Точки и линии, связанные с треугольником

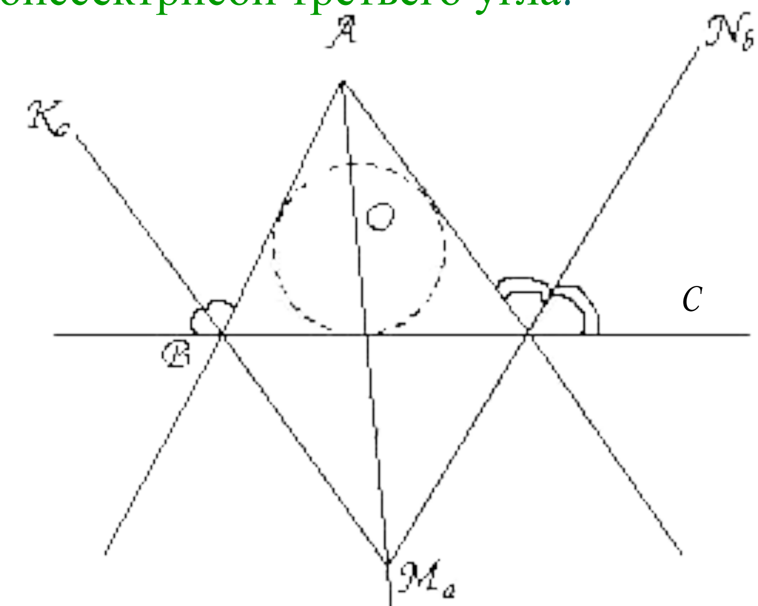
Цель моей работы изучить более подробно, чем это сделано в школьном курсе произвольный треугольник и самые знаменитые, связанные с ним точки и линии.

В моей работе рассматривается ряд теорем и приведены все доказательства. Сегодня я перечислю основные факты и докажу одну из самых интересных, на мой взгляд, теорему.

О биссектрисах внешних углов

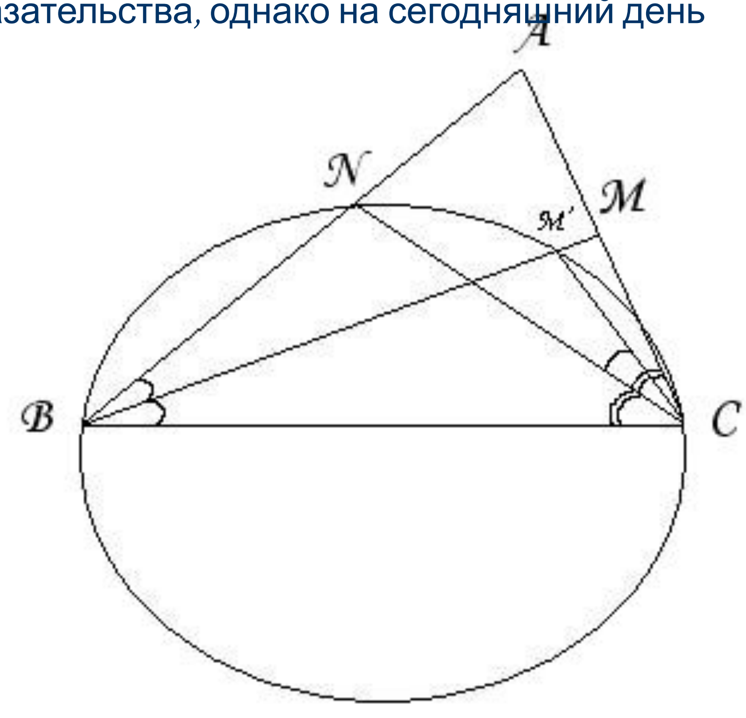
Начала я изучение треугольника с известных всем линий – биссектрис углов. В геометрии рассматриваются как биссектрисы внутренних углов треугольника, так и внешних. Уже семиклассникам известно, что биссектрисы внутренних углов треугольника конкурентны, т. е. пересекаются в одной точке. Как же обстоит дело с внешними биссектрисами?

Оказывается, что внешние биссектрисы любых двух углов треугольника конкурентны с внутренней биссектрисой третьего угла.



