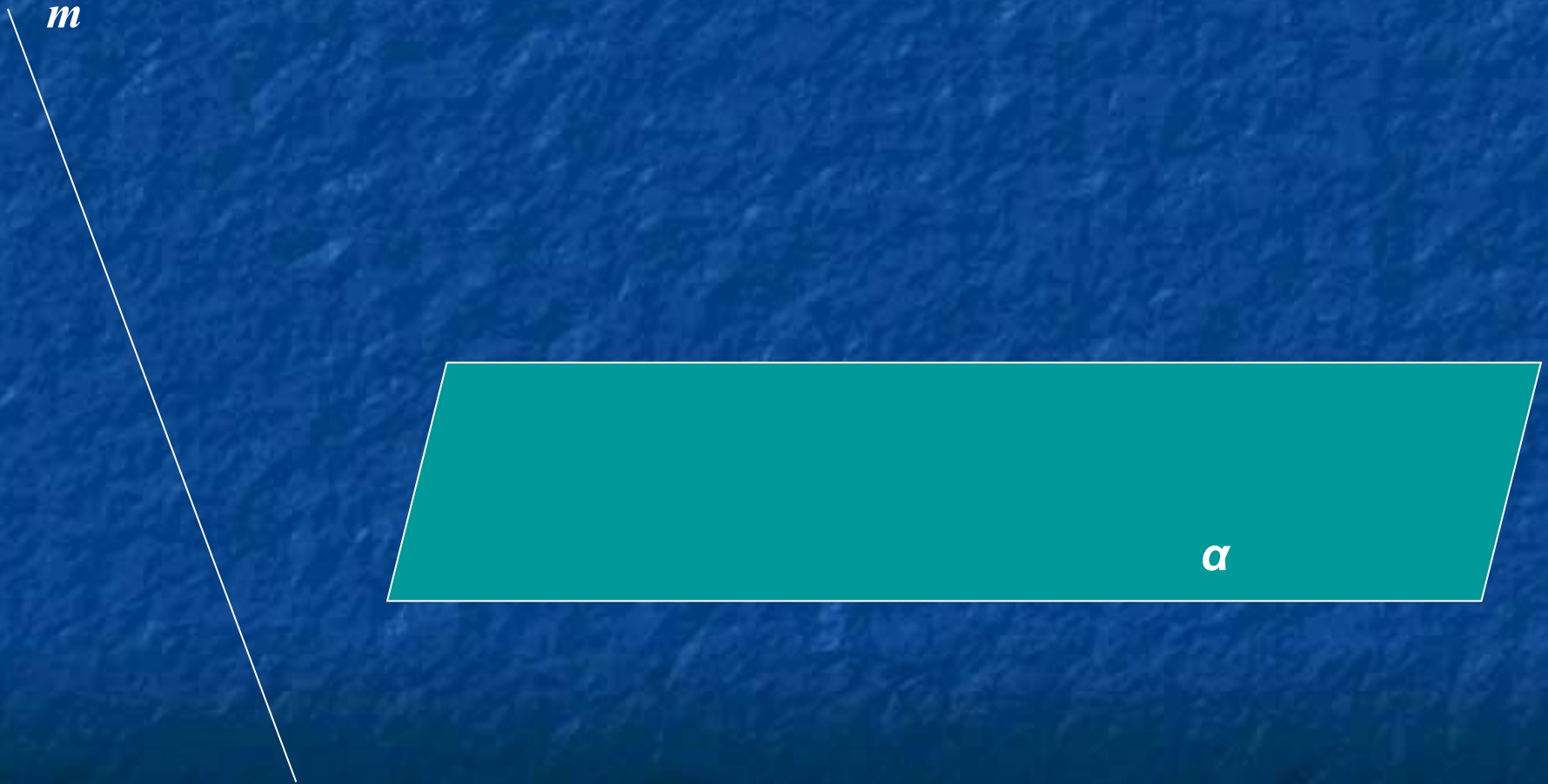


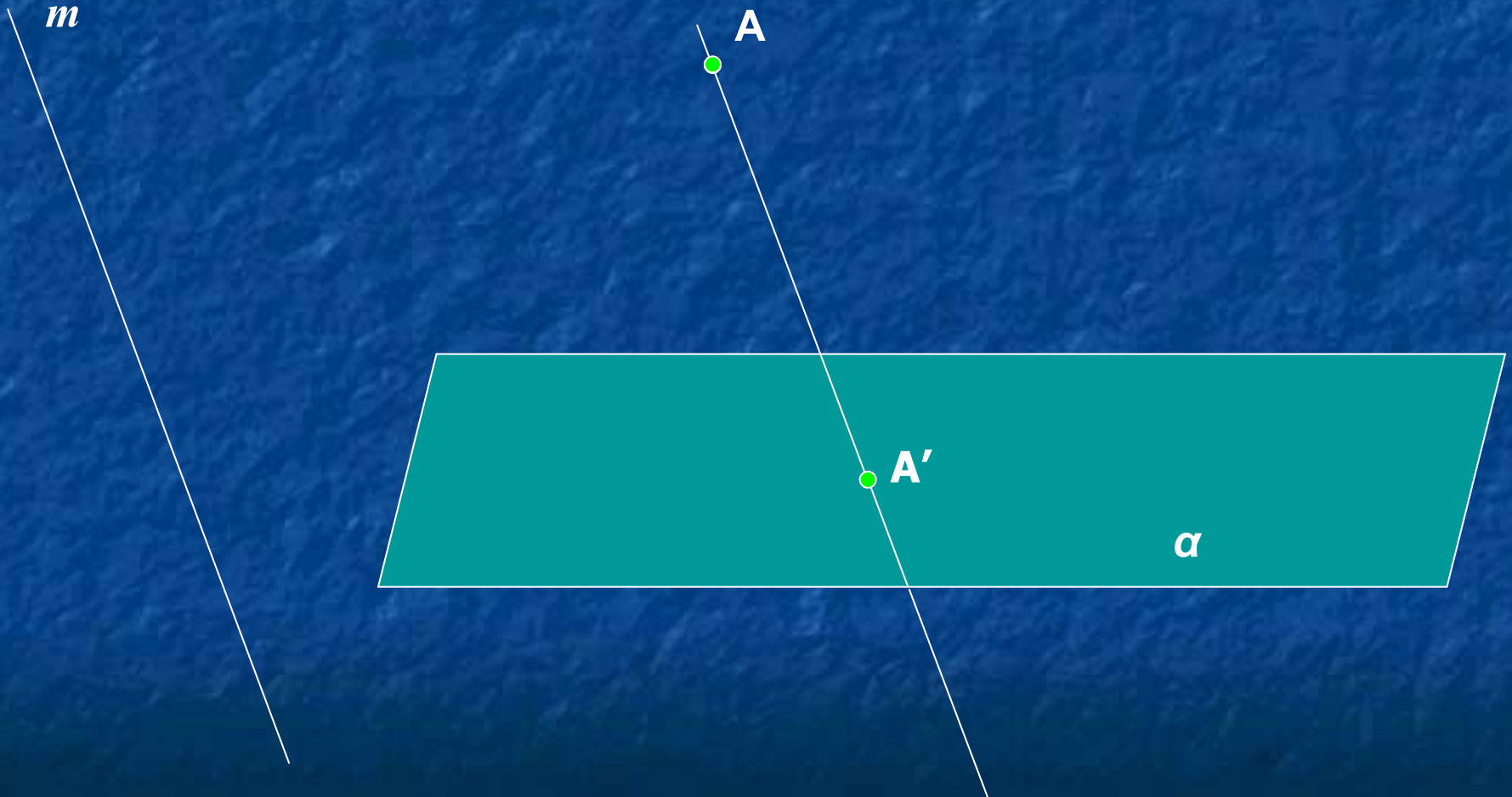
Геометрия, 10 класс

Тема: Построение сечений
многогранников методом
параллельных проекций

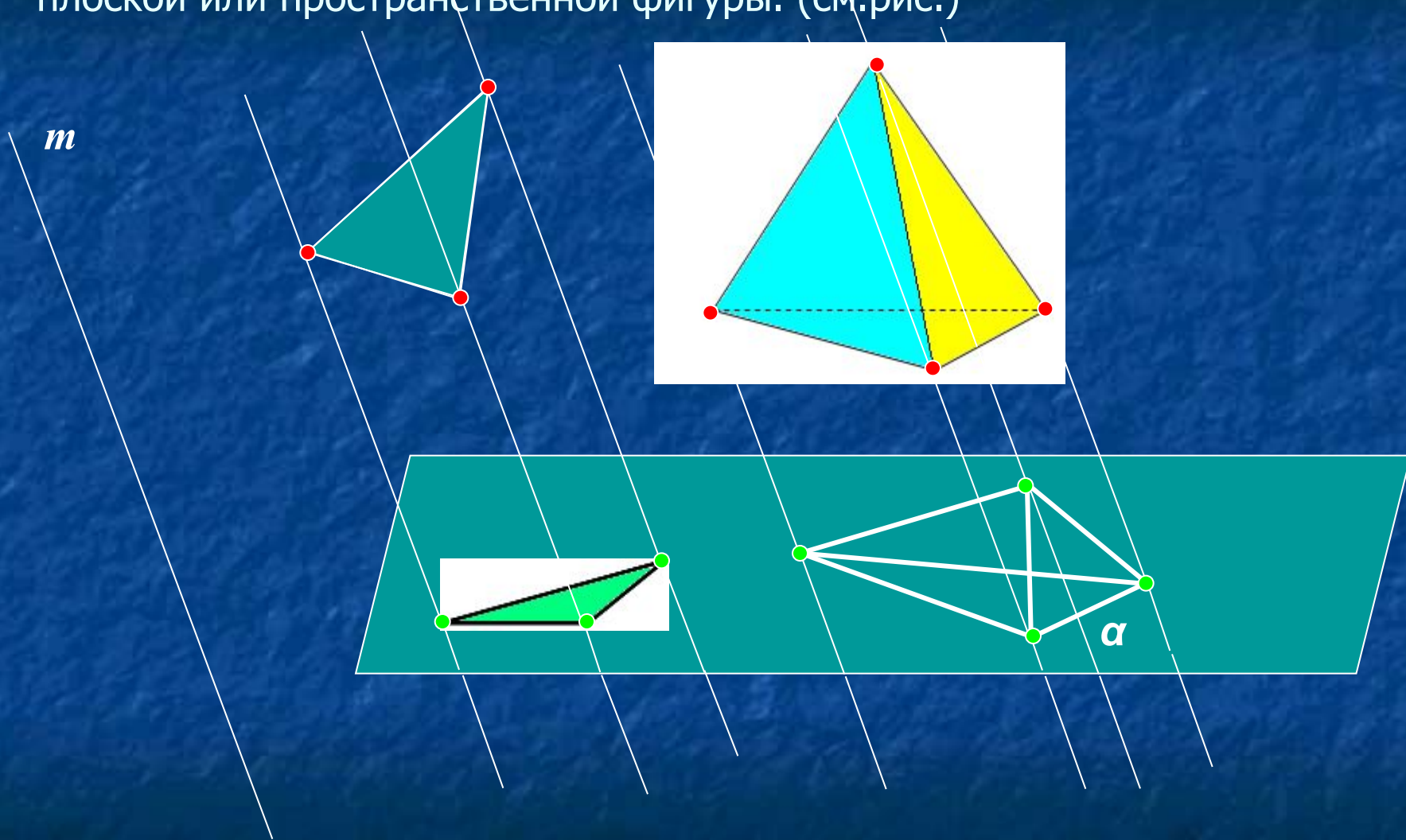
Вспомним, что при параллельном проектировании в пространстве используют такие понятия как: плоскость проекций (любая плоскость α), направление параллельного проектирования (любая прямая $m \perp \alpha$).



Рассматривая любую геометрическую фигуру как множество точек, можно построить в заданной плоскости проекцию данной фигуры. Для этого выбирают любую точку фигуры **A** (*прообраз*) и строят ее параллельную проекцию на плоскость **A'** (*образ*).



