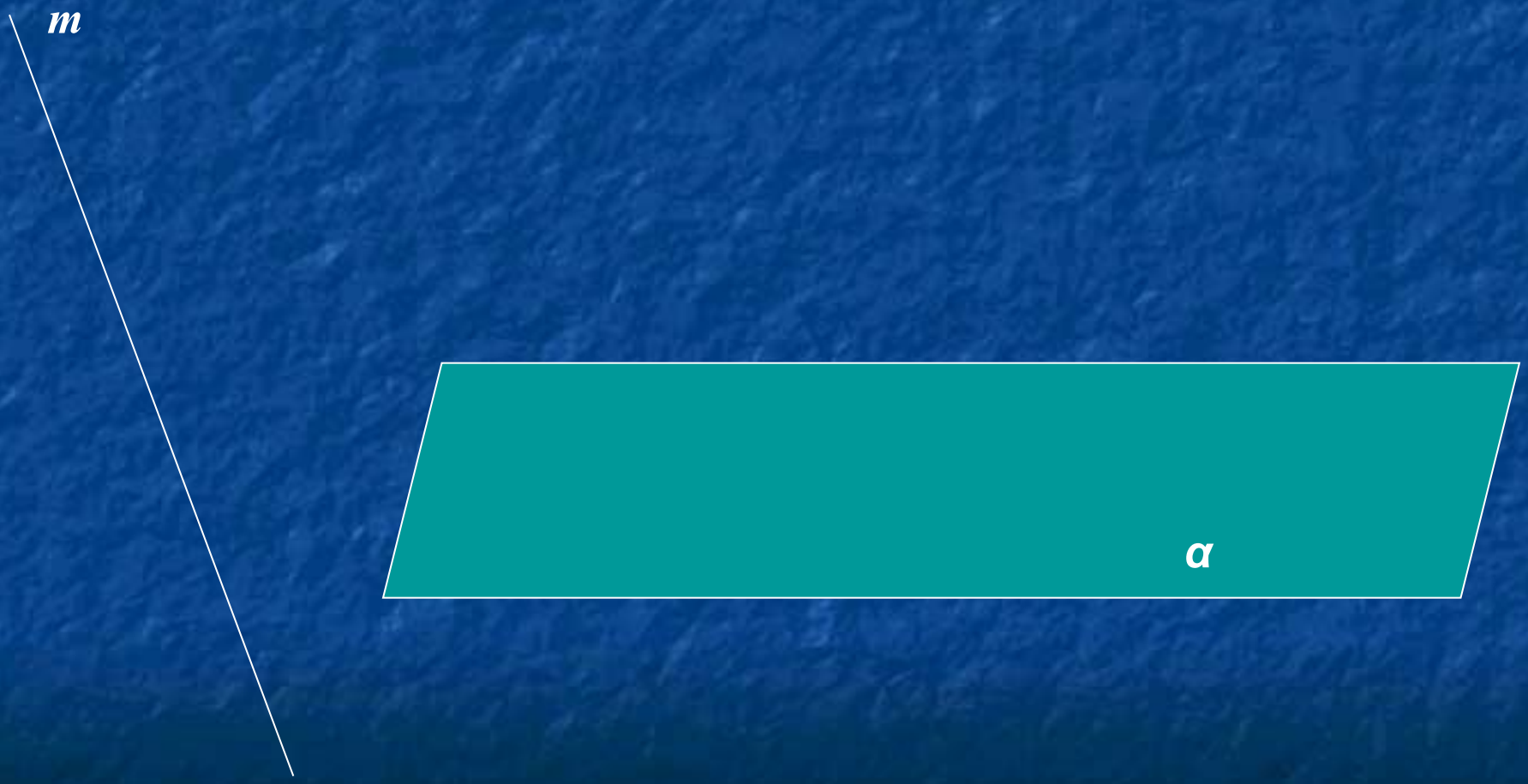
Геометрия, 10 класс

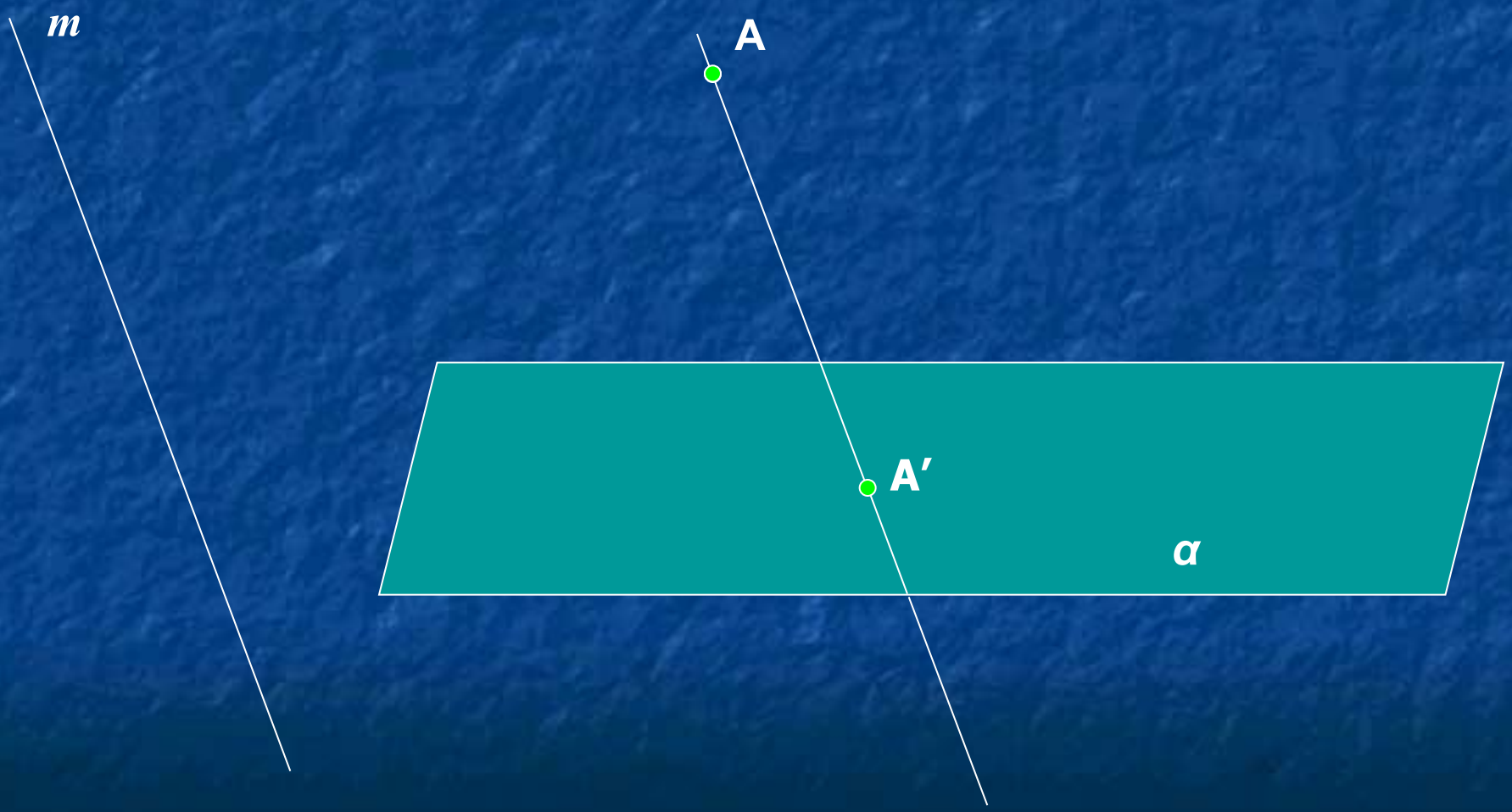
Тема: Построение сечений многогранников методом параллельных проекций