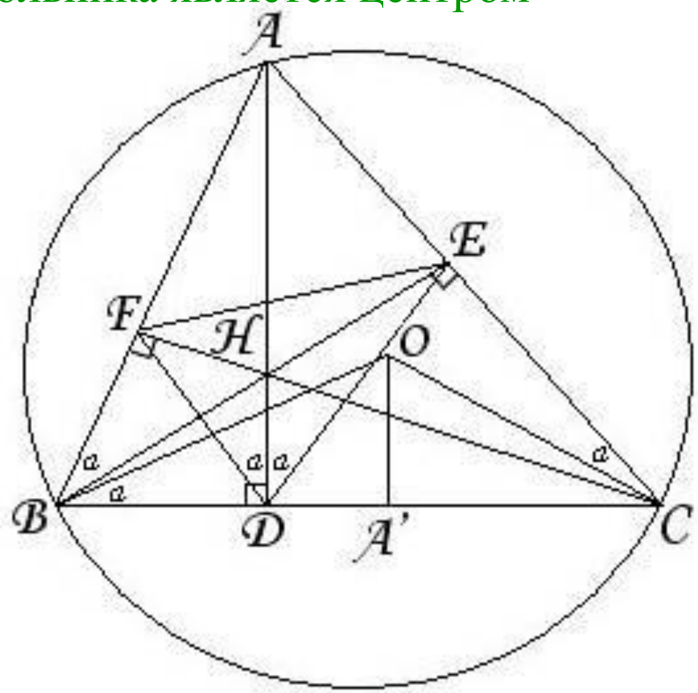
Теорема Штейнера-Лемуса

Кроме того оказалось, что любой треугольник, у которого равны длины биссектрис двух углов (измеряемые от вершины до противоположной стороны) является равнобедренным. Это теорема носит имя Штейнера-Лемуса. Она сотни лет считалась трудной для доказательства, однако на сегодняшний день она доказана.



Ортотреугольник

Другие знаменитые линии треугольника – его высоты. Их тоже изучают в школьном курсе. Все высоты конкурентны и их общая точка называется ортоцентром. Треугольник, вершинами которого являются основания высот исходного треугольника, называется ортотреугольником. Поэтому следующее, что я изучала был ортотреугольник. Я выяснила, что ортоцентр остроугольного треугольника является центром окружности, вписанной в его ортотреугольник.