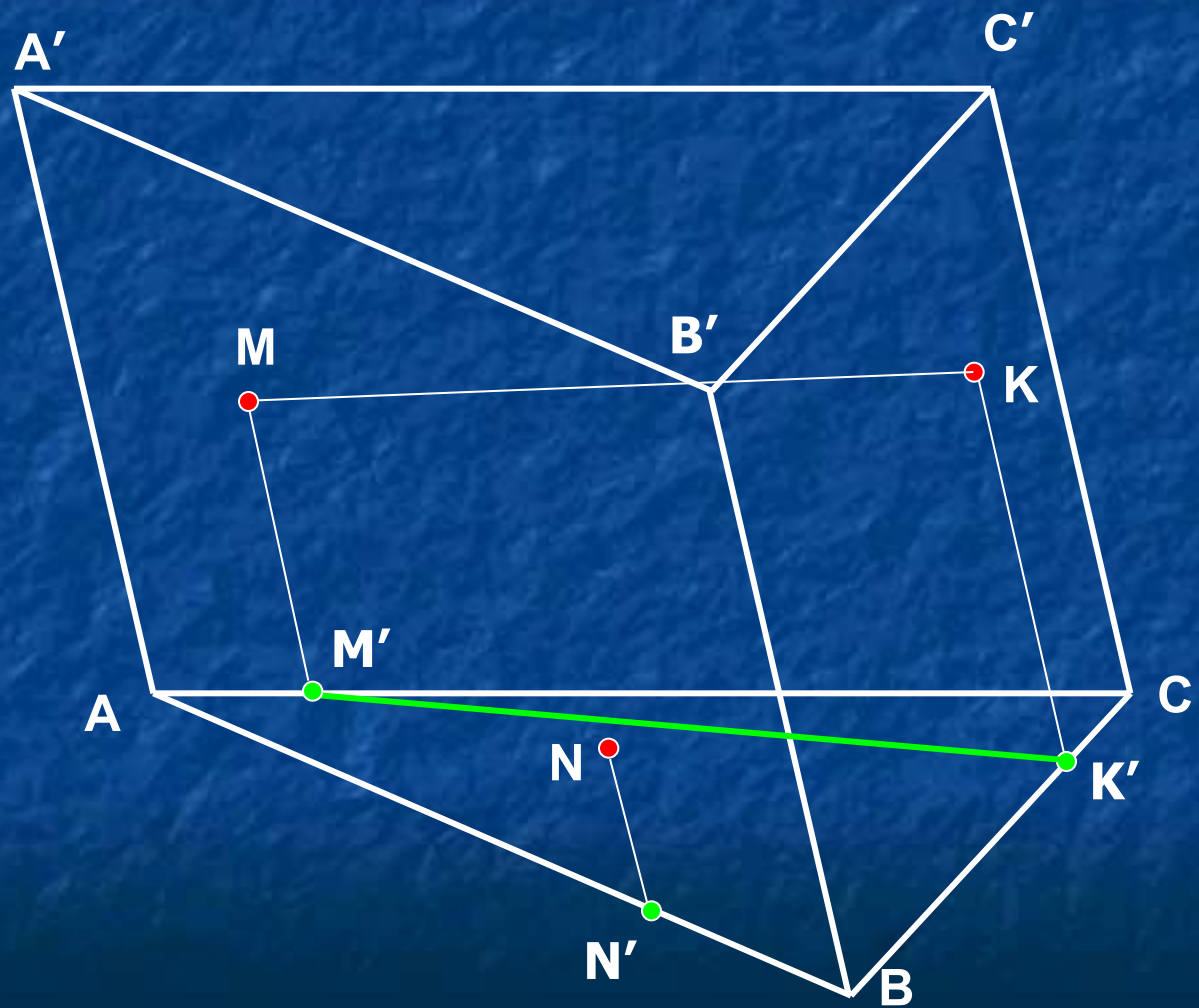
Таким образом можно получить изображение (или «проекцию») любой плоской или пространственной фигуры. (см.рис.)



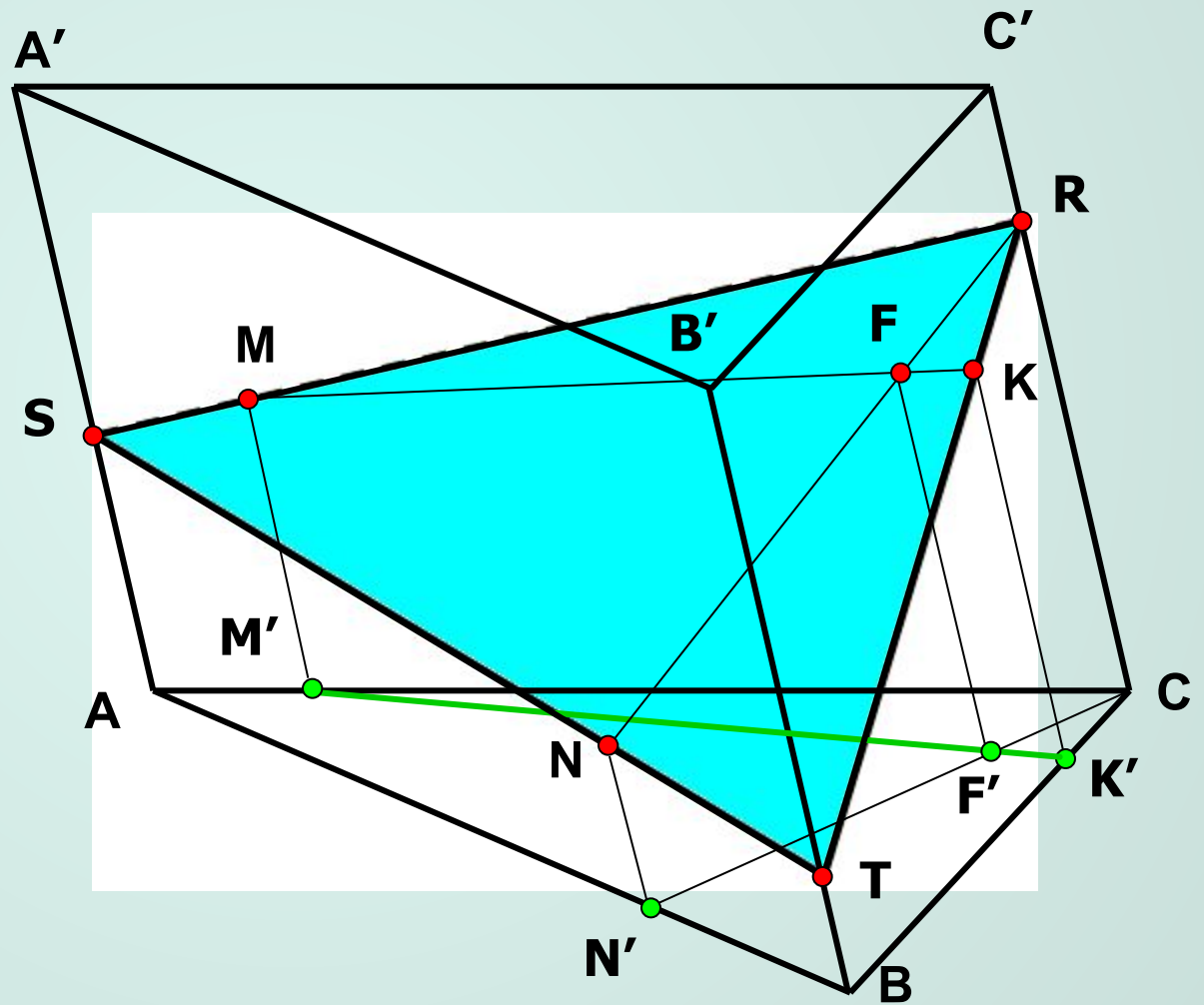
Пример 1. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA'B'C'$, проходящее через точки M , N и K , лежащие в боковых гранях

Решение.

- 1) Построим проекции данных трех точек M , N и K на плоскость основания в направлении, параллельном боковому ребру.
- 2) Соединим две любые данные точки (например, M и K).
- 3) Построим образ полученного в п.2) отрезка MK .