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

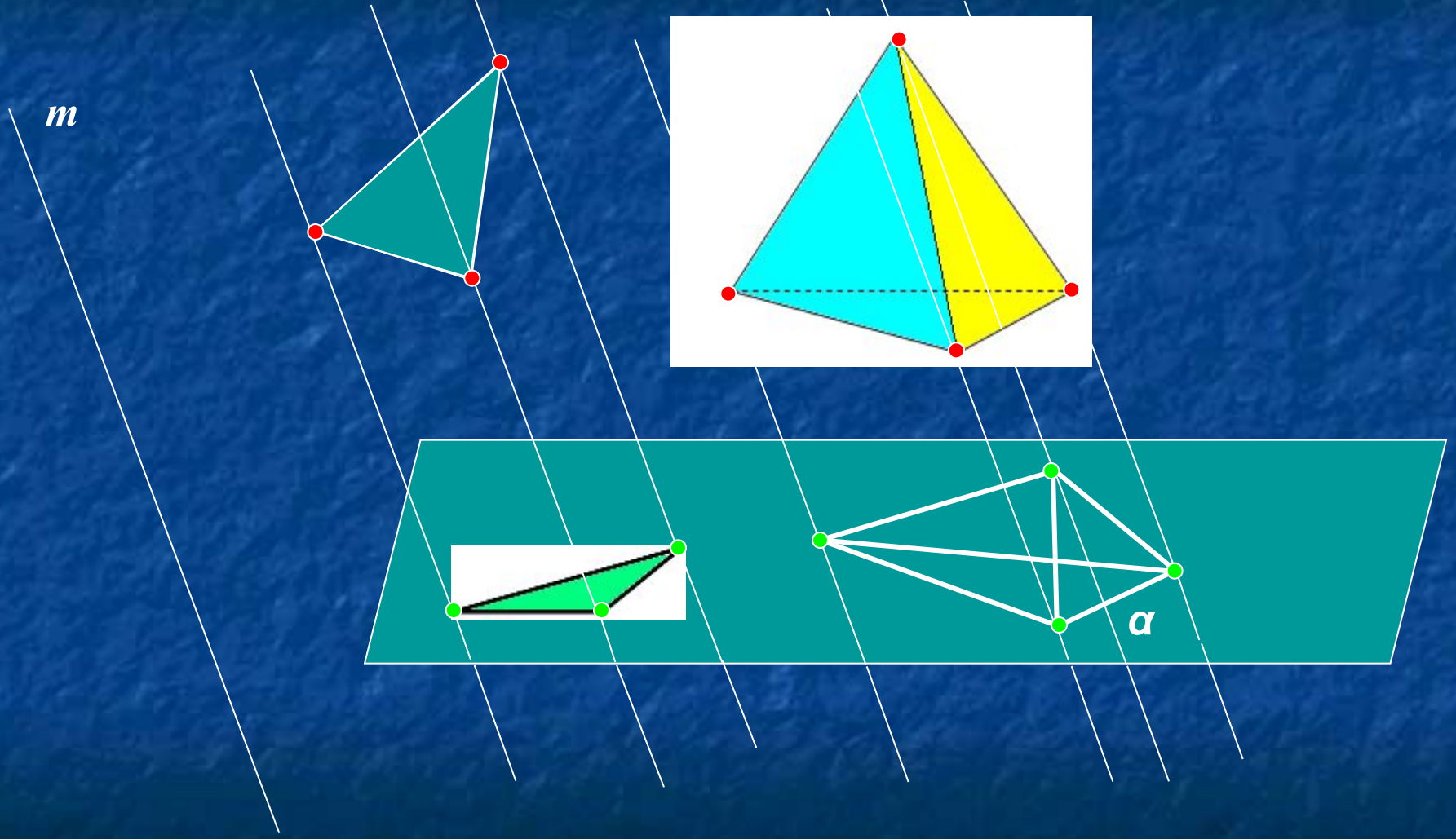
Вспомним, что при параллельном проектировании в пространстве используют такие понятия как: плоскость проекций (любая плоскость **α**), направление параллельного проектирования (любая прямая $m \square \alpha$).



Рассматривая любую геометрическую фигуру как множество точек, можно построить в заданной плоскости проекцию данной фигуры. Для этого выбирают любую точку фигуры **A** (*прообраз*) и строят ее параллельную проекцию на плоскость **A′** (*образ*).



Таким образом можно получить изображение (или «проекцию») любой плоской или пространственной фигуры. (см.рис.)



