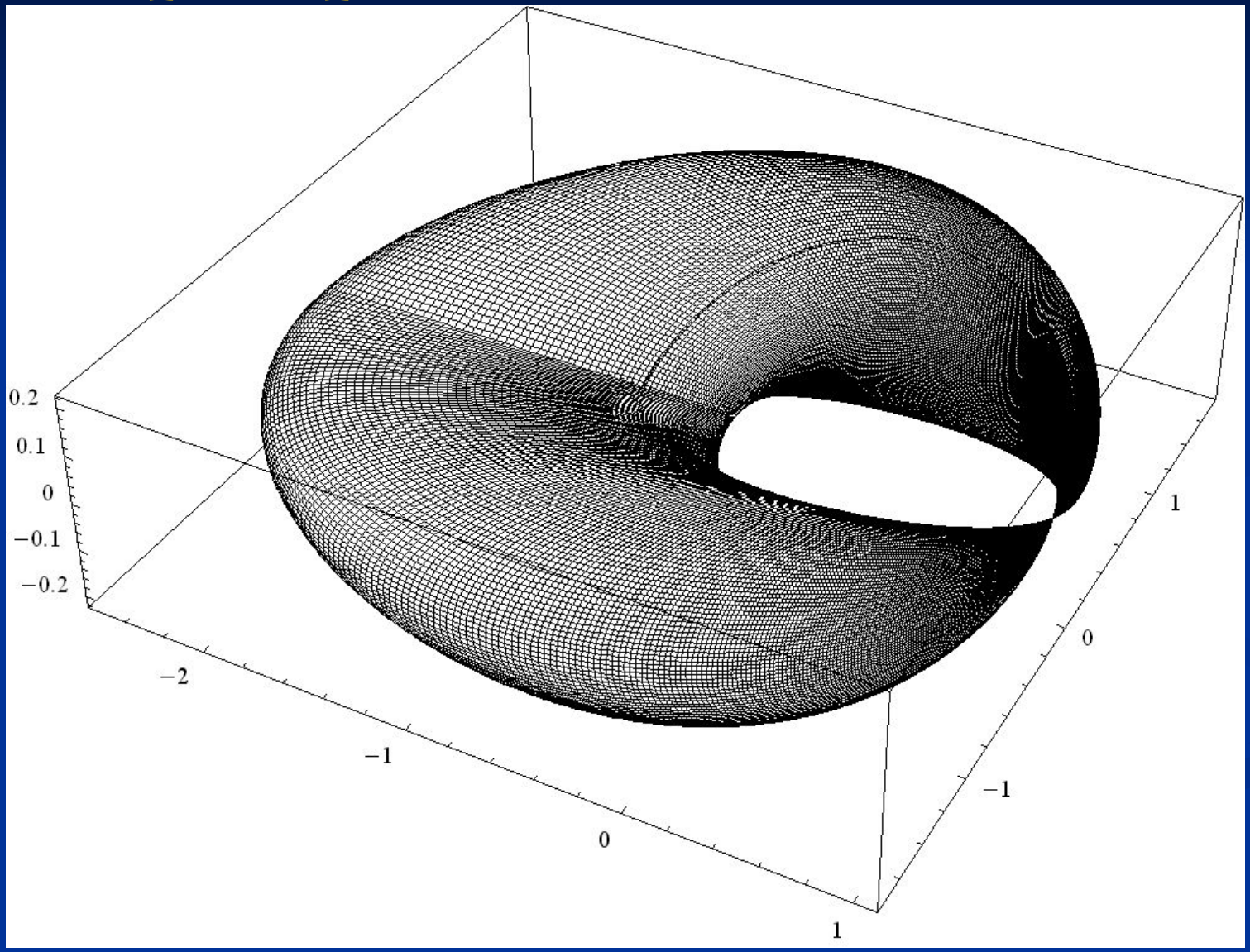
$$f_y = \frac{\sin\lambda(c+\sin\theta)(1+c\sin\theta) - c\cos^2\theta}{1+c^2+2c\sin\theta},$$

$$f_z = \frac{\cos\theta\left[1+c\sin\theta + c\sin\lambda(c+\sin\theta)\right]}{1+c^2+2c\sin\theta}.$$

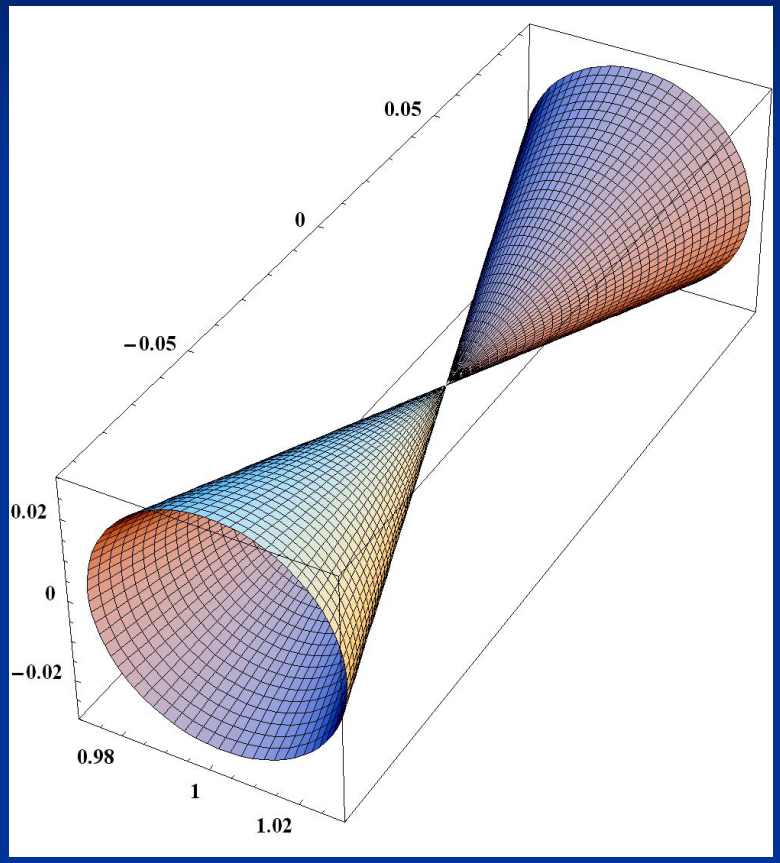
Невозмущенные орбиты; пространственный случай