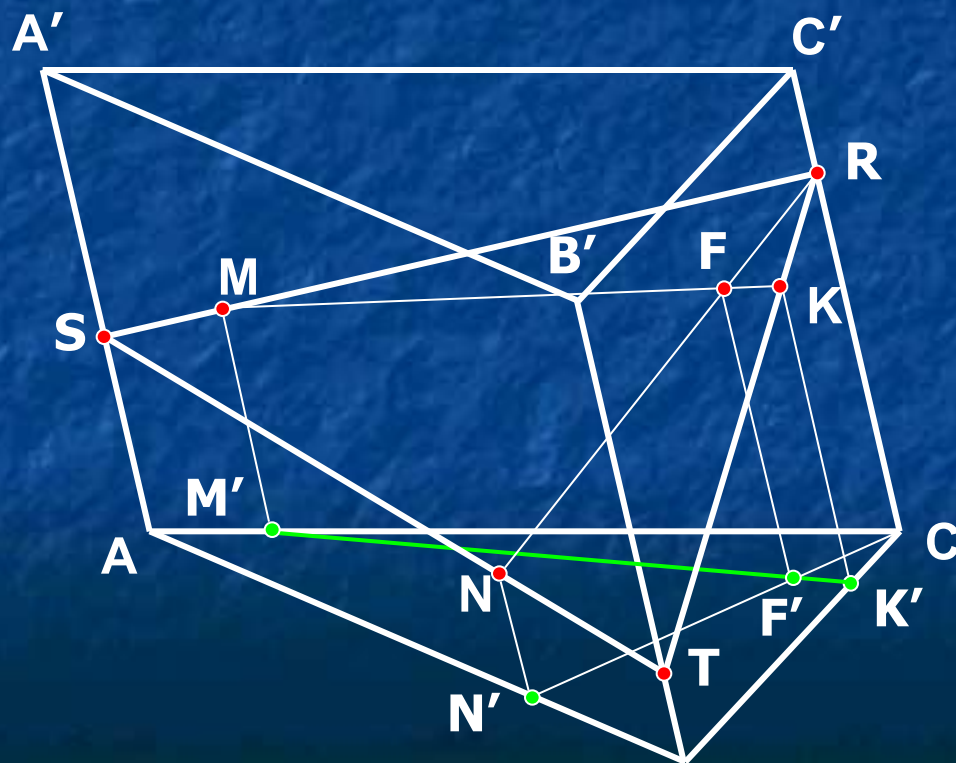
- 4) Соединим отрезком точки N' и C , обозначив буквой F' точку пересечения с отрезком $M'K'$.
- 5) Так как $F' \in M'K'$, то прообраз этой точки $F \in MK$. Построим ее.
- 6) Прямые NN' и CC' лежат в одной плоскости (подумайте почему?). Построим в этой плоскости точку $R = CC' \cap NF$.
- 7) В боковых гранях ACC' и BCC' у нас появились по две точки, принадлежащие сечению, поэтому закончить построение сечения RST нетрудно.



Основной целью применения метода параллельных проекций является получение *дополнительной* точки сечения (обычно на одном из боковых ребер). Для этого можно воспользоваться следующей схемой (пояснения – из примера 1):

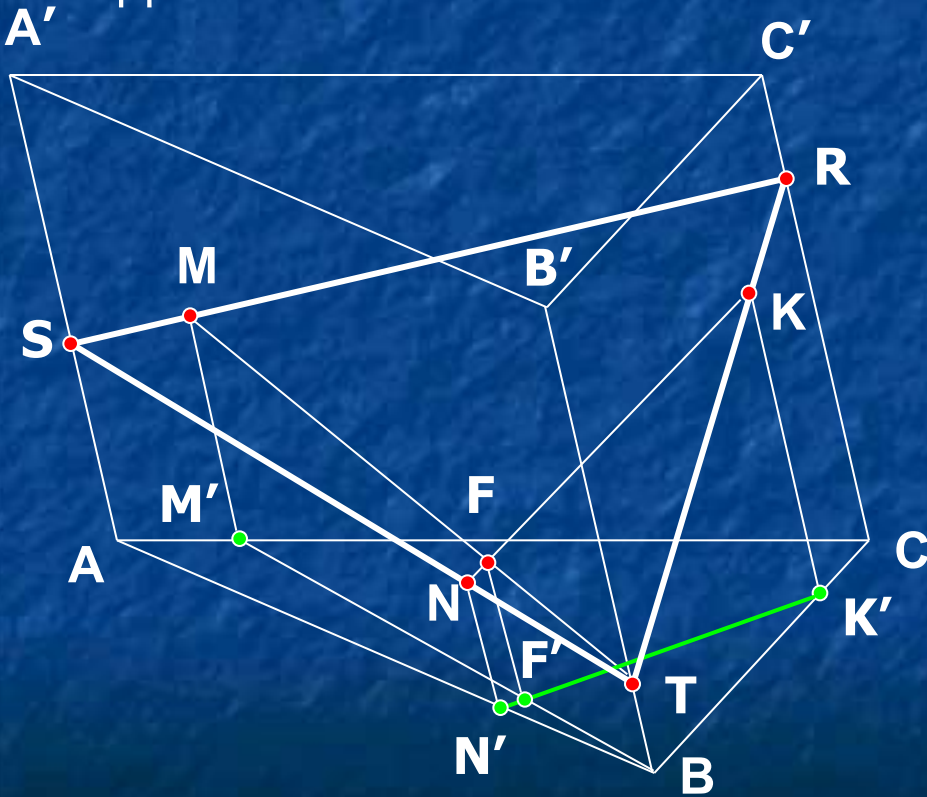
- 1) нужно выбрать любую пару из данных точек сечения; (**М** и **К**)
- 2) построить их проекции на основание призмы; (**М'** и **К'**)
- 3) направление параллельного проектирование выбирается параллельно боковым ребрам; (**AA'**)
- 4) сначала получить образ *вспомогательной* точки в плоскости проекций (для этого привлекают образы данных точек сечения и одну из вершин основания призмы); (точка **F'**, вершина – **С**)
- 5) найти прообраз *вспомогательной* точки; (точка **F**)
- 6) получить *дополнительную* точку сечения; (точка **R**).

Запишите схему в тетрадь!