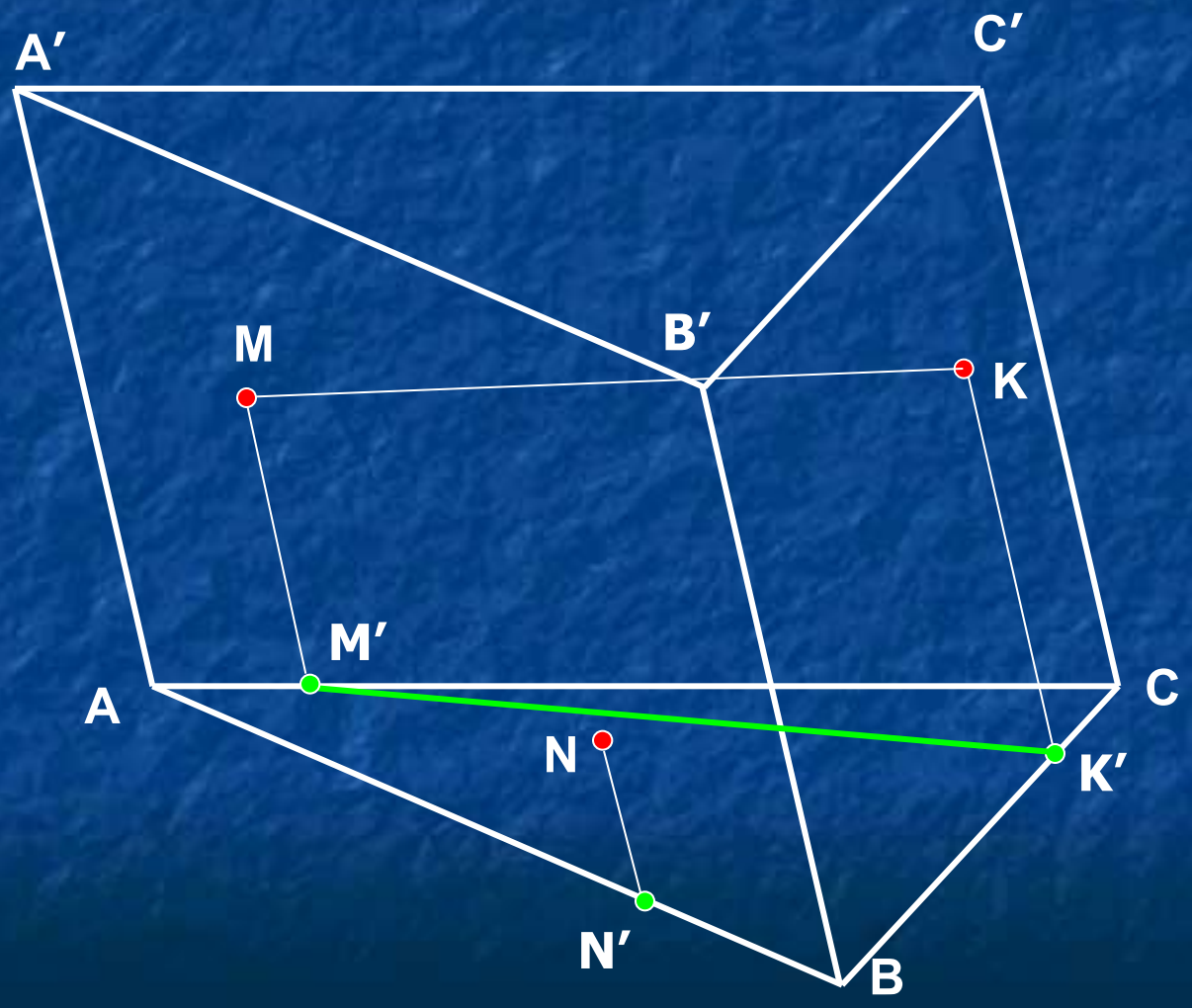
Пример 1. Постройте сечение треугольной призмы **ABCA′B′C′**, проходящее через точки **M**, **N** и **K**, лежащие в боковых гранях

Решение.

1) Построим проекции данных трех точек **M**, **N** и **K** на плоскость основания в направлении, параллельном боковому ребру.

2) Соединим две <u>любые</u> данные точки (например, **M** и **K**).

3) Построим образ полученного в п.2) отрезка **MK**.

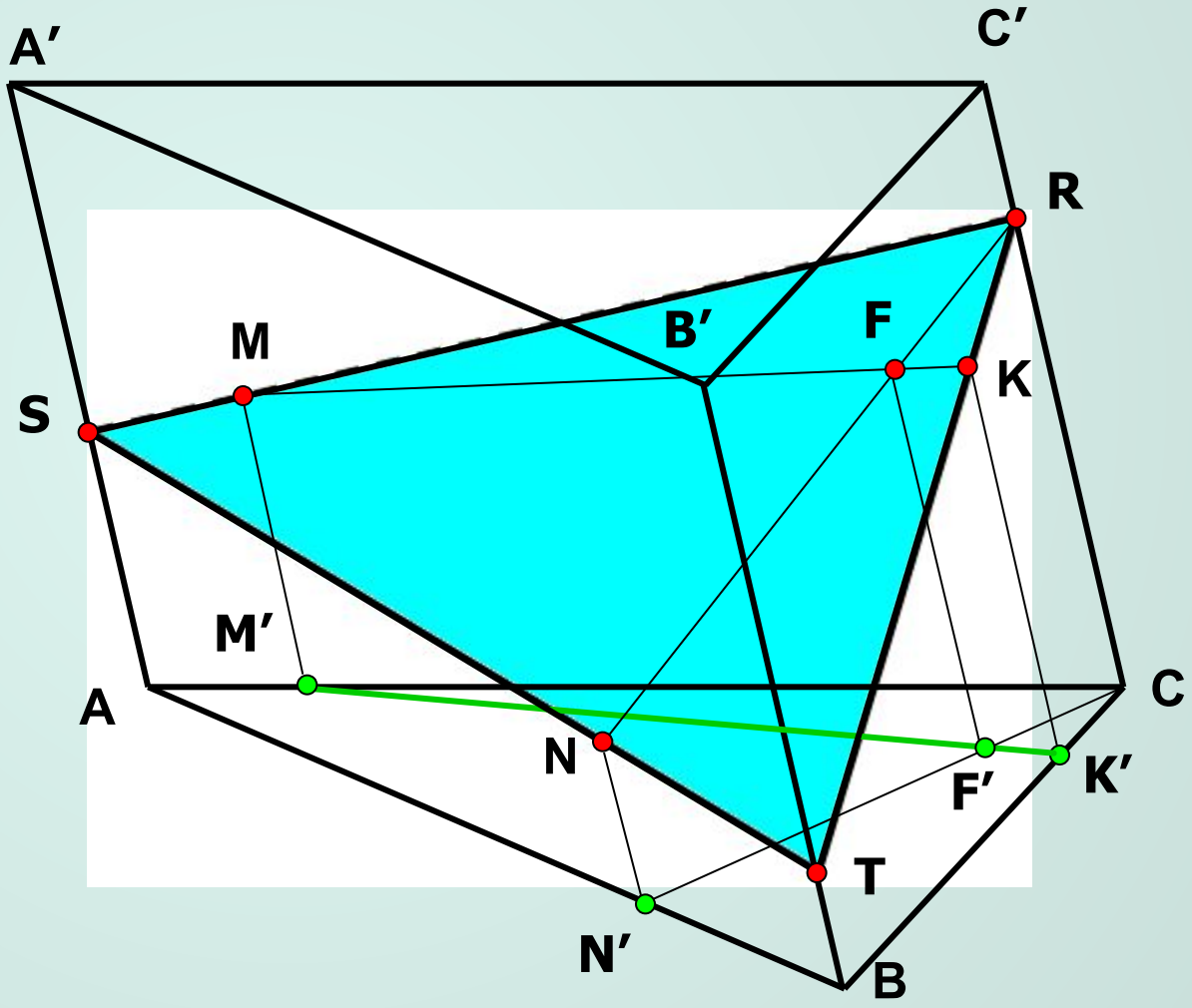


4) Соединим отрезком точки **N′** и **C,** обозначив буквой **F′** точку пересечения с отрезком **M′K′**.

5) Так как **F′∈M′K′**, то прообраз этой точки **F∈MK**. Построим ее.