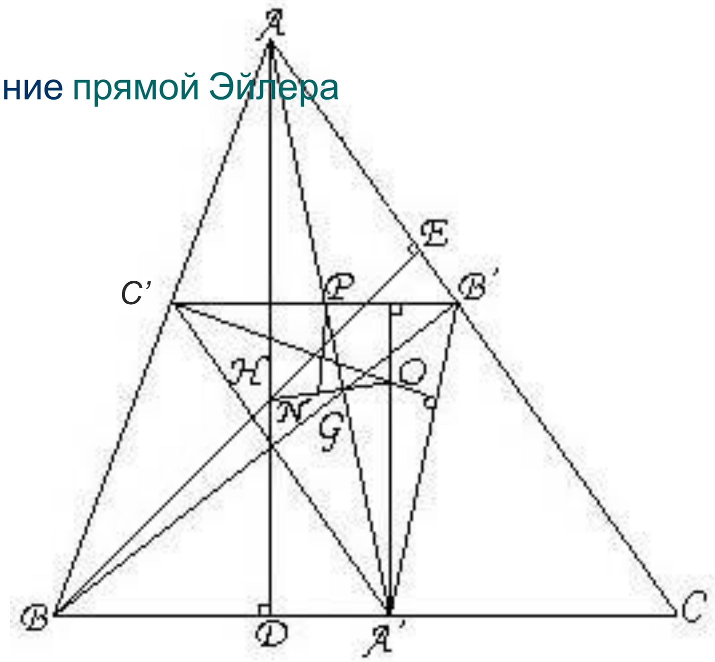


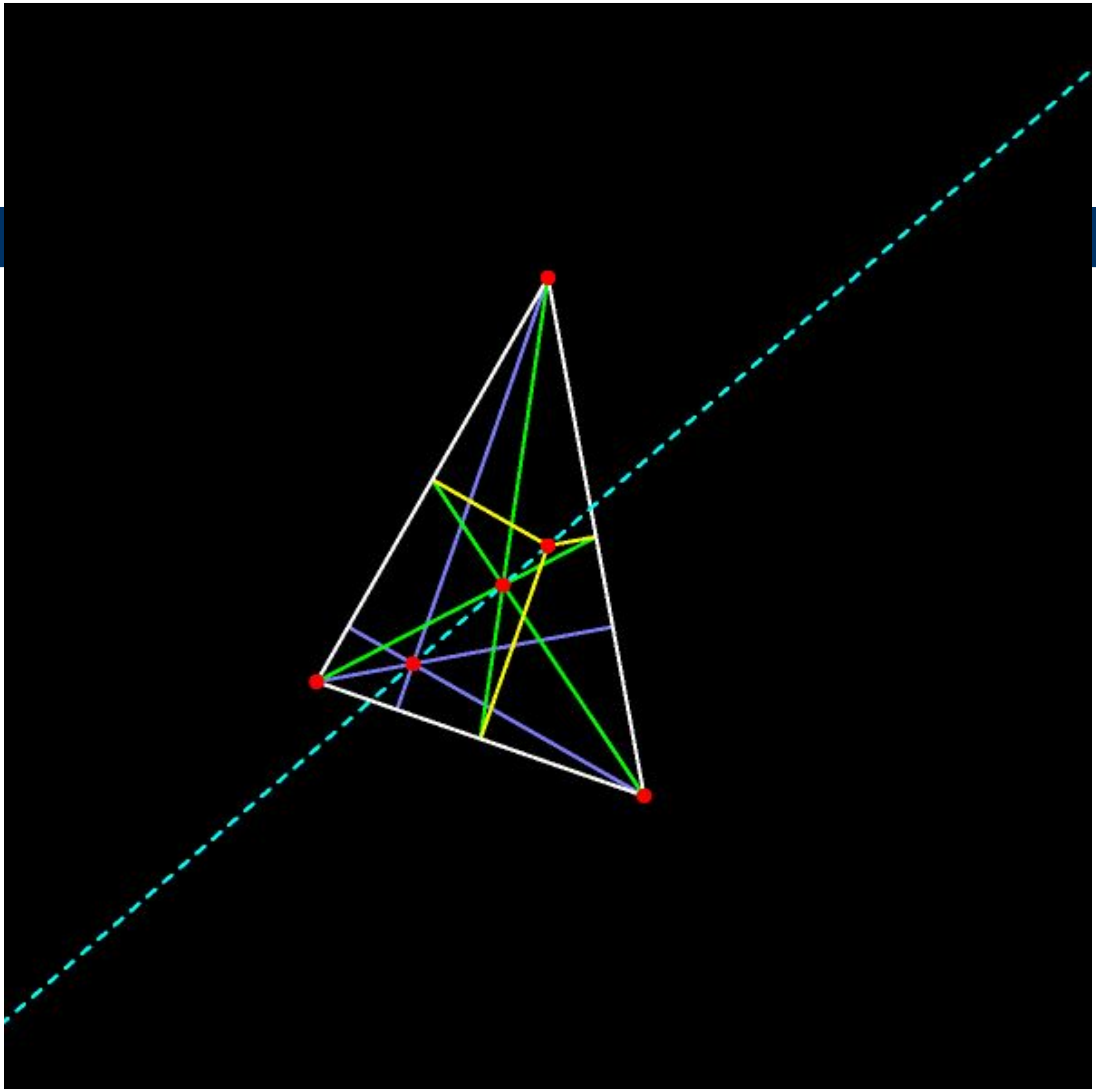
Прямая Эйлера

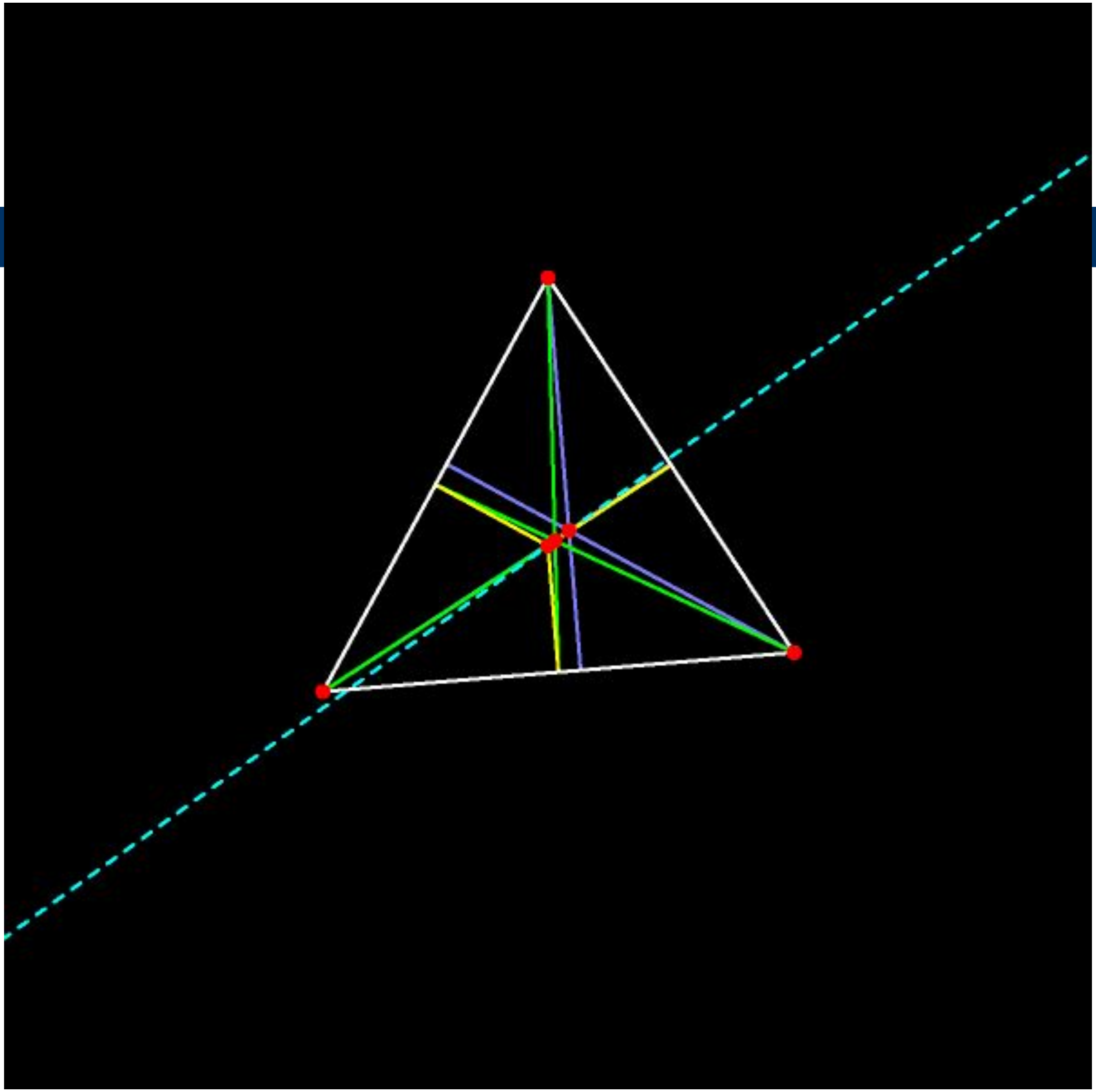
Третья знаменитая линия треугольника - медиана. Как известно все три медианы тоже конкурентны, их общая точка называется центроидом.