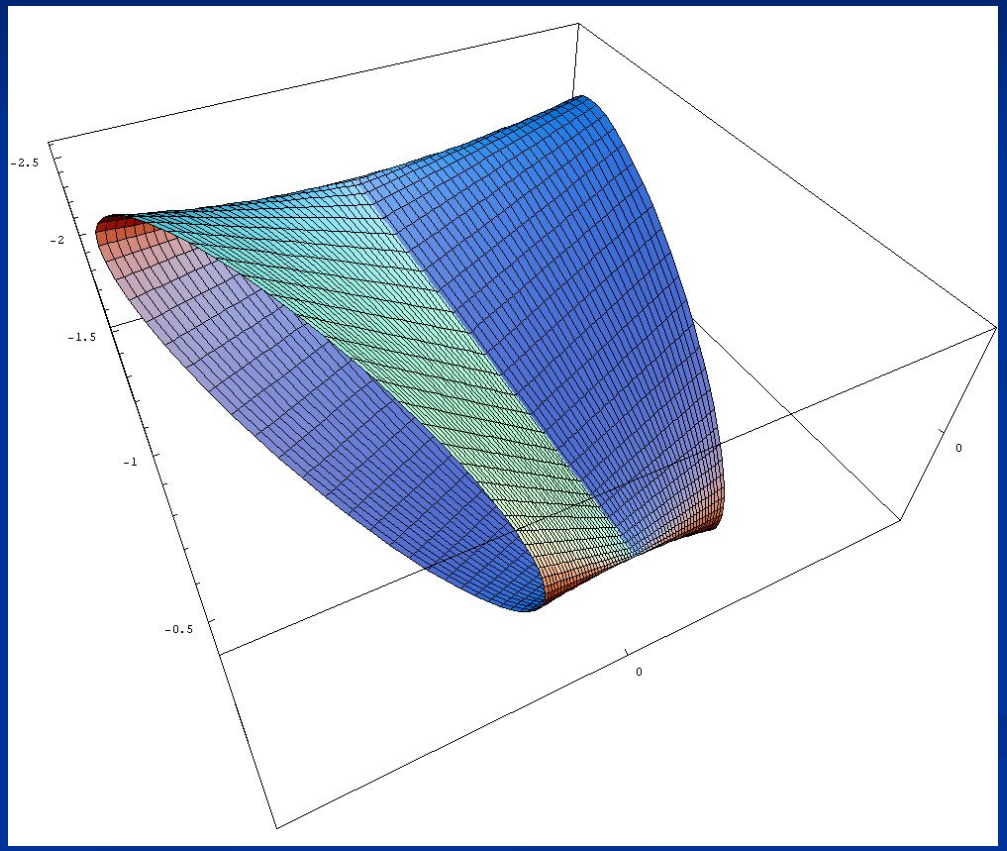


Невозмущенные орбиты; пространственный случай

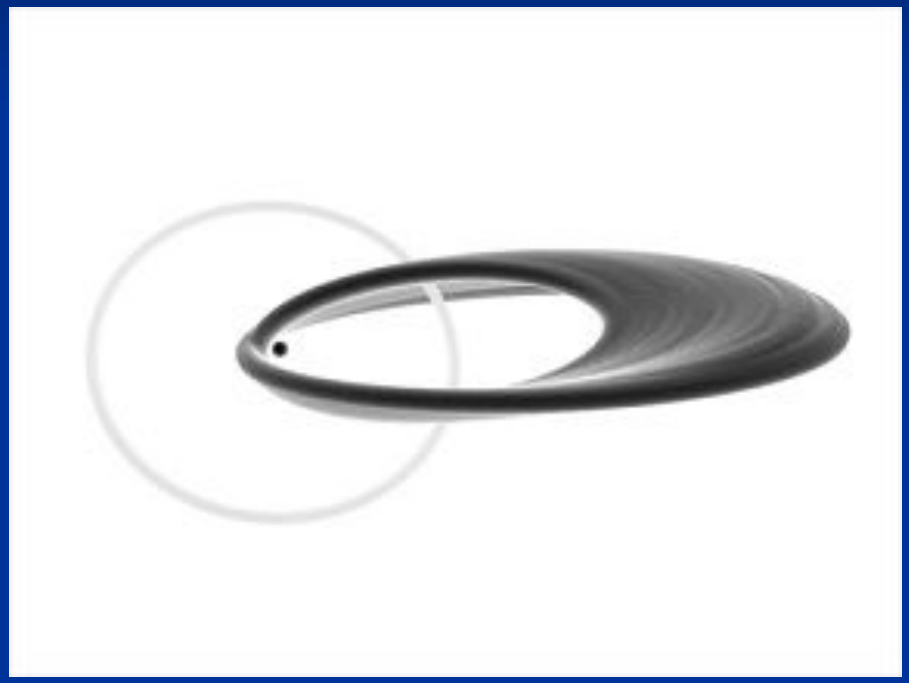


Невозмущенные кривые; пространственный случай; коническая точка и перетяжка

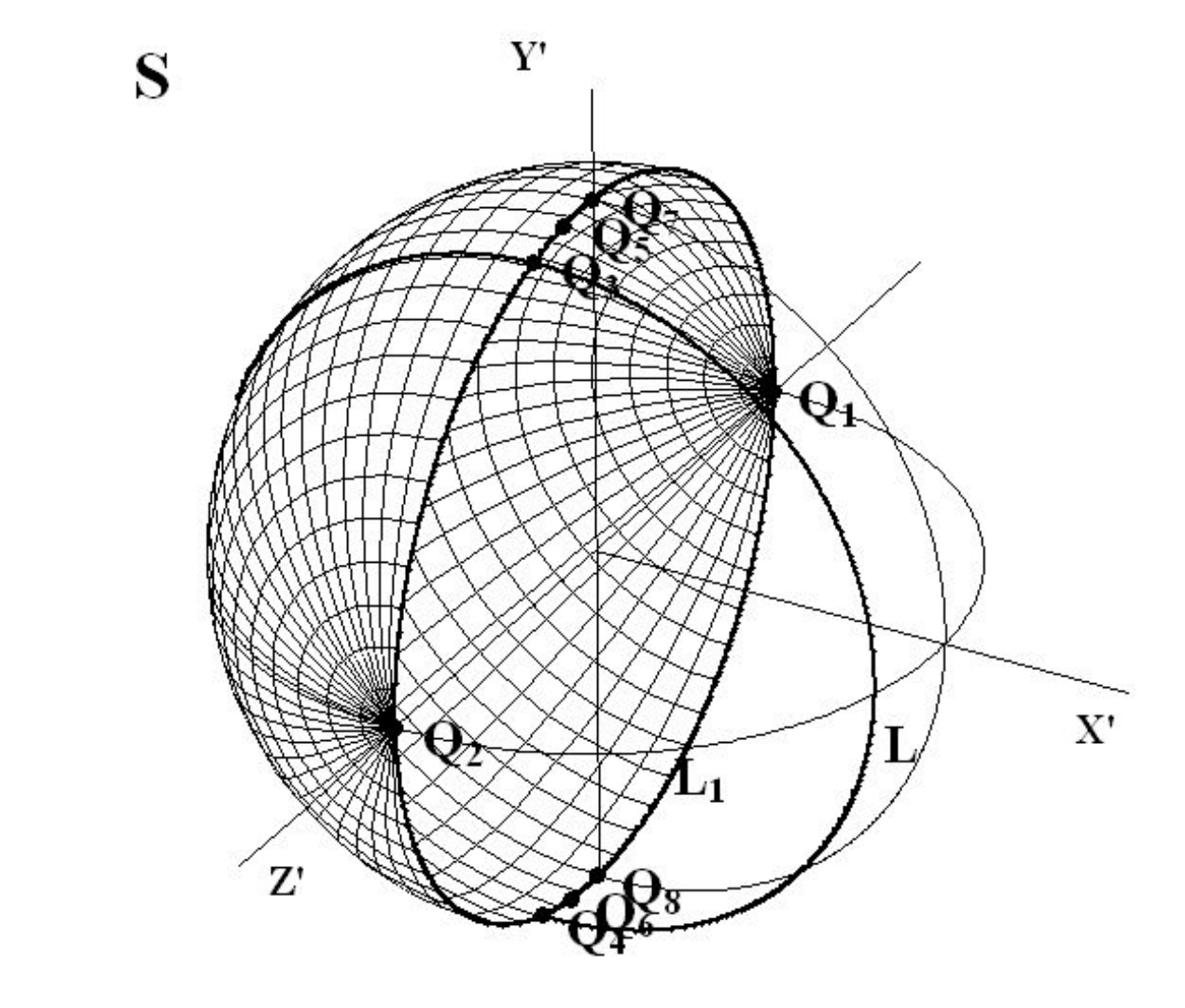




Г. О. Рябова, 2008 г.



Динамика облака частиц на начальном этапе разлета



Динамика облака частиц на начальном этапе разлета

$$a_1 = R(1-2c-c^2)^{-1}, \qquad a_2 = R(1+2c-c^2)^{-1},$$

$$n_1 = n_0(1-2c-c^2)^{3/2}, \qquad n_2 = n_0(1+2c-c^2)^{3/2},$$

$$T_1 = T_0(1-2c-c^2)^{-3/2}, \qquad T_2 = T_0(1+2c-c^2)^{-3/2}.$$

Здесь

$$n_0 = \varkappa R^{-3/2}, \qquad T_0 = \frac{2\pi}{n_0} = \frac{2\pi}{\varkappa} R^{3/2}$$

Эти формулы позволяют описать динамику частиц на начальном этапе разлета.

$$(n_2 - n_1)T_c = 2\pi; \qquad T_c = \frac{\sqrt{1+2c-c^2} + \sqrt{1-2c-c^2}}{4c(2-2c^2+\sqrt{1-6c^2+c^4})} T_0.$$

$$T_c = T_0\left(\frac{1}{6c} + \frac{c}{9} + \frac{17c^3}{108} + \ldots\right).$$

Период замыкания облака в случае Фобоса и Деймоса

$\varkappa^2 = 4.2828 \times 10^{13}$ м^3/с^2, $R = 9377.2$ км (Фобос), $R = 23459$ км (Деймос).

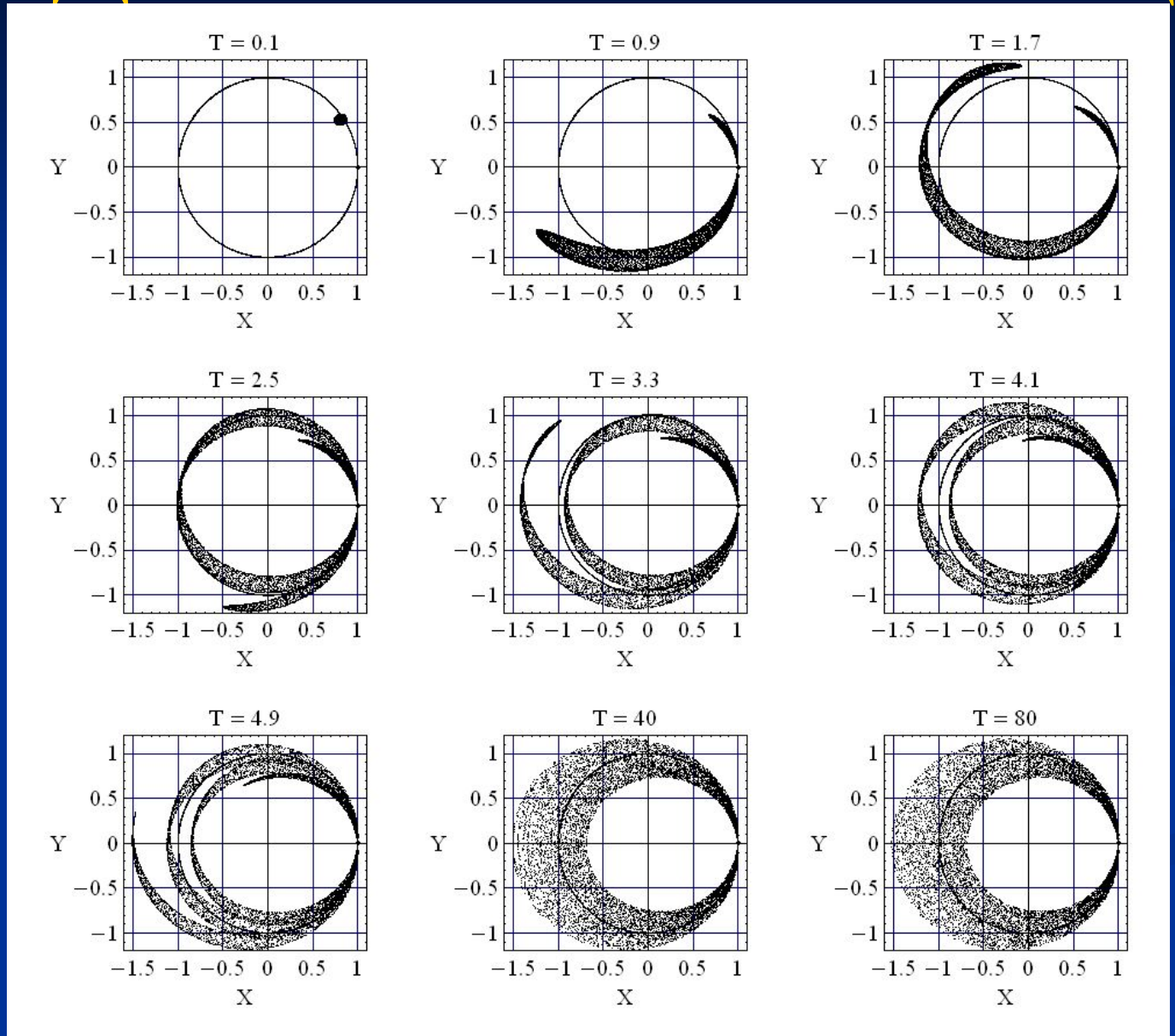
b	1	10	50	100	500	885.183
c	4.679×10^{-4}	4.679×10^{-3}	2.339×10^{-2}	4.679×10^{-2}	2.339×10^{-1}	c_{max}
T_c	112.1	11.21	2.243	1.122	0.233	0.145