6) Прямые **NN′** и **CC′** лежат в одной плоскости (подумайте почему?). Построим в этой плоскости точку **R=CC′∩NF**.

7) В боковых гранях **ACC′** и **BCC′** у нас появились по две точки, принадлежащие сечению, поэтому закончить построение сечения **RST** нетрудно.



Основной целью применения метода параллельных проекций является получение *дополнительной* точки сечения (обычно на одном из боковых ребер). Для этого можно воспользоваться следующей схемой (пояснения – из примера 1):

1) нужно выбрать любую пару из данных точек сечения; (**M** и **K**)

2) построить их проекции на основание призмы; (**M′** и **K′**)

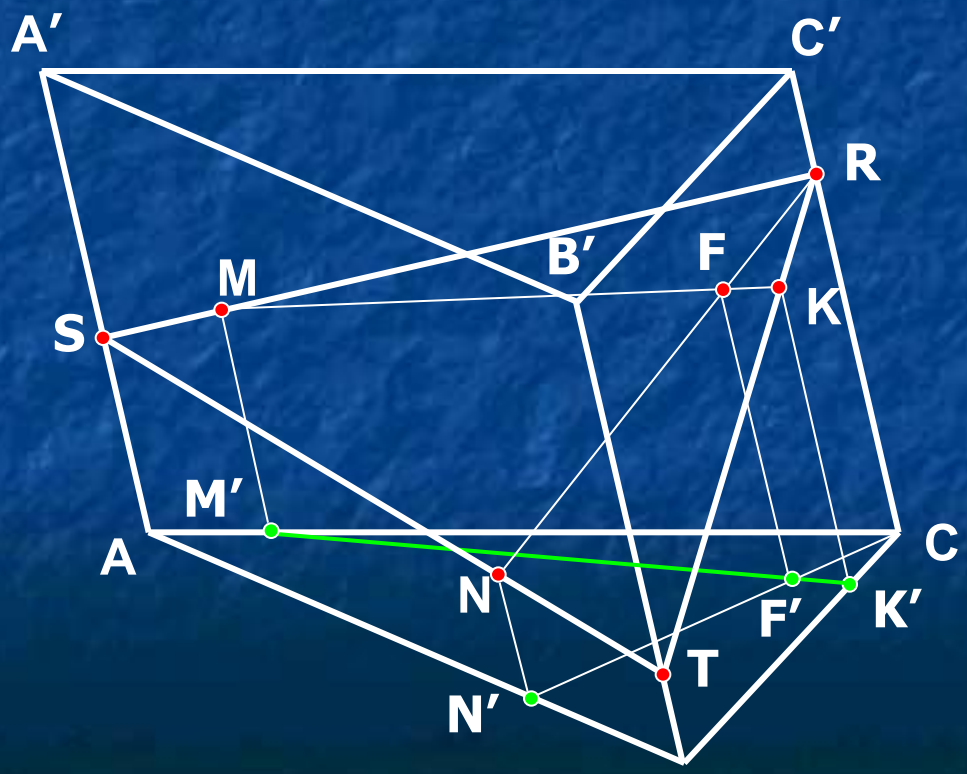
3) направление параллельного проектирование выбирается параллельно боковым ребрам; (**AA′**)

4) сначала получить образ *вспомогательной* точки в плоскости проекций (для этого привлекают образы данных точек сечения и одну из вершин основания призмы); (точка **F′**, вершина – **C**)

5) найти прообраз *вспомогательной* точки; (точка **F**)

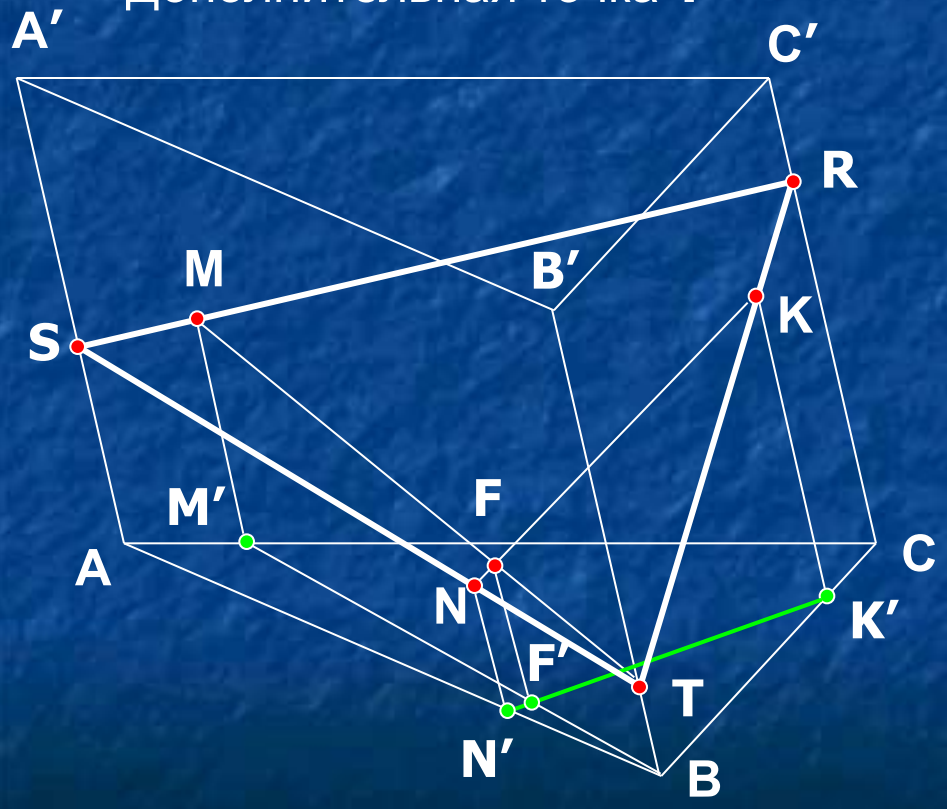
6) получить *дополнительную* точку сечения; (точка **R**).

Запишите схему в тетрадь!