В моей работе доказано, что ортоцентр, центроид и центр описанной окружности произвольного треугольника лежат на одной прямой. Причем центроид делит расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности в отношении 2:1.

Прямая же, на которой лежат эти три точки, носит название прямой Эйлера этого треугольника.

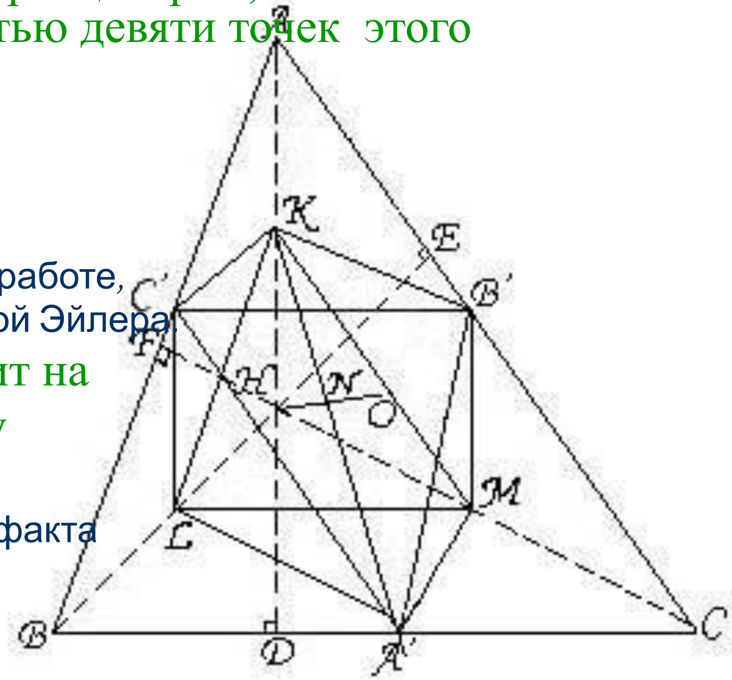






Окружность девяти точек

Кроме того, известен и другой замечательный факт: основания трех высот произвольного треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат все на одной окружности, называемой окружностью девяти точек этого треугольника.



Последний вопрос, который я изучила и отразила в своей работе, связан с расположением окружности девяти точек и прямой Эйлера.

Доказано, что центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точно в середине отрезка, между ортоцентром и центром описанной окружности.

Доказательство этого самого интересного, на мой взгляд, факта я сейчас и приведу.

Так как три точки *K, L, M* диаметрально противоположны точкам *A', B', C'*, то каждый из двух треугольников *KLM* или *A'B'C'* может быть получен из другого поворотом на 180^o вокруг центра этой окружности. Очевидно, что этот поворот, который меняет местами эти два равных треугольника, должен так же поменять местами и их ортоцентры *H* и *O*. Следовательно, центром окружности девяти точек является середина отрезка *OH*, которая обозначена точкой *N*. Таким образом, *N* – центр окружности девяти точек.