Табл. 2 Приведены значения c и T_c (в сутках) в зависимости от b (в м/с) для Фобоса

b	1	10	50	100	500	559.672
c	7.401×10^{-4}	7.401×10^{-3}	3.700×10^{-2}	7.401×10^{-2}	3.700×10^{-1}	c_{max}
T_c	280.4	28.04	5.614	2.815	0.622	0.572

Табл. 3 Приведены значения c и T_c (в сутках) в зависимости от b (в м/с) для Деймоса

Динамика облака частиц



Средние движения

$$\widetilde{n} = \varkappa a^{-3/2},$$

$$\frac{n_M}{\widetilde{n}} = 1 + \frac{3J_2R_0^2(2 - 3\sin^2 i)}{4a^2(1-e^2)^{3/2}},$$

$$\frac{n_\Omega}{\widetilde{n}} = -\frac{3J_2R_0^2\cos i}{2a^2(1-e^2)^2},$$

$$\frac{n_g}{\widetilde{n}} = \frac{3J_2R_0^2(4 - 5\sin^2 i)}{4a^2(1-e^2)^2}.$$

Для оценки периода применимости развитой выше теории достаточно считать a, e, i равными соответствующим элементам обиты спутника $\mathbf{O_1}$. В частности, $a = R$, $e = 0$:

$$n_\Omega = -\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{7/2} n^0\cos i,$$

$$n_g = \frac{3}{4}J_2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{7/2} n^0(4 - 5\sin^2 i),$$

Период применимости теории невозмущенных орбит

$$_{\Delta}T = \min\left\{\frac{\pi}{6|n_\Omega|}, \frac{\pi}{6|n_g|}\right\}.$$

$$\varkappa^2 = 4.2828 \times 10^{13}\ \text{м}^3/\text{с}^2, \quad R_0 = 3394.0\ \text{км}, \quad J_2 = 8.7460 \times 10^{-4};$$

$$R = 9377.2\ \text{км (Фобос)}, \quad R = 23459\ \text{км (Деймос)}.$$

В результате

$$n_\Omega = -1.2386 \times 10^{-3}\ \frac{1}{\text{сут}}, \qquad n_g = 2.4772 \times 10^{-3}\ \frac{1}{\text{сут}} \qquad \text{(Фобос)},$$

$$n_\Omega = -5.0016 \times 10^{-5}\ \frac{1}{\text{сут}}, \qquad n_g = 1.0003 \times 10^{-4}\ \frac{1}{\text{сут}} \qquad \text{(Деймос)}.$$

Поэтому

$$_{\Delta}T = 211.37\ \text{сут (Фобос)}, \qquad _{\Delta}T = 5234.3\ \text{сут (Деймос)}.$$

Частоты средних движений

$$n_M = \omega_1, \quad n_\Omega = \omega_2, \quad n_g = \omega_3,$$

Установлено, что частоты линейно-независимы.

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; плоский случай

В плоском случае $\theta = \pi/2, \quad i = 0.$

$$x = r\cos(u+\Omega),$$

$$y = r\sin(u+\Omega)$$

при

$$r = \frac{p}{1+e\cos(u-g)}.$$

Введем замену переменных: $g' = u - g, \quad u' = u + \Omega.$

$$x = r\cos u; \quad y = r\sin u \qquad \text{при} \quad r = \frac{p}{1+e\cos g}.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; плоский случай

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, g, \lambda)}.$$

Особым точкам соответствует ранг, равный 1 или 0. Выпишем матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -r\sin u & r_2\cos u & r_3\cos u \\ r\cos u & r_2\sin u & r_3\sin u \end{pmatrix}.$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

Здесь

$$a_{12} = -rr_2, \qquad a_{13} = -rr_3, \qquad a_{23} = 0.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; плоский случай

$$p_2 = 0, \quad p_3 = 2cA\cos\lambda, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = \frac{c^2 A}{e}\cos\lambda(c + 3\sin\lambda), \quad r_2 = \frac{e}{p}r^2 \sin g,$$

$$r_3 = \frac{cA}{e(1 + e\cos g)^2}\left[f_1(g,\lambda)\cos\lambda + Acf(\lambda)\sin g\right],$$

где

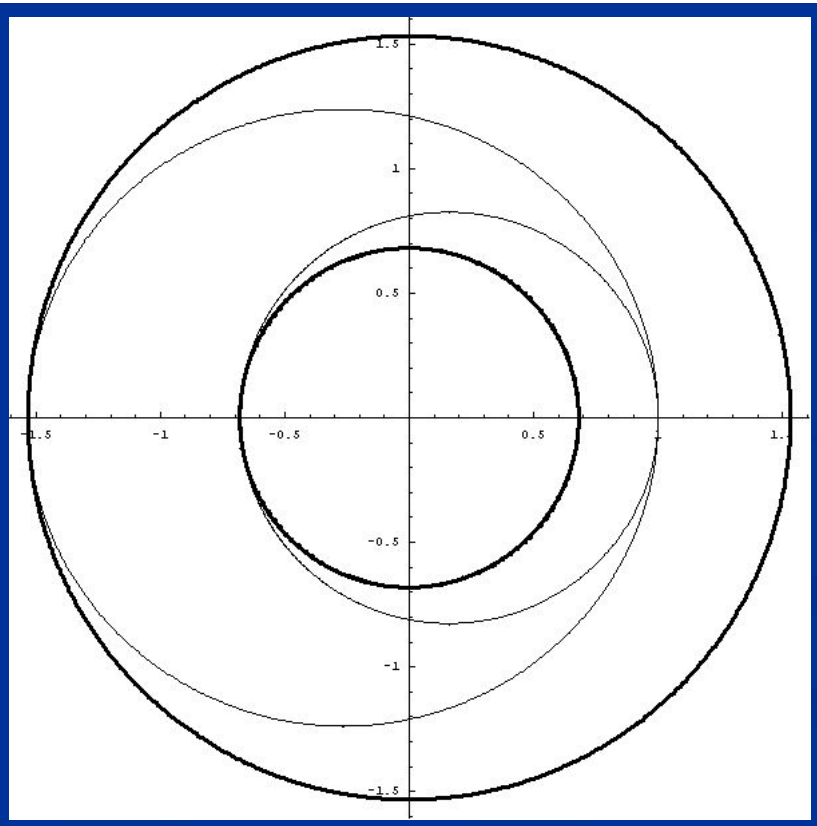
$$f(\lambda) = 1 + 2c\sin\lambda + (3 + c^2)\sin^2\lambda + 2c\sin^3\lambda,$$

$$f_1(g,\lambda) = 2e(1 + e\cos g) - cA^2(c + 3\sin\lambda)\cos g\,.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; плоский случай

Особенности в плоскости xy лежат на окружностях

$$r = \frac{(1+cm)^2}{1+ck(2+cm)}, \quad k = \pm 1,\ m = \pm 1.$$



Возмущенные орбиты; нулевой наклон; пространственный случай

Основное отображение.

$$
\begin{aligned}
x &= r(\cos u \cos \Omega - \cos i \sin u \sin \Omega), \\
y &= r(\cos u \sin \Omega + \cos i \sin u \cos \Omega), \\
z &= r \sin i \sin u
\end{aligned}
$$

при

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(u - g)}.$$

$$g' = u - g, \qquad \Omega' = \Omega + \Omega'',$$

где

$$\cos \Omega'' = \frac{\cos u}{\xi}, \quad \sin \Omega'' = \frac{\cos i \sin u}{\xi}, \quad \xi = \sqrt{\cos^2 u + \cos^2 i \sin^2 u} = \sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 u}.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; пространственный случай

$$x = r\xi\cos\Omega', \qquad y = r\xi\sin\Omega', \qquad z = r\sin i\sin u,$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos g'}\,.$$

Сечение (отображение Φ):

$$x = r\xi\,, \qquad z = r\sin i\sin u$$

при

$$r = \frac{p}{1 + e\cos g}\,, \qquad \xi = \sqrt{1 - \sin^2 i\sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u + \cos^2 i\sin^2 u}\,.$$

Возмущенные орбиты; нулевой наклон; пространственный случай

$$\mathcal{A} = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\theta, \lambda, u, g)}$$

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} r_1\xi - i_1 r\xi^{-1}\sin i\cos i\sin^2 u & (r_1\sin i + i_1 r\cos i)\sin u \\ r_2\xi - i_2 r\xi^{-1}\sin i\cos i\sin^2 u & (r_2\sin i + i_2 r\cos i)\sin u \\ -r\xi^{-1}\sin^2 i\cos u\sin u & r\sin i\cos u \\ r_4\xi & r_4\sin i\sin u \end{pmatrix}.$$

Вырождение $\mathcal{A}$ равносильно обращению в нуль всех a_{mn}:

$$\begin{aligned} a_{12} &= \cos i\sin u(r_1 i_2 - r_2 i_1), & a_{13} &= \sin i\cos u\, r_1\,, \\ a_{14} &= -\cos i\sin u\, r_4 i_1\,, & a_{23} &= \sin i\cos u\, r_2\,, \\ a_{24} &= -\cos i\sin u\, r_4 i_2\,, & a_{34} &= -\sin i\cos u\, r_4\,. \end{aligned}$$

$$a_{mn} = 0$$

Список кривых

$$S_{2,3}: \qquad x = \frac{\sqrt{1+c^2}}{1+c^2\cos g}, \quad z = \pm\frac{c\sqrt{1+c^2}}{1+c^2\cos g}$$

$$S_{4,5}: \qquad x = \frac{(1-c^2)^{3/2}}{1+c^2\cos g}, \quad z = \pm\frac{c(1-c^2)}{1+c^2\cos g}$$

$$S_{6,7}: \qquad x = \frac{\sqrt{1+2c\sin\theta+c^2}}{1+kc(c+2\sin\theta)}(1+c\sin\theta), \quad z = \frac{\sqrt{1+2c\sin\theta+c^2}}{1+kc(c+2\sin\theta)}c\cos\theta$$