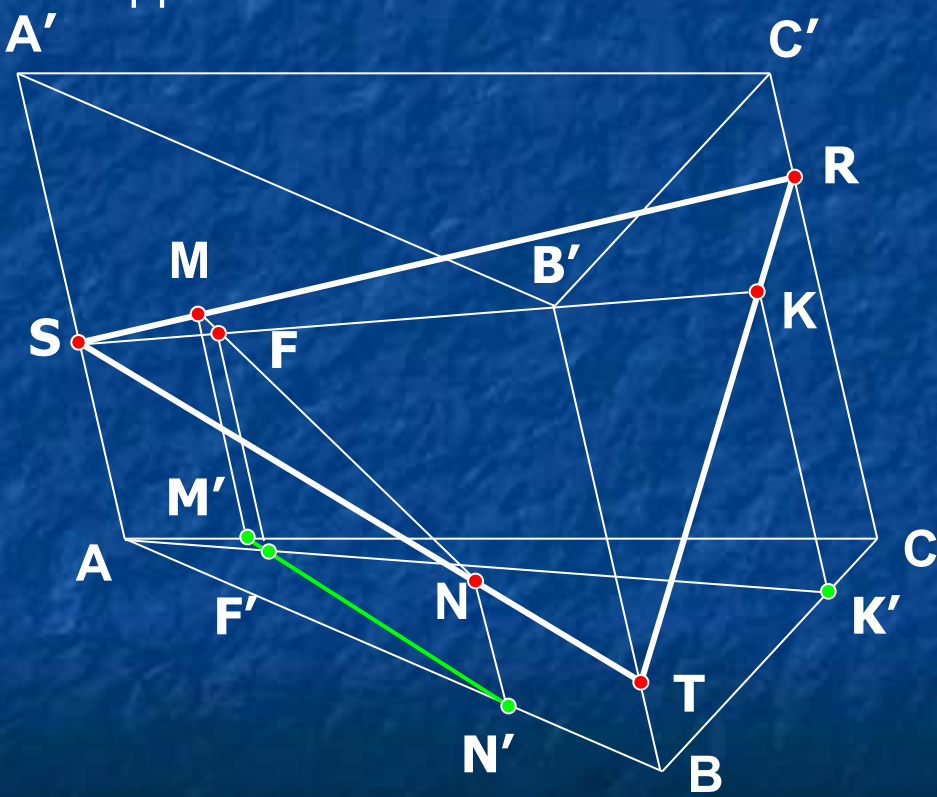


Примечание. Еще раз обратите внимание на термин «любые» в п.2) примера 1. Попробуйте самостоятельно, по схеме, в тетради построить сечение из примера 1, соединяя две другие пары точек: **М** и **Н** или **Н** и **К**. Убедитесь в однозначности получающегося результата (сечение получается таким же).

Дополнительная точка **T**



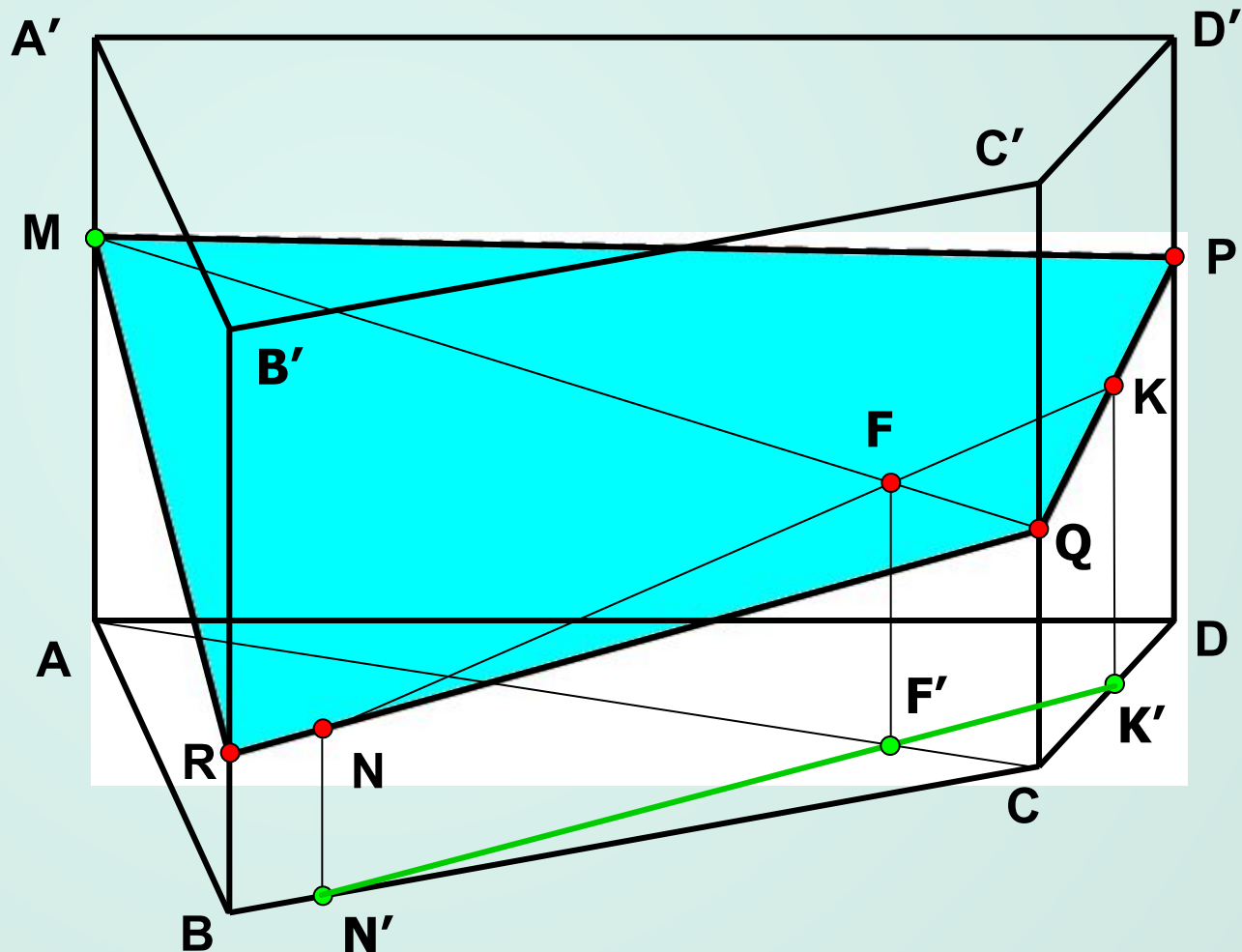
Дополнительная точка **S**



Пример 2. Построить сечение четырехугольной призмы $ABCD A'B'C'D'$, проходящее через точки $M \in AA'$, $N \in (BCC')$ и $K \in (CDD')$.

Наблюдая за ходом построения сечения, составьте алгоритм по предложенной выше схеме.