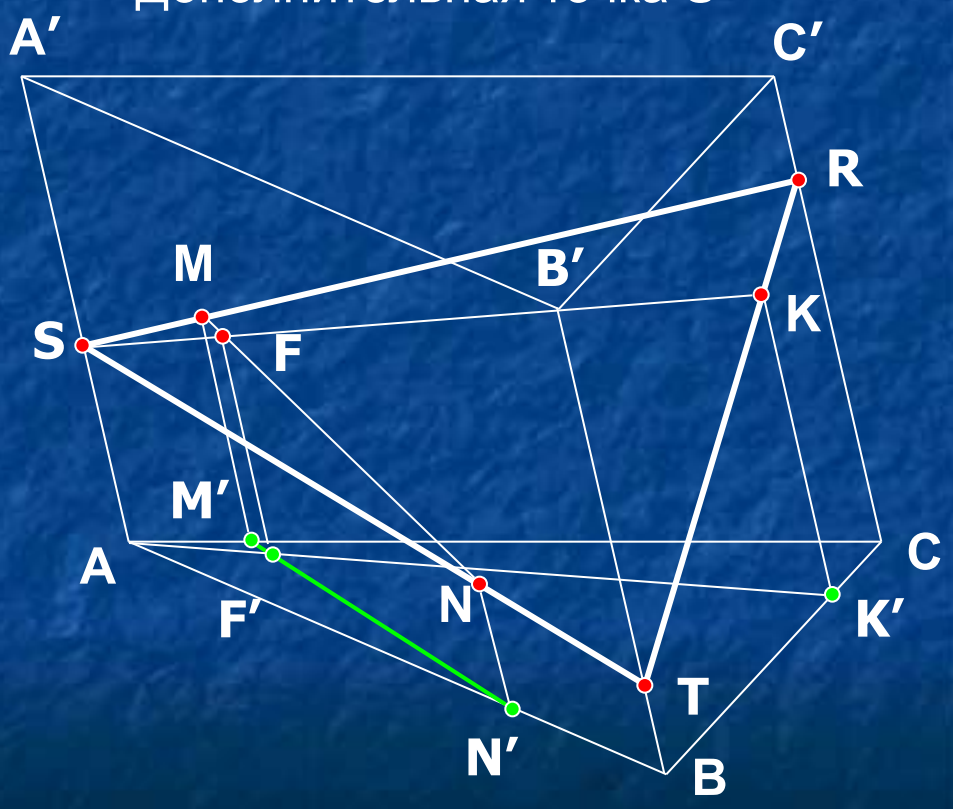


Примечание. Еще раз обратите внимание на термин «любые» в п.2) примера 1. Попробуйте самостоятельно, по схеме, в тетради построить сечение из примера 1, соединяя две другие пары точек: **M** и **N** или **N** и **K**. Убедитесь в однозначности получающегося результата (сечение получается таким же).

Дополнительная точка **T**

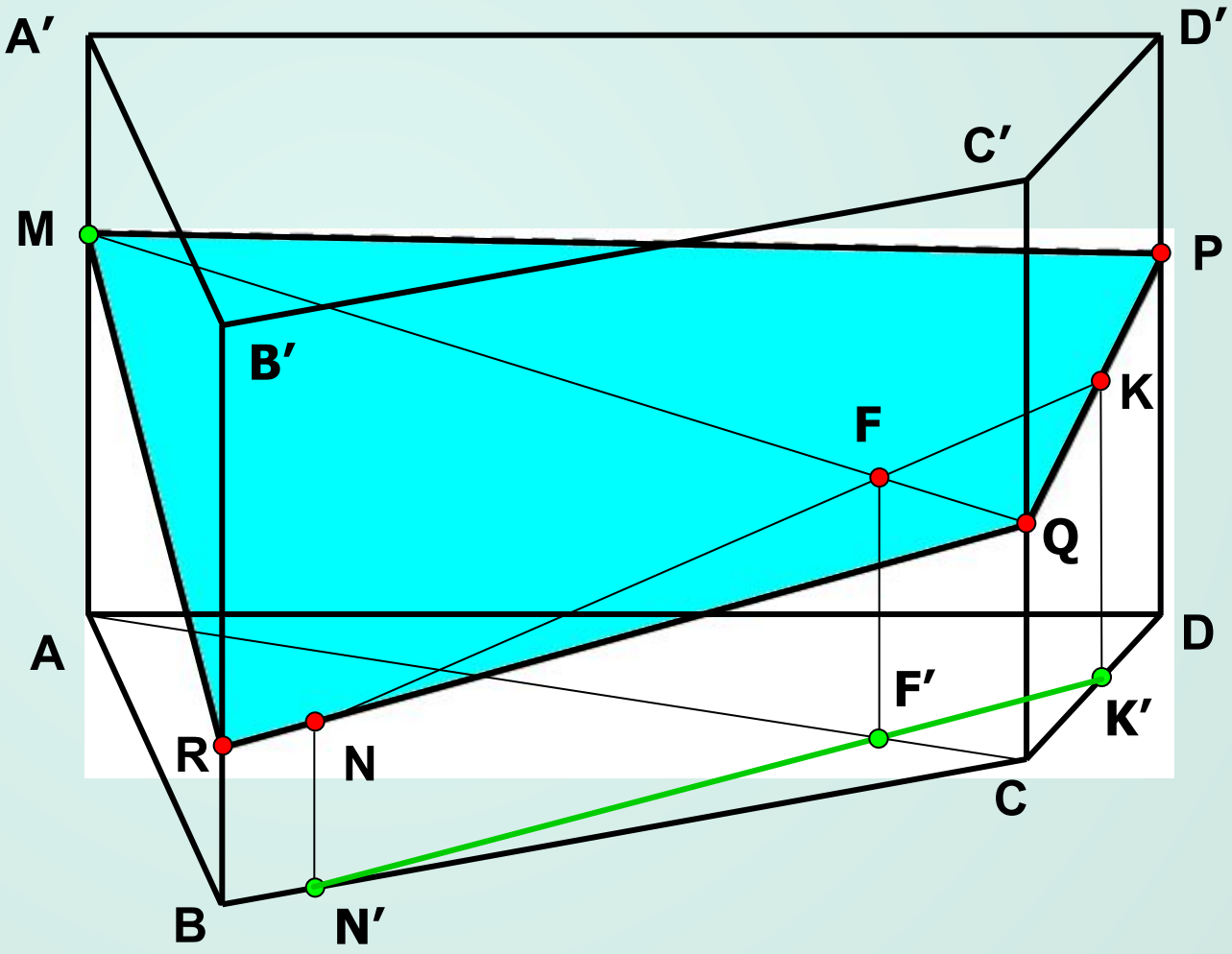


Дополнительная точка **S**



Пример 2. Построить сечение четырехугольной призмы **ABCDA′B′C′D′**, проходящее через точки **M∈AA′**, **N ∈(BCC′)** и **K∈(CDD′)**.

Наблюдая за ходом построения сечения, составьте алгоритм по предложенной выше схеме.