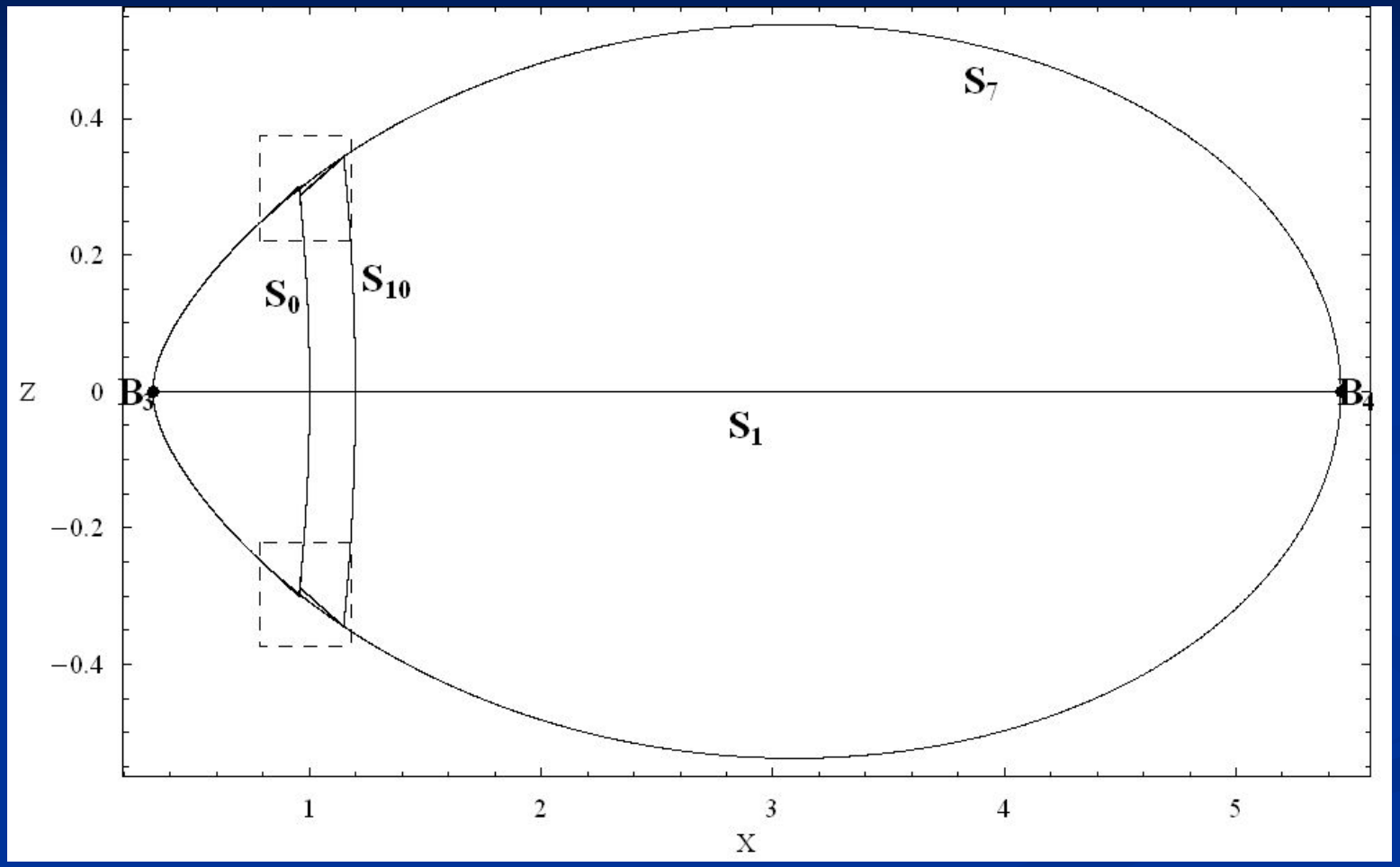
$$S_8: \qquad x = \sqrt{1+cs}, \qquad z = \pm\frac{c\sqrt{h_6}}{2-cs-c^2}$$

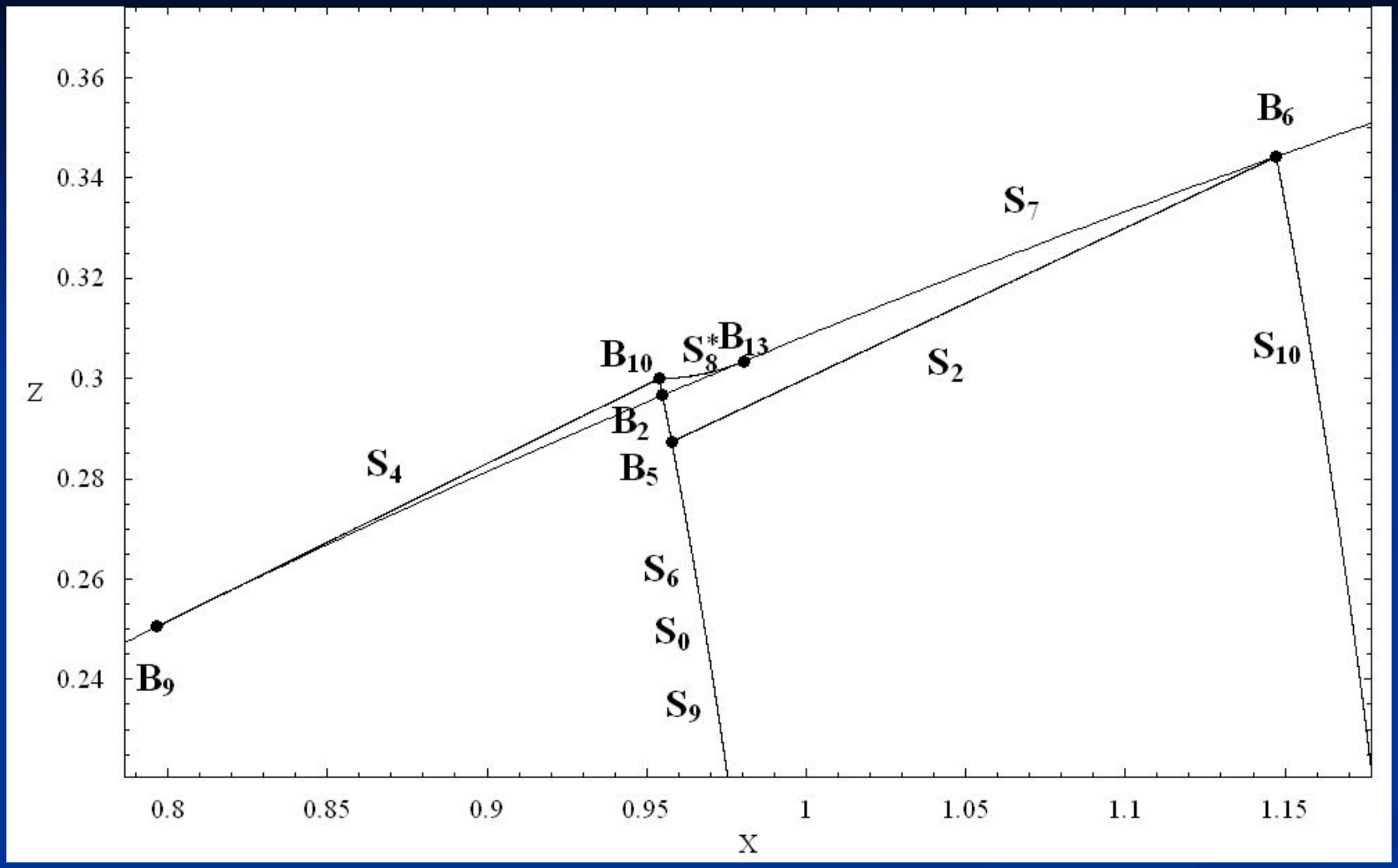
$$S_{9,10}: \qquad x = \frac{\sqrt{1+c^2}}{1+kc^2}\sqrt{1+c^2\cos^2 u}, \quad z = \frac{\sqrt{1+c^2}}{1+kc^2}k_1 c\sin u.$$