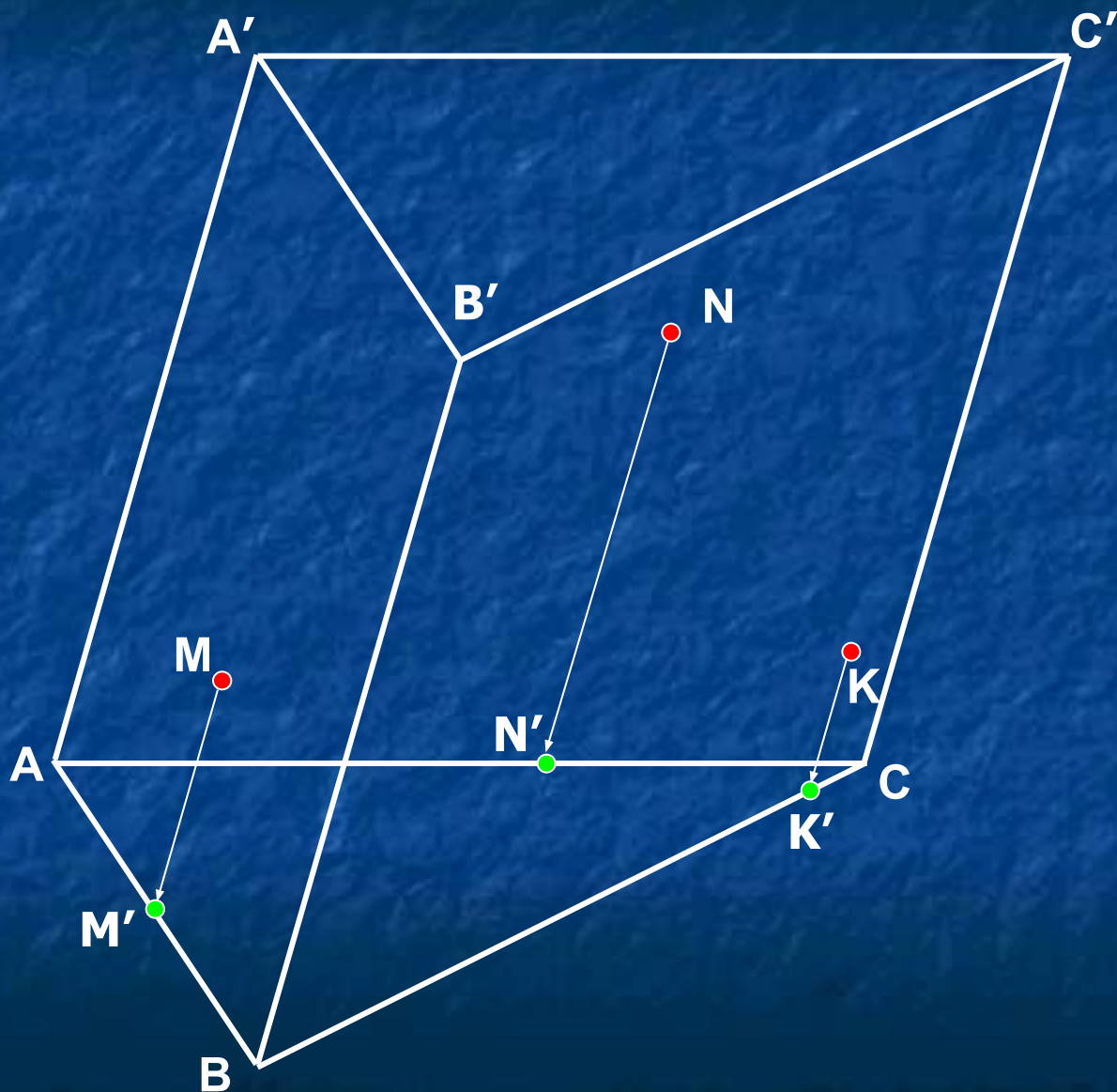
Четырехугольник $MPQR$ – искомое сечение.



Пример 3. Построить сечение треугольной призмы $ABCA'B'C'$, заданное тремя точками $M \in ABV'$, $N \in ACC'$ и $K \in BCC'$.

Решение. Как мы видим, никакие из трех точек сечения не лежат в одной грани призмы. Значит, метод «следа» нам не подходит. Проследим поэтапное применение метода параллельных проекций для построения сечения в данном случае.

1) Построим образы M' , N' и K' данных точек при параллельном проектировании направлении, параллельном боковому ребру призмы на ее нижнее основание.



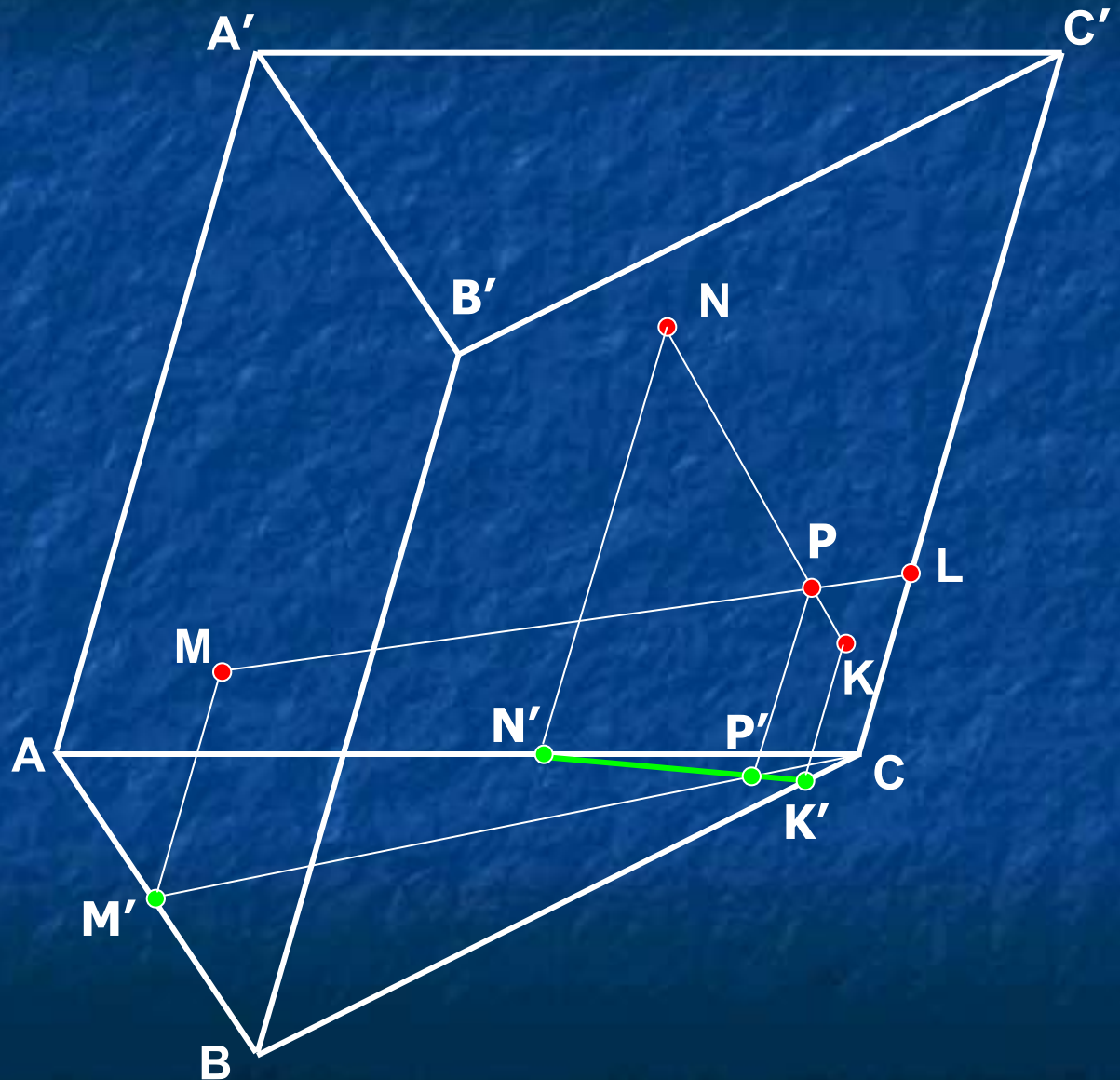
2) Изобразим отрезок $\mathbf{N'K'}$ как образ отрезка \mathbf{NK} .