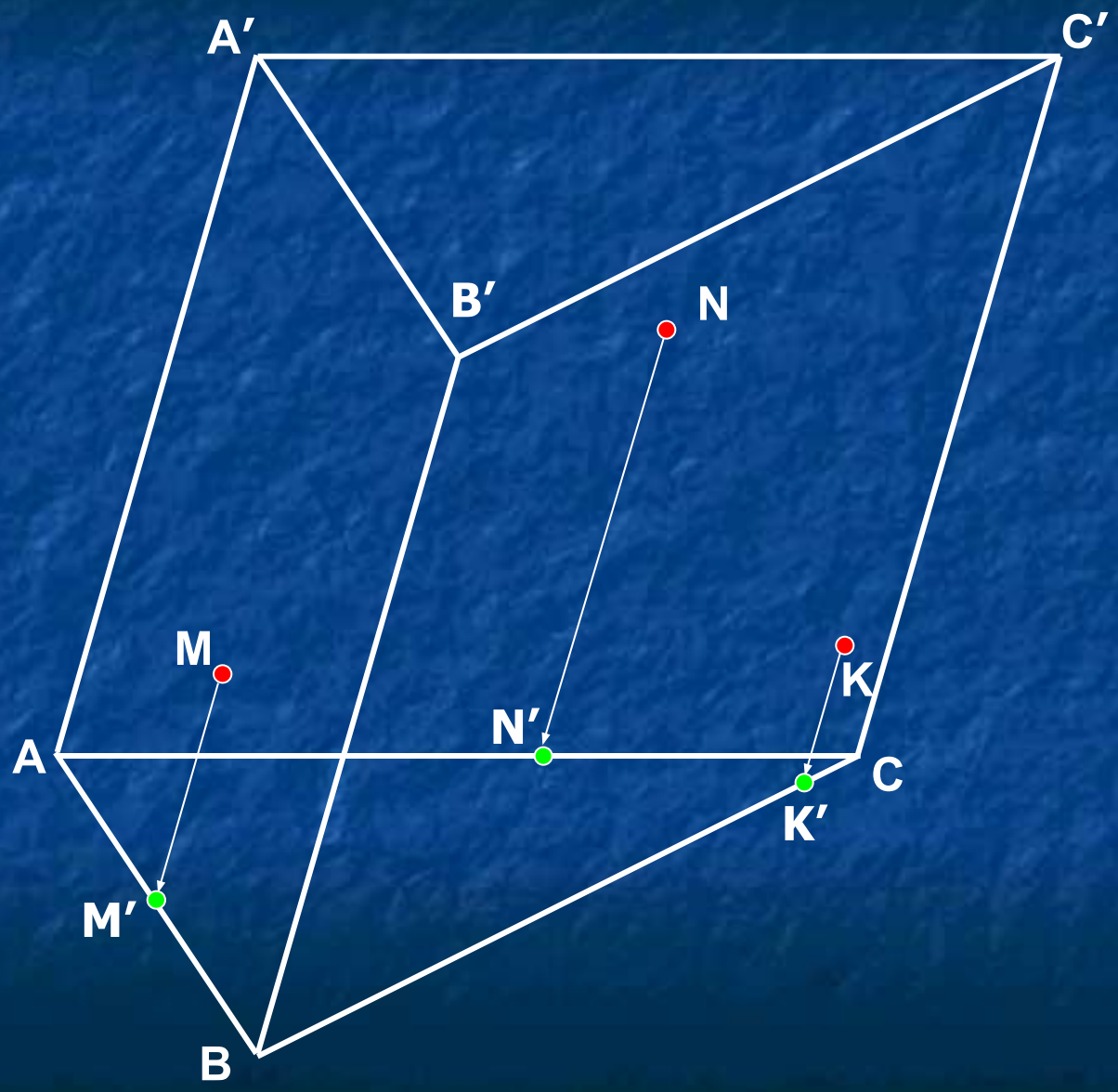


Четырехугольник **MPQR** – искомое сечение.

Пример 3. Построить сечение треугольной призмы **ABCA′B′C′**, заданное тремя точками **M∈ABB′**, **N∈ACC′** и **K∈BCC′**.

Решение. Как мы видим, никакие из трех точек сечения не лежат в одной грани призмы. Значит, метод «следа» нам не подходит. Проследим поэтапное применение метода параллельных проекций для построения сечения в данном случае.

1) Построим образы **M′**, **N′** и **K′** данных точек при параллельном проектировании в направлении, параллельном боковому ребру призмы на ее нижнее основание.



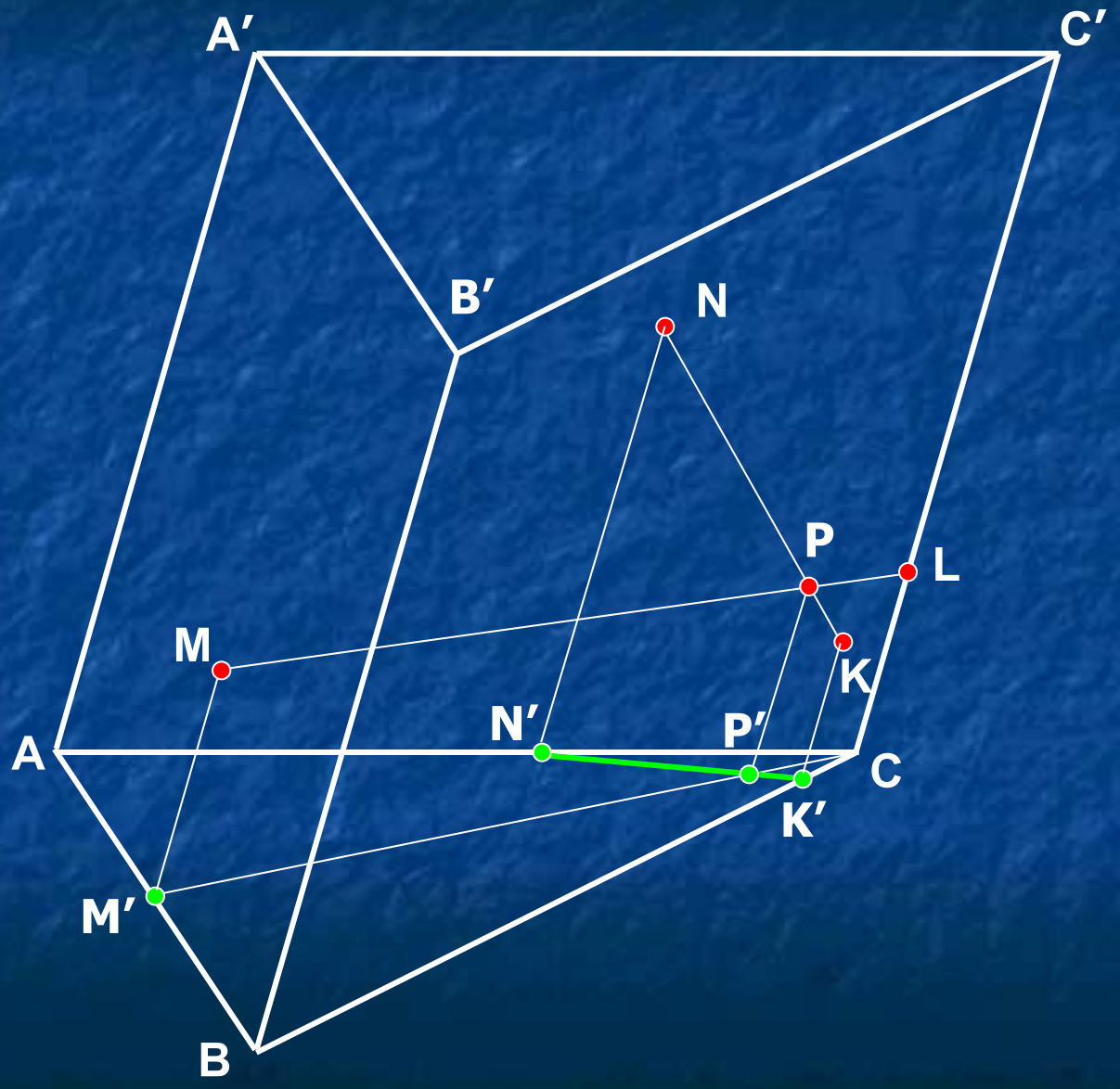
2) Изобразим отрезок **N′K′** как образ отрезка **NK**.