где

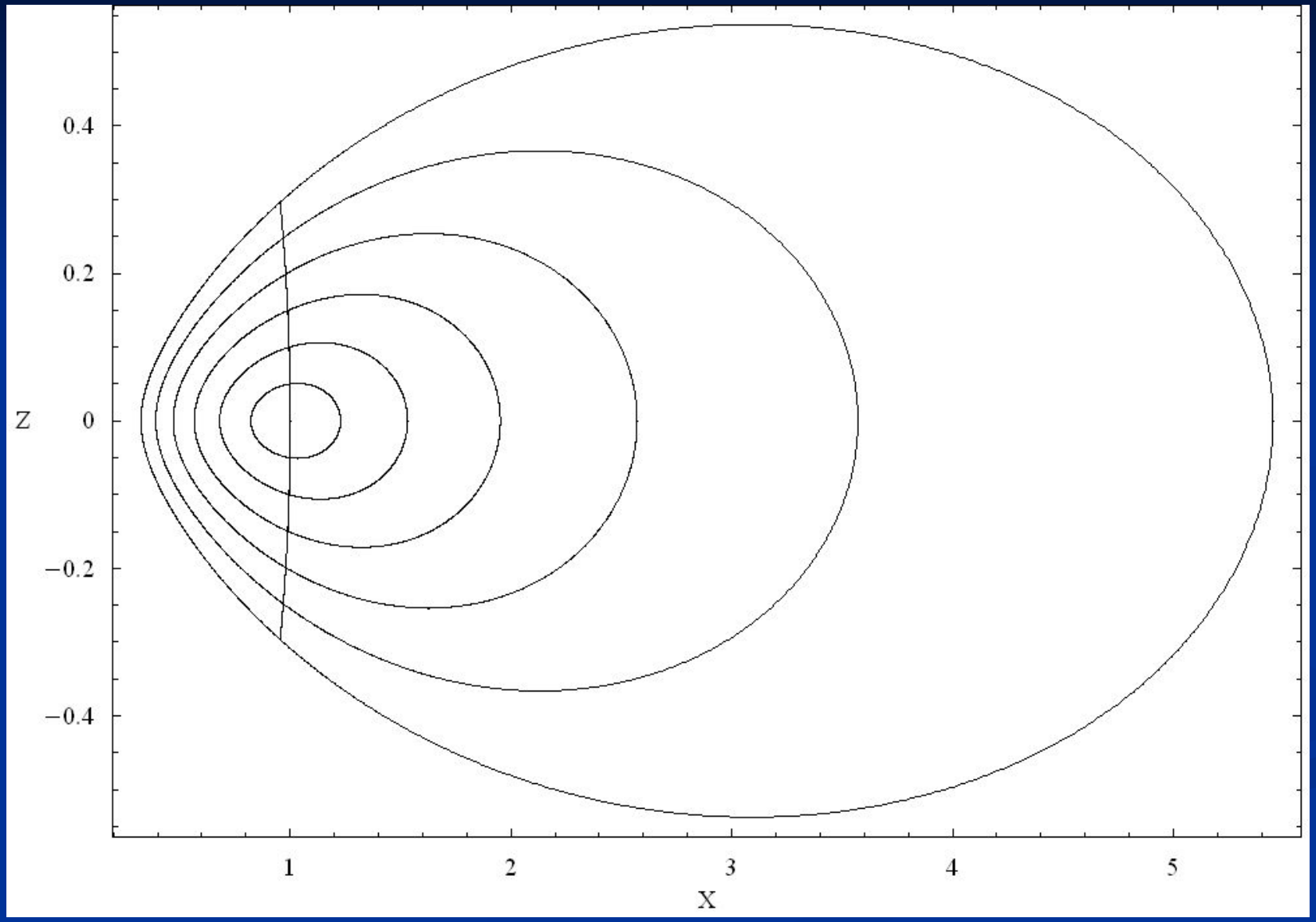
$$h_6 = (4+3s^2) + cs(2-s^2) - c^2(1+2s^2) - c^3 s, \quad s = \sin\theta$$

Общий вид кривых

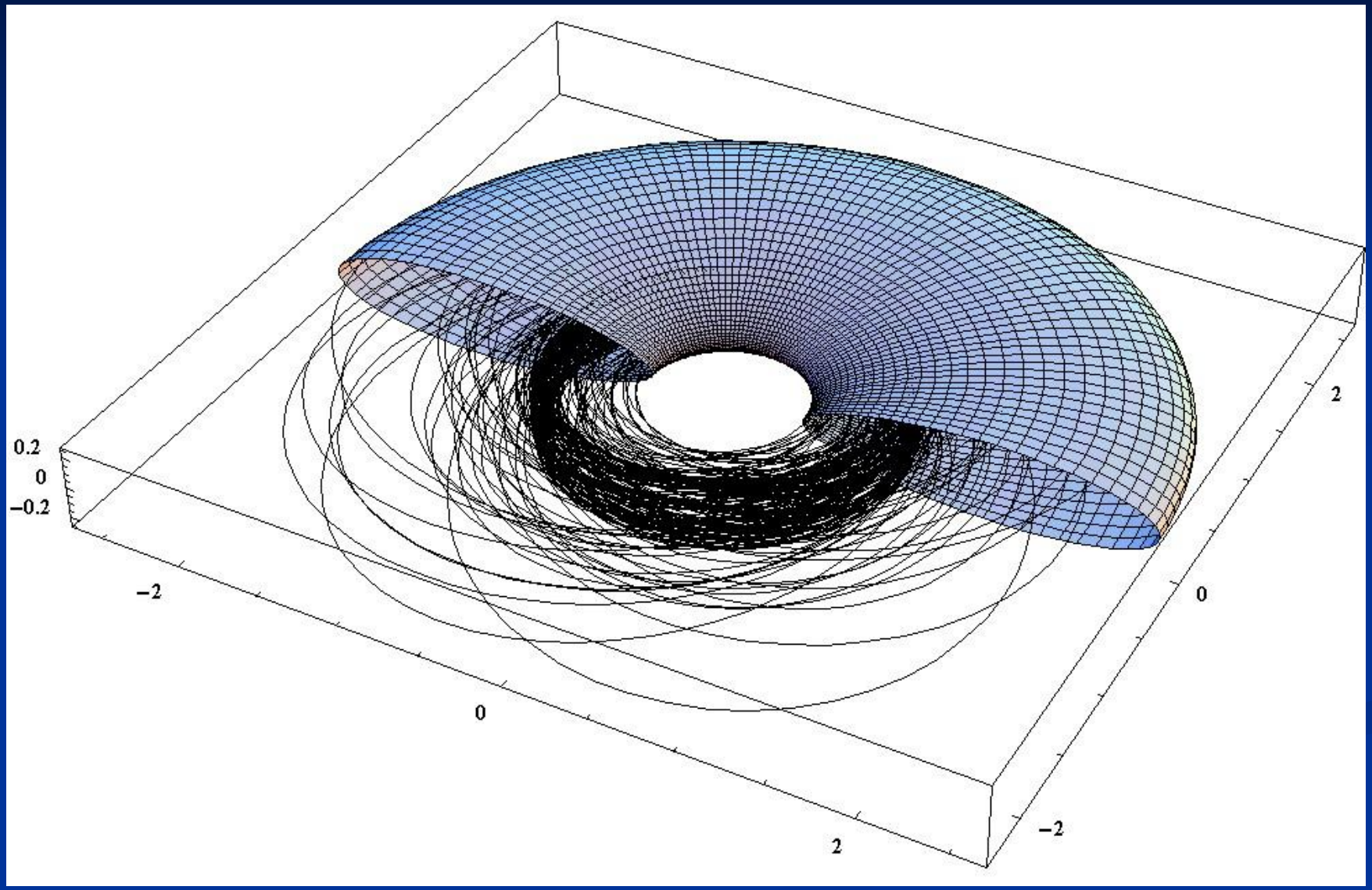



0.36
0.34
0.32
0.3
0.28
0.26
0.24
Z
0.8
0.85
0.9
0.95
1
1.05
1.1
1.15
X
B6
S7
B10
S*8
B13
S2
S10
B2
B5
S4
S6
S0
S9
B9

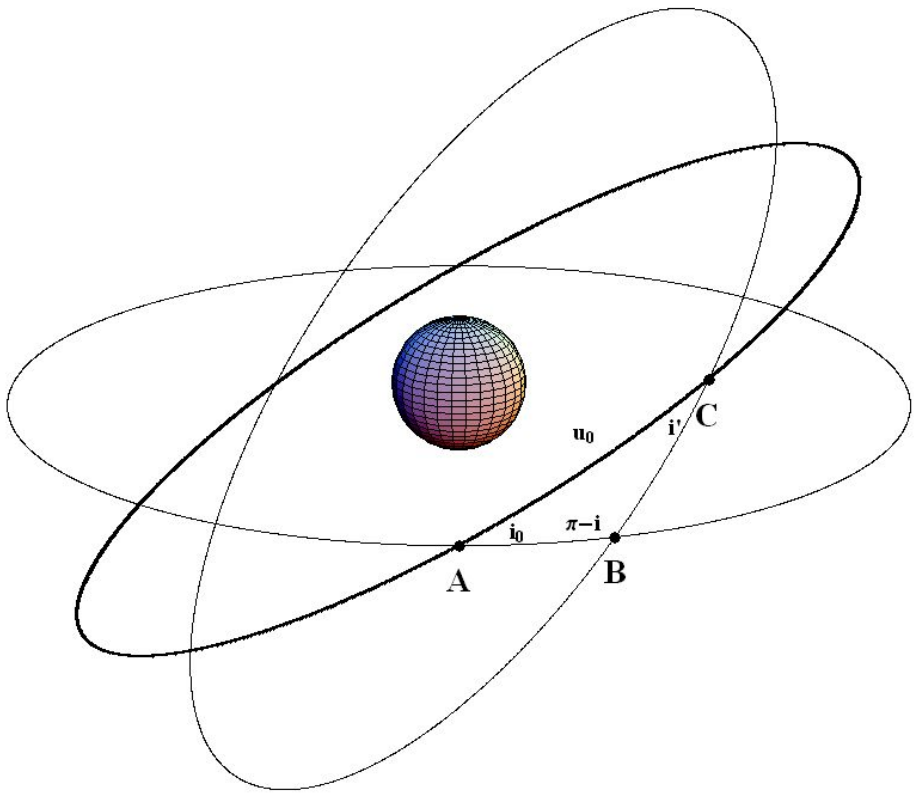
Свойство вложенности



Огибающая в пространстве



Возмущенные орбиты; произвольный наклон;



$$p = A^2 = (1 + c\sin\theta\sin\lambda)^2 + c^2\cos^2\theta,$$

$$a = \frac{1}{1 - 2c\sin\theta\sin\lambda - c^2},$$

$$e^2 = (A^2 - 1)^2 + A^2c^2\sin^2\theta\cos^2\lambda,$$

$$\cos i' = \frac{1 + c\sin\theta\sin\lambda}{A}, \quad \sin i' = \frac{c\cos\theta}{A}.$$