3) Найдем точку $\mathbf{P'}$ пересечения отрезков $\mathbf{M'C}$ и $\mathbf{N'K'}$.

4) Так как $\mathbf{P' \in N'K'}$, то прообраз этой точки $\mathbf{P \in NK}$. Построим ее.

5) Теперь изобразим прообраз отрезка $\mathbf{M'C}$ – отрезок \mathbf{ML} , где $\mathbf{L = MP \cap CC'}$.

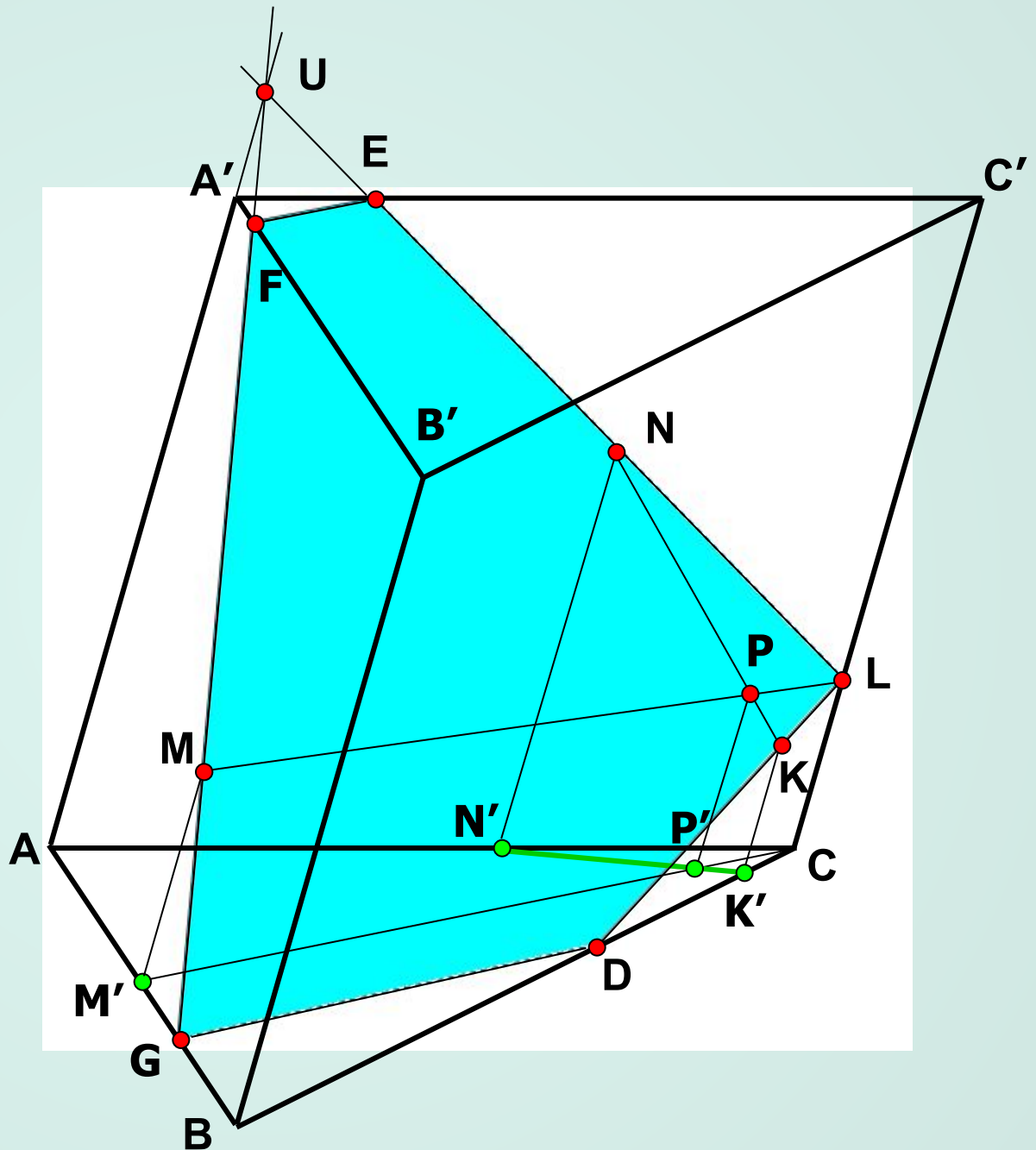
6) Точка \mathbf{L} принадлежит плоскости сечения (\mathbf{MNK}) , значит, дальше можно воспользоваться методом «следа».



При применении метода «следа» получим точку **U**. После чего закончить построение сечения нетрудно.

В итоге получили искомое сечение – пятиугольник **FELDG**!

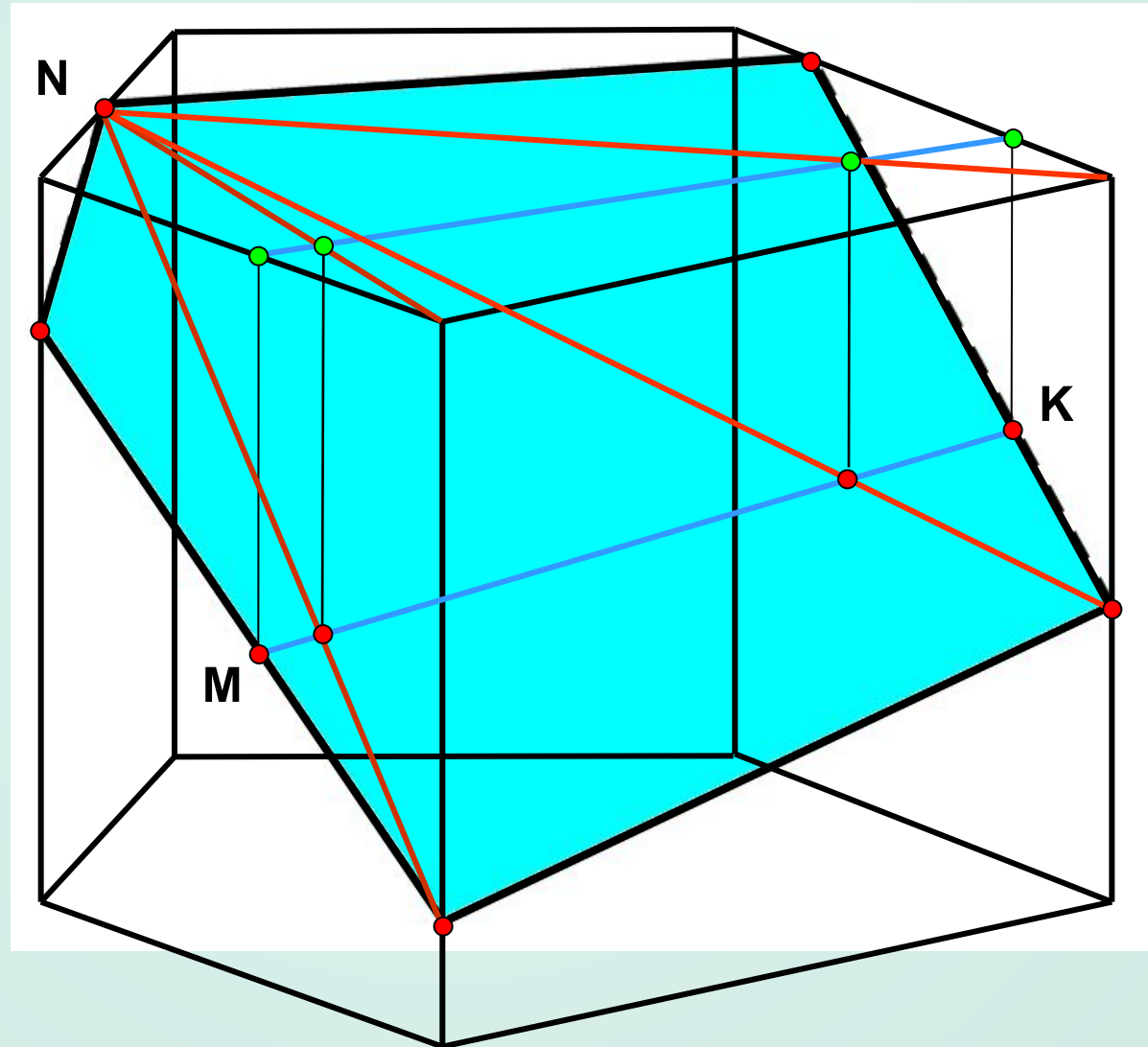
Итак, наша цель в построении сечения была достигнута благодаря появлению дополнительной точки **L**.