3) Найдем точку **P′** пересечения отрезков **M′C** и **N′K′**.

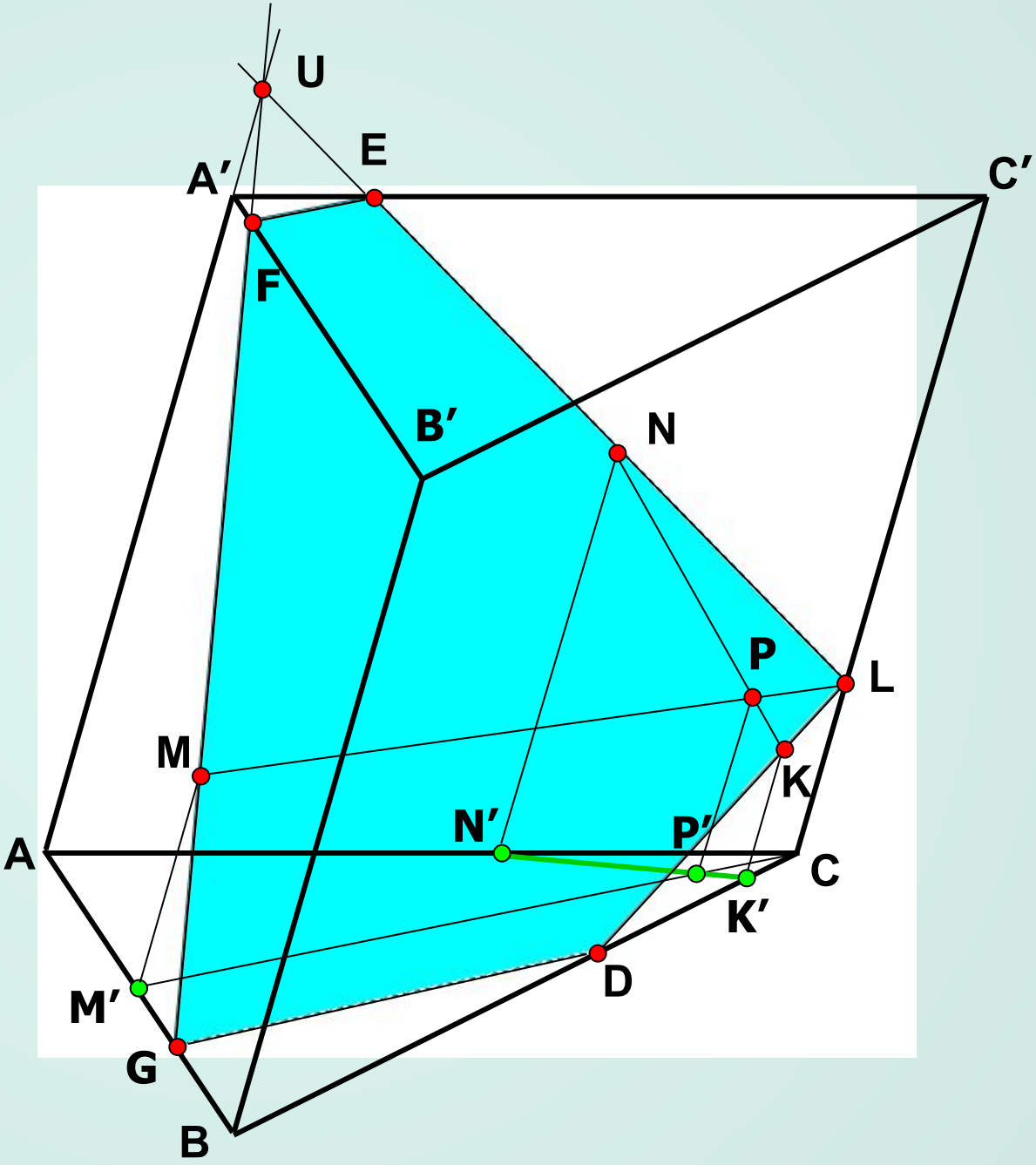
4) Так как **P′∈N′K′**, то прообраз этой точки **P∈NK**. Построим ее.

5) Теперь изобразим прообраз отрезка **M′C** – отрезок **ML**, где **L=MP∩CC′**.

6) Точка **L** принадлежит плоскости сечения (**MNK**), значит, дальше можно воспользоваться методом «следа».



При применении метода «следа» получим точку **U**. После чего закончить построение сечения нетрудно.