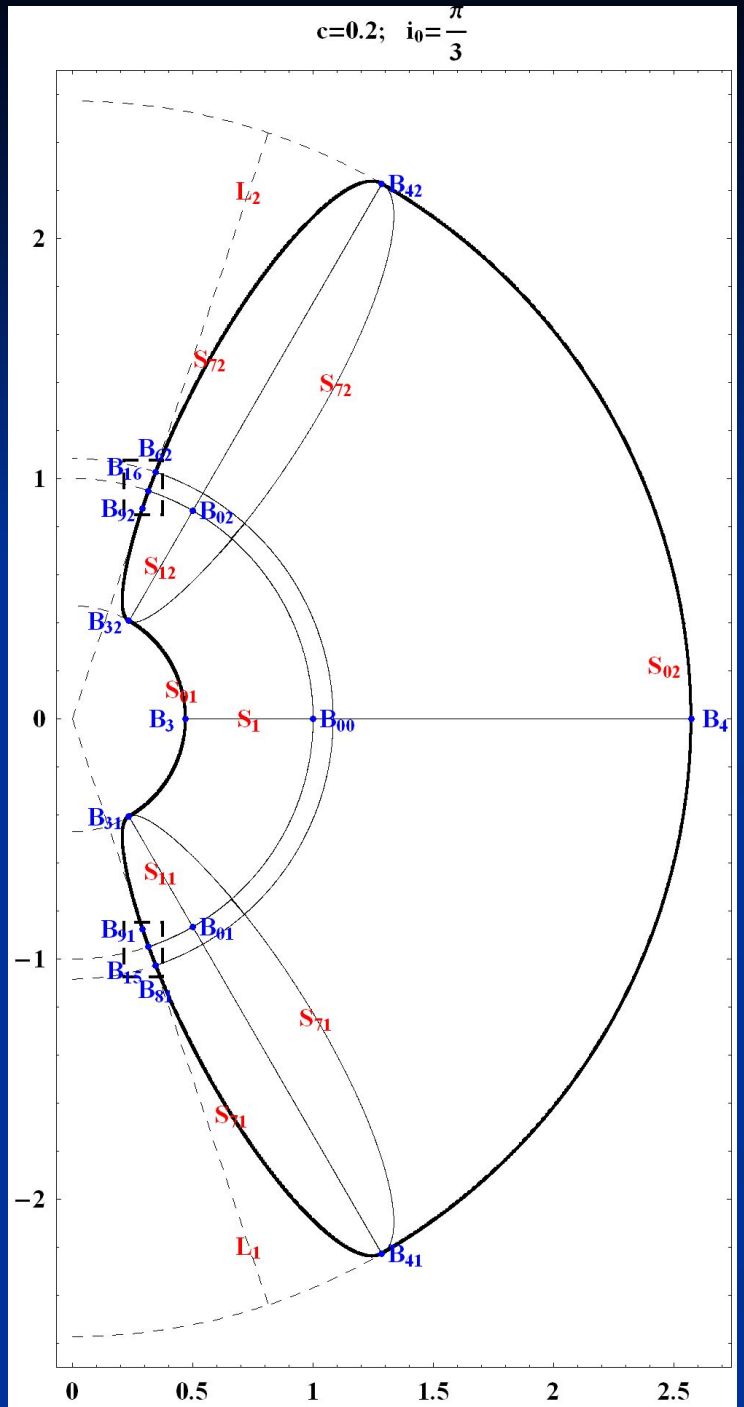
$$\cos i = \cos i_0 \cos i' - \sin i_0 \sin i' \cos u_0 \,.$$

$$i = i_0 + i' \sin d,$$

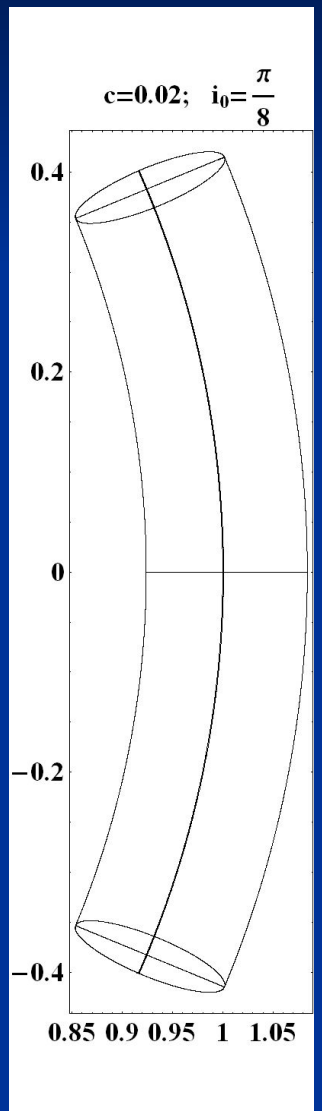
Возмущенные орбиты; произвольный наклон;

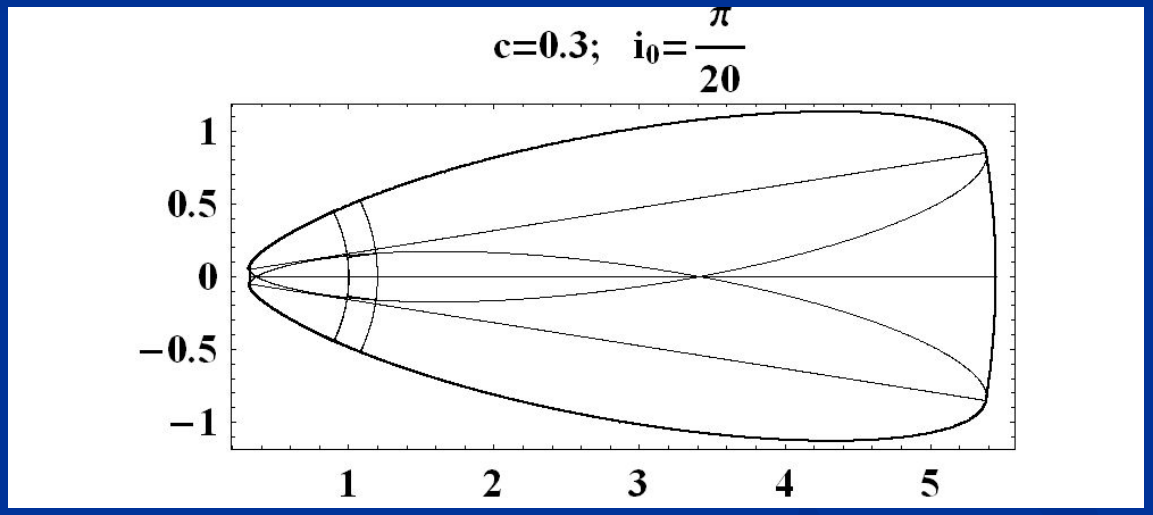
Метод используемый для поиска решений аналогичен методу в главе 2.

Система уравнений несколько усложняется, что приводит к появлению дополнительных кривых.

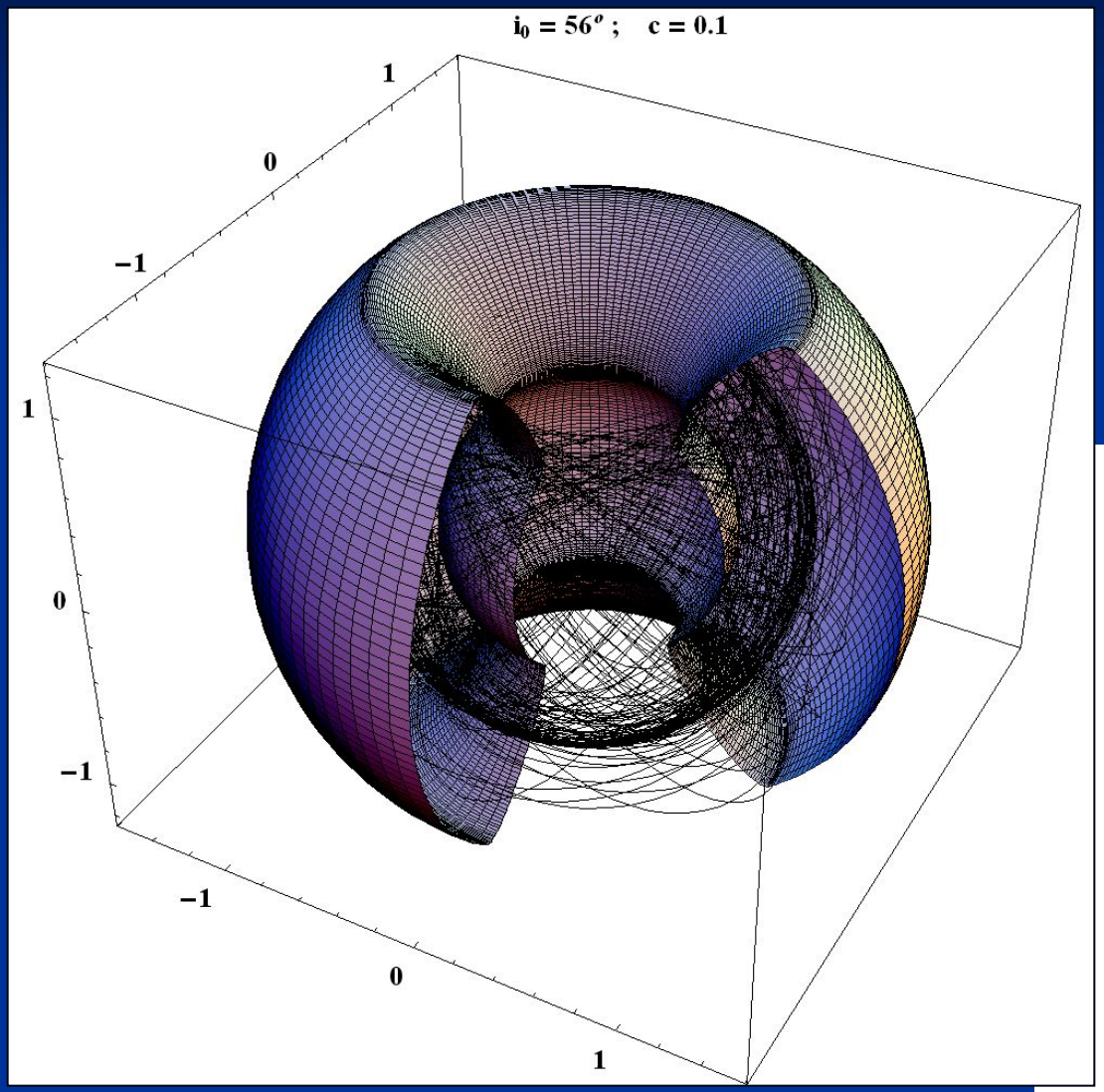

c=0.2; $i_0=\frac{\pi}{3}$
L_2
B_{42}
S_{72}
S_{72}
B_{62}
B_{16}
B_{92}
B_{02}
S_{12}
B_{32}
S_{02}
S_{01}
B_3
S_1
B_{00}
B_4
B_{31}
S_{11}
B_{91}
B_{01}
B_{15}
B_{81}
S_{71}
S_{71}
L_1
B_{41}
2
1
0
−1
−2
0
0.5
1
1.5
2
2.5