Примечание. В качестве плоскости проекции можно выбирать любое основание призмы.

Применяя вышеописанный алгоритм неоднократно можно обойтись без метода «следа».

Пример 4.



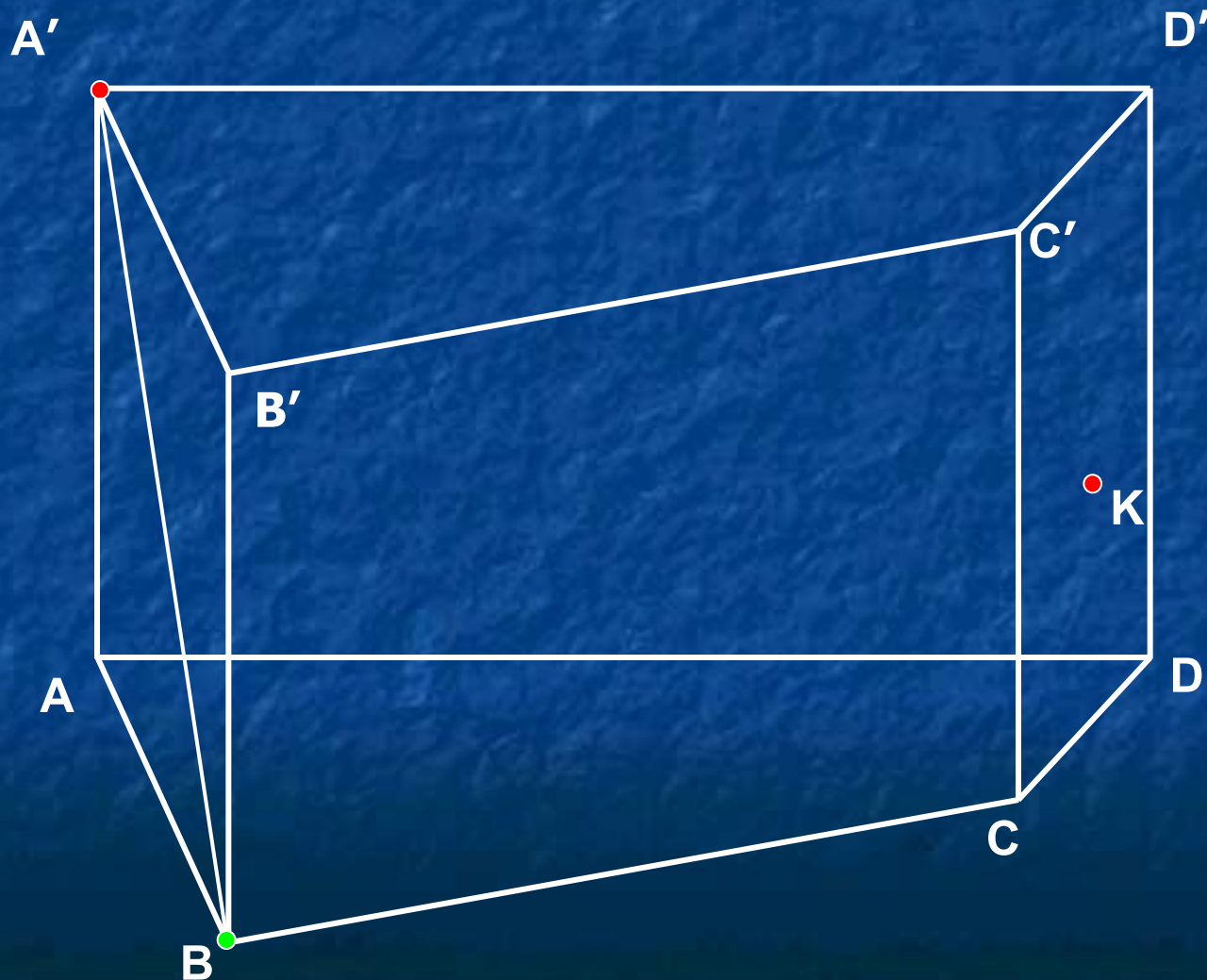
Плоскость сечения может задаваться:

- 1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- 2) прямой и точкой, не лежащей на ней;
- 3) двумя пересекающимися прямыми;
- 4) двумя параллельными прямыми.

Все эти случаи можно свести к первому, выбирая на прямых удобные для нас точки.

Пример 5.

Постройте сечение 4-угольной призмы, в основании которой произвольный 4-угольник, проходящее через диагональ и точку в противоположных боковых гранях.



Решение. Выберем на диагонали две точки **В** и **А'**. Построим сечение, проходящее через три точки **К**, **В** и **А'**. При параллельной проекции на нижнее основание призмы образами этих точек являются точки **К'**, **В** и **А**.

Проведем отрезок **А'К** и построим его образ – отрезок **АК'**.

Соединим точки **В** и **Д**, отмечая точку **Ф'** пересечения его с **АК'**.

Найдем прообраз точки **Ф'**.

Отметим дополнительную точку **М = ВФ ∩ ДД'**.

Получим сечение призмы **А'МNB**, последовательно соединяя полученные точки.