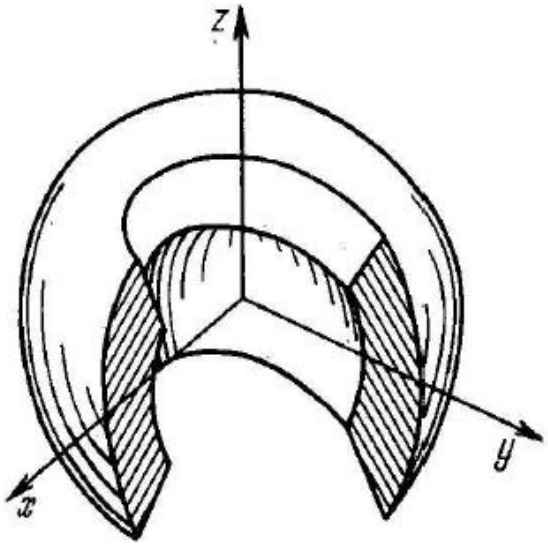
Возмущенные орбиты; произвольный наклон;



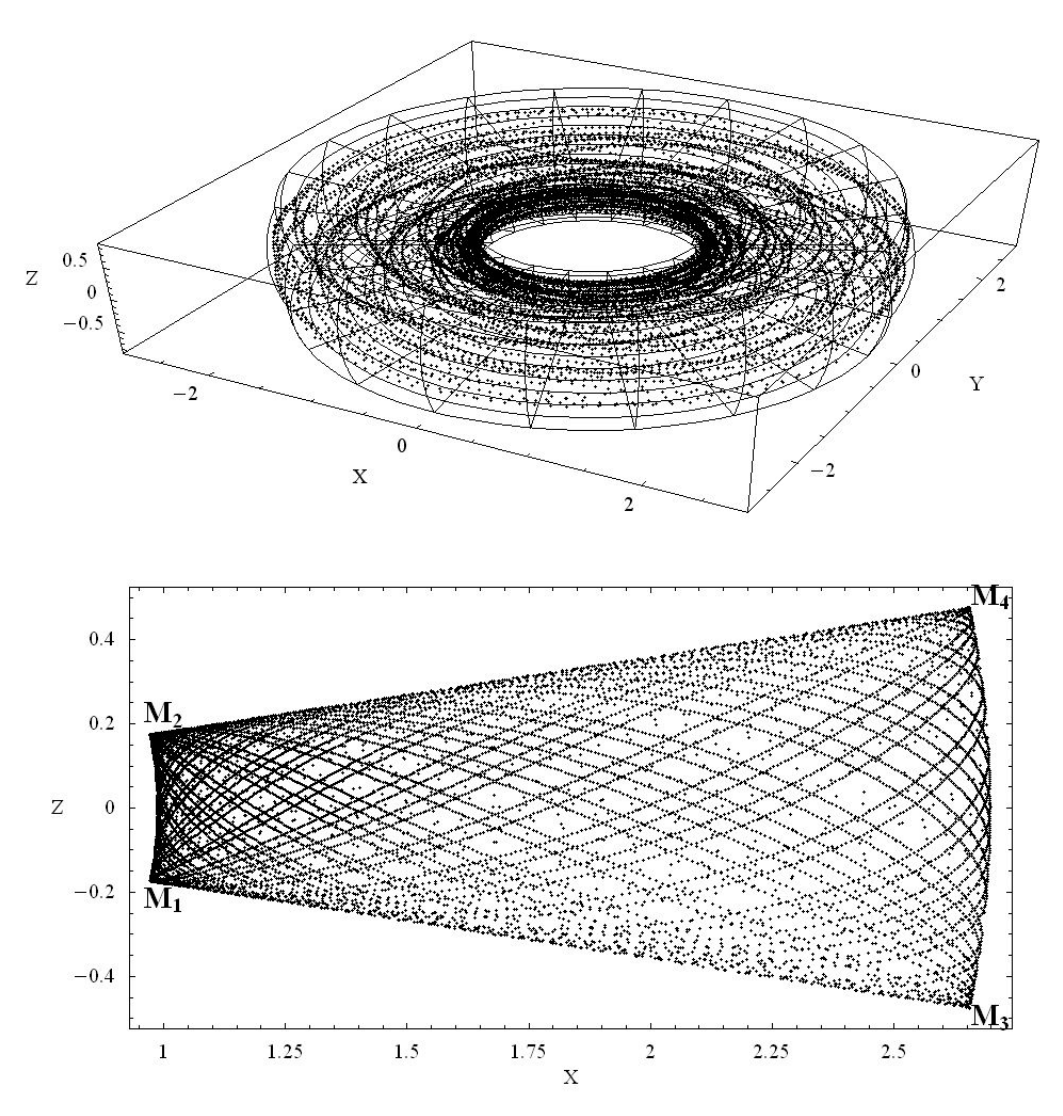


Возмущенные орбиты; произвольный наклон;

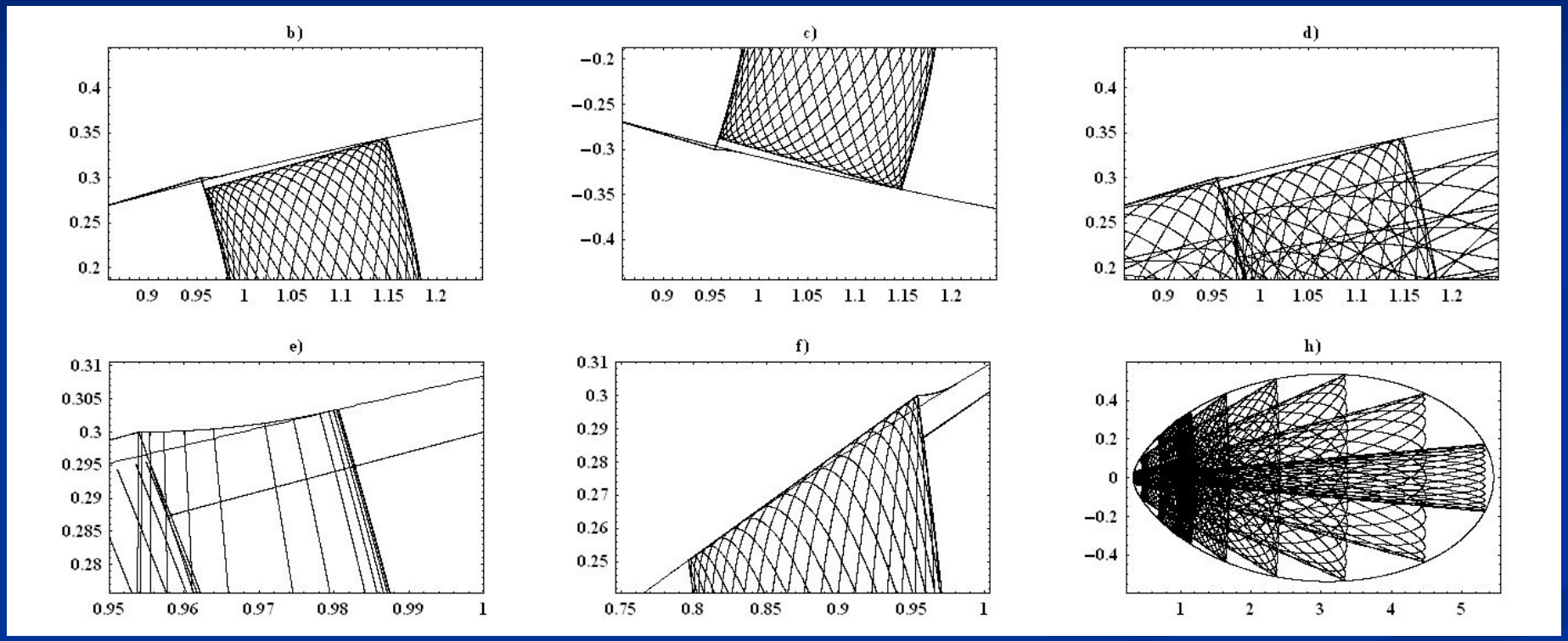




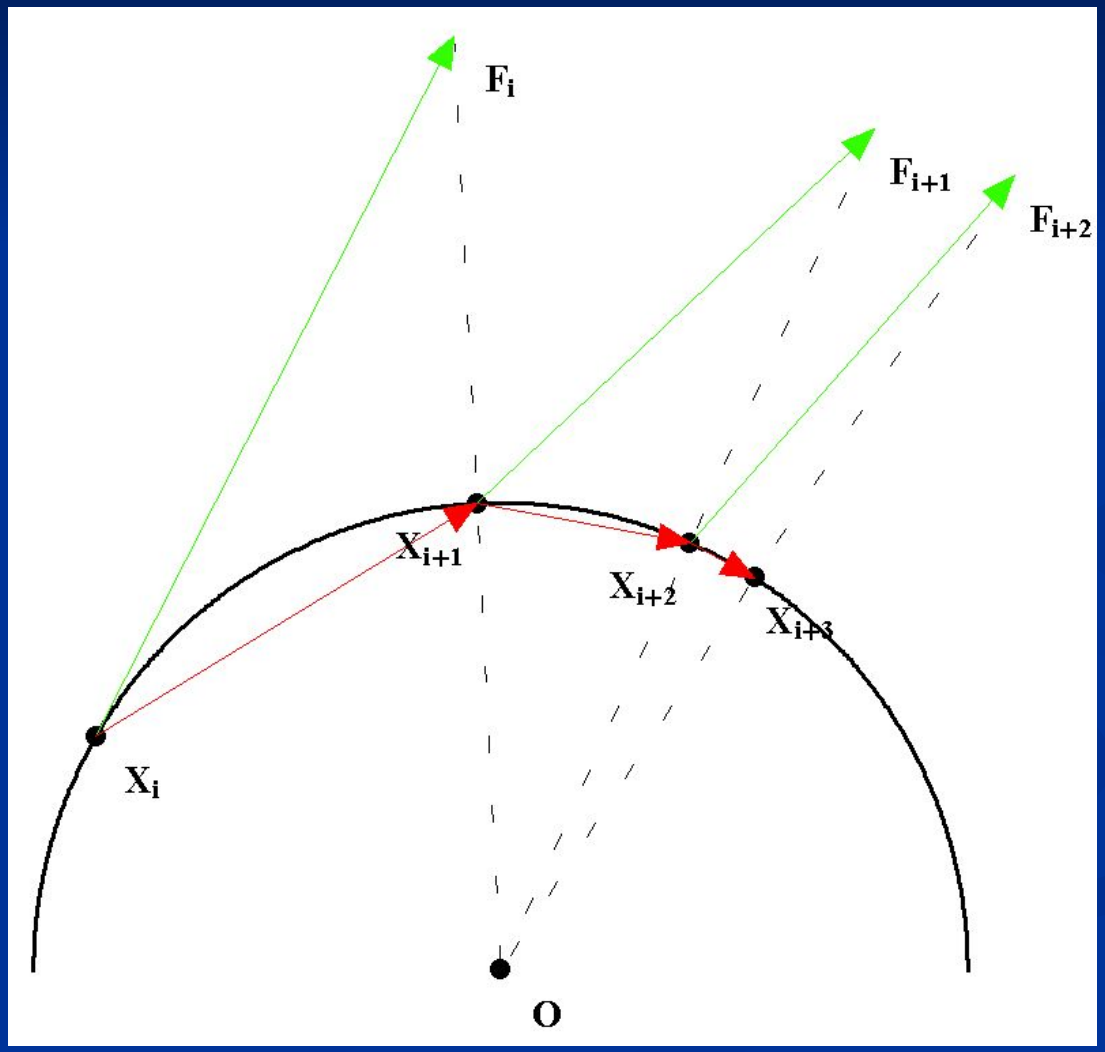
Численные эксперименты. Ящик орбиты



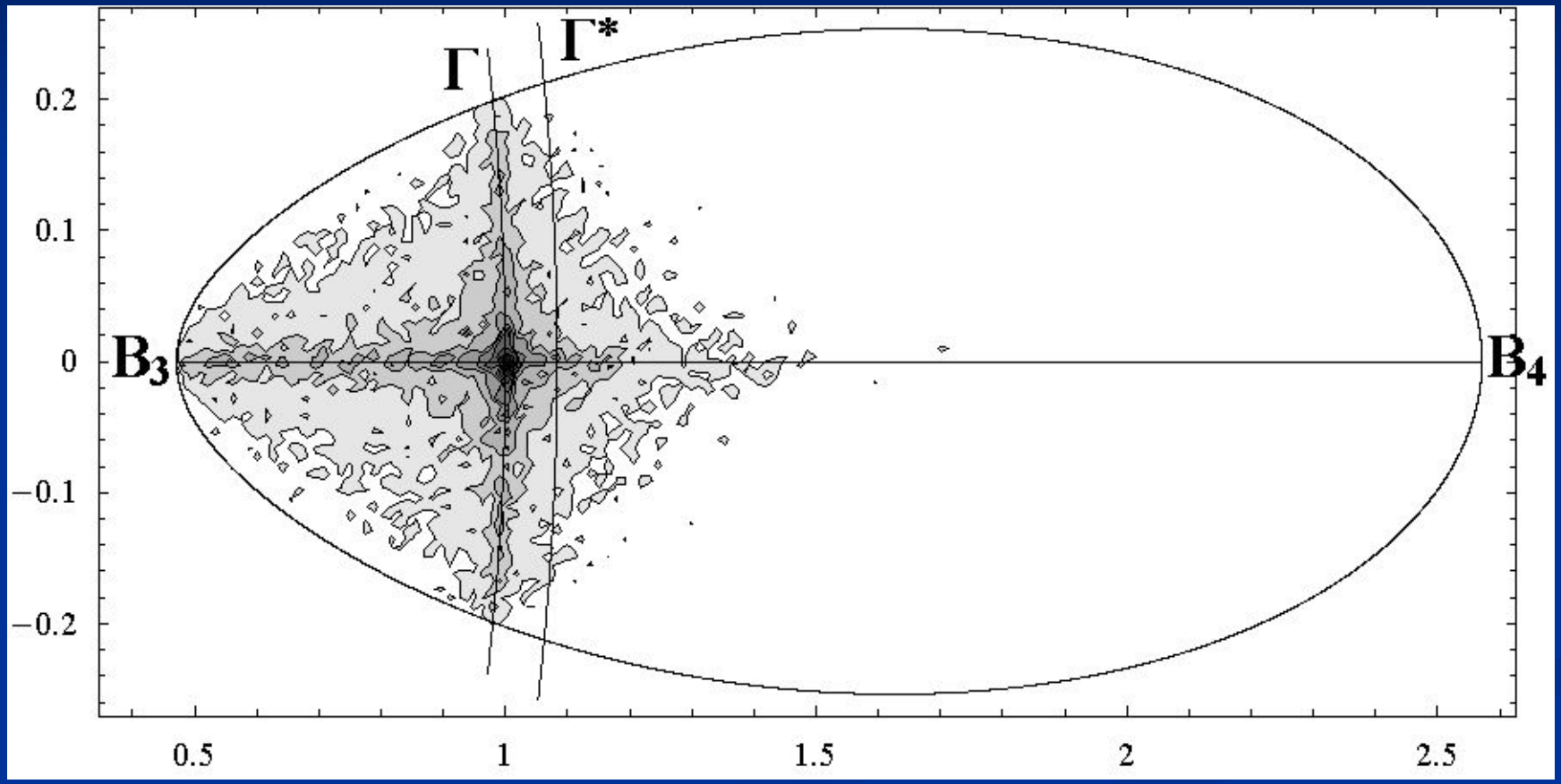
Численные эксперименты. Касание кривых орбитами



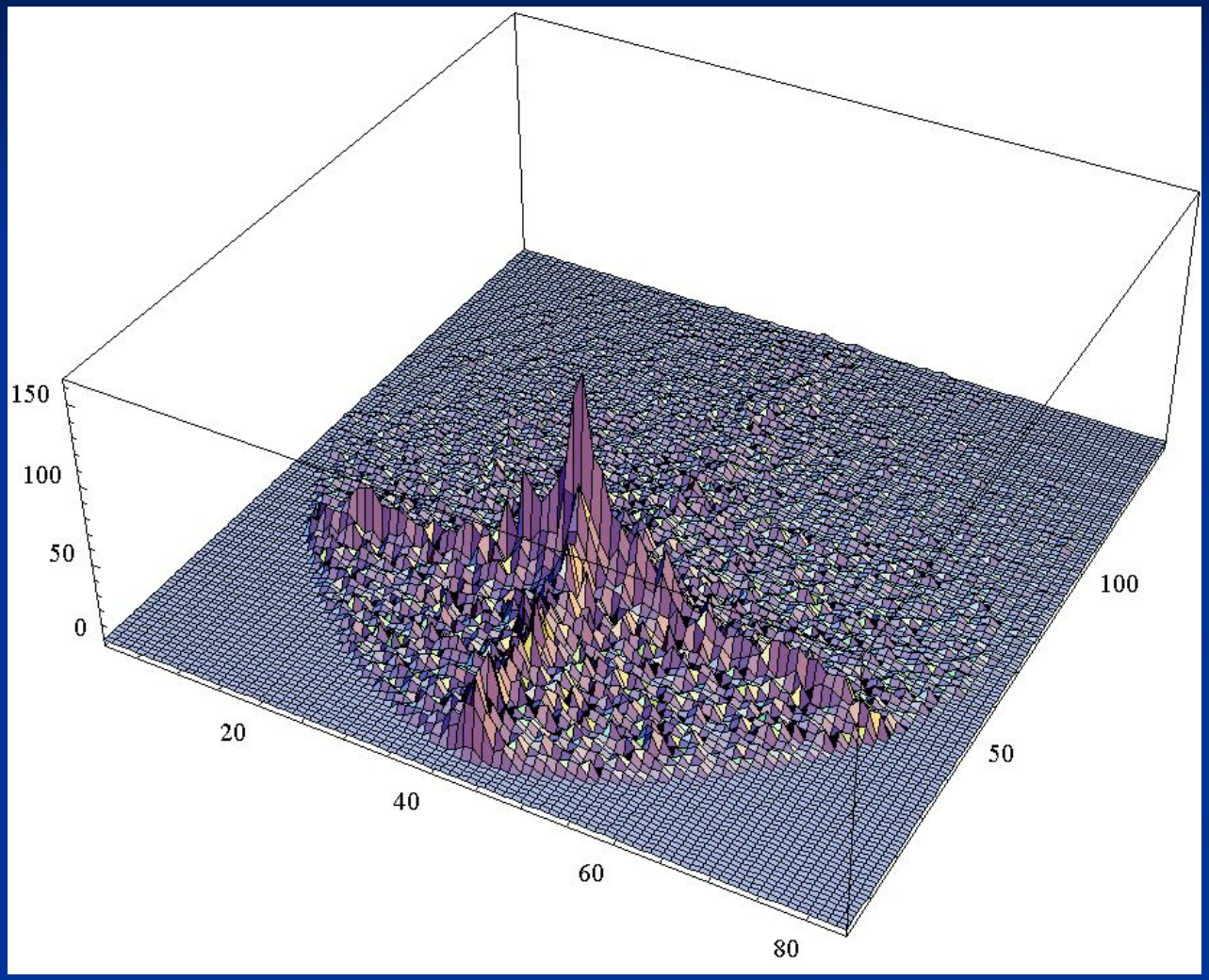
Численные эксперименты. Схема получения равномерного распределения точек по сфере



Численные эксперименты. Концентрация частиц в профиле



Численные эксперименты. Концентрация частиц в профиле



Положения, выносимые на защиту

- Создан метод поиска границы, как огибающей семейства траекторий;
- Найдена граница в трех классах задач и исследованы ее топологические и геометрические свойства;
- Исследованы форма и динамика пылевого комплекса на начальном этапе разлета и в процессе эволюции;

Благодарю за внимание

Литература

Собственные публикации