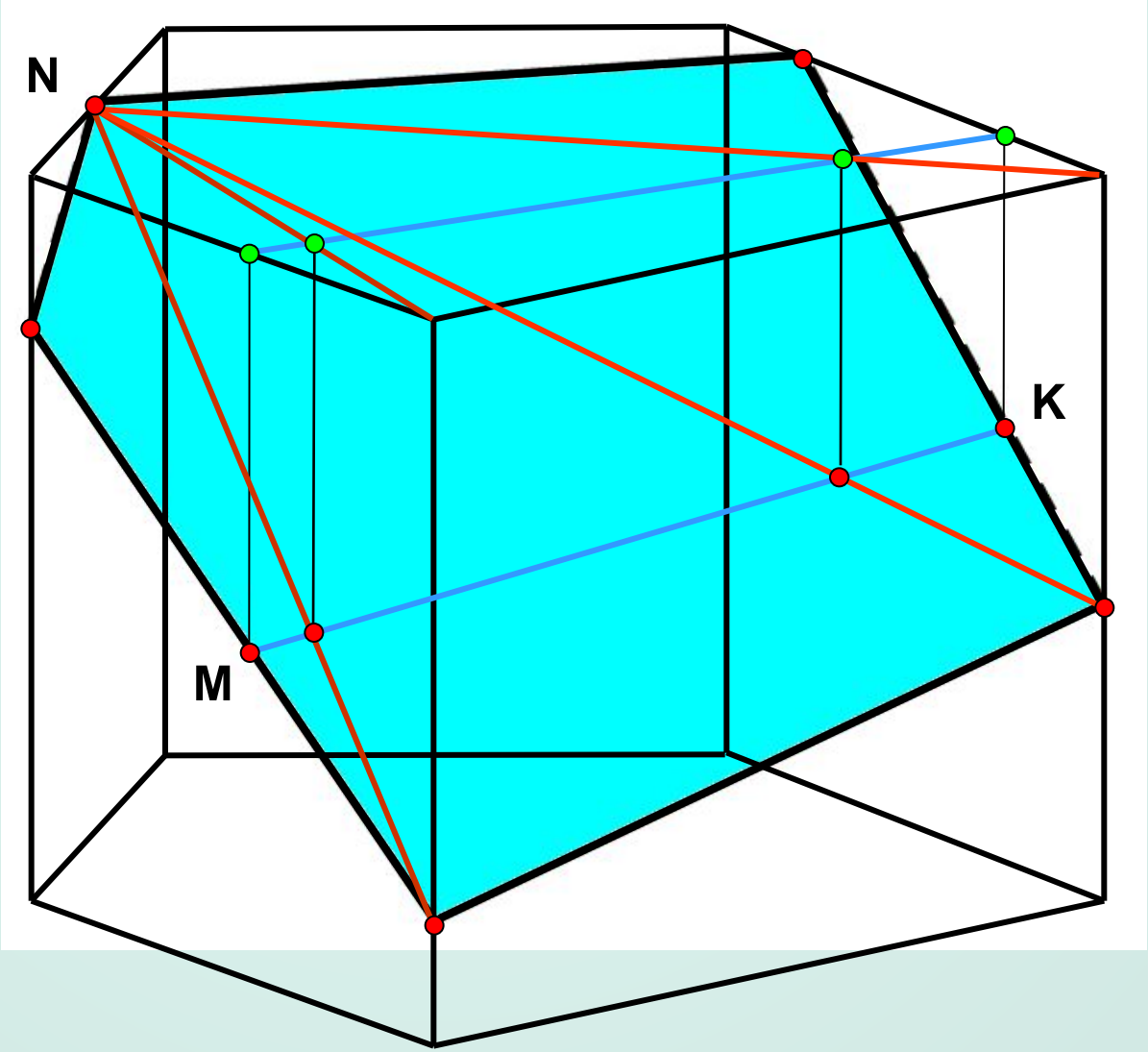
В итоге получили искомое сечение – пятиугольник **FELDG**!

Итак, наша цель в построении сечения была достигнута благодаря появлению дополнительной точки **L**.

Примечание. В качестве плоскости проекции можно выбирать любое основание призмы.

Применяя вышеописанный алгоритм неоднократно можно обойтись без метода «следа».

Пример 4.



Плоскость сечения может задаваться:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;

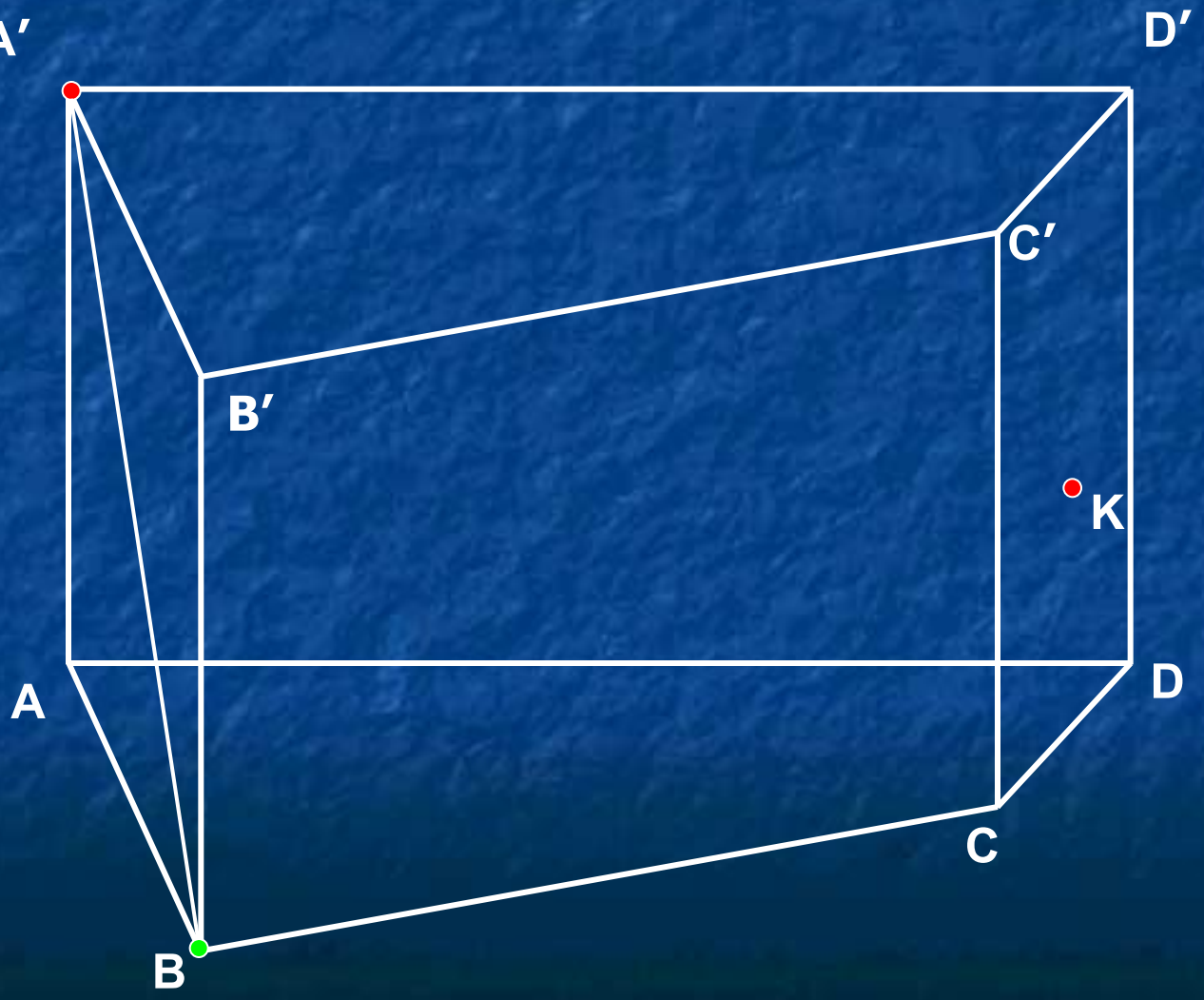
2) прямой и точкой, не лежащей на ней;

3) двумя пересекающимися прямыми;

4) двумя параллельными прямыми.

Все эти случаи можно свести к первому, выбирая на прямых удобные для нас точки.

Пример 5.
Постройте сечение 4-угольной призмы, в основании которой произвольный 4-угольник, проходящее через диагональ и точку в противоположных боковых гранях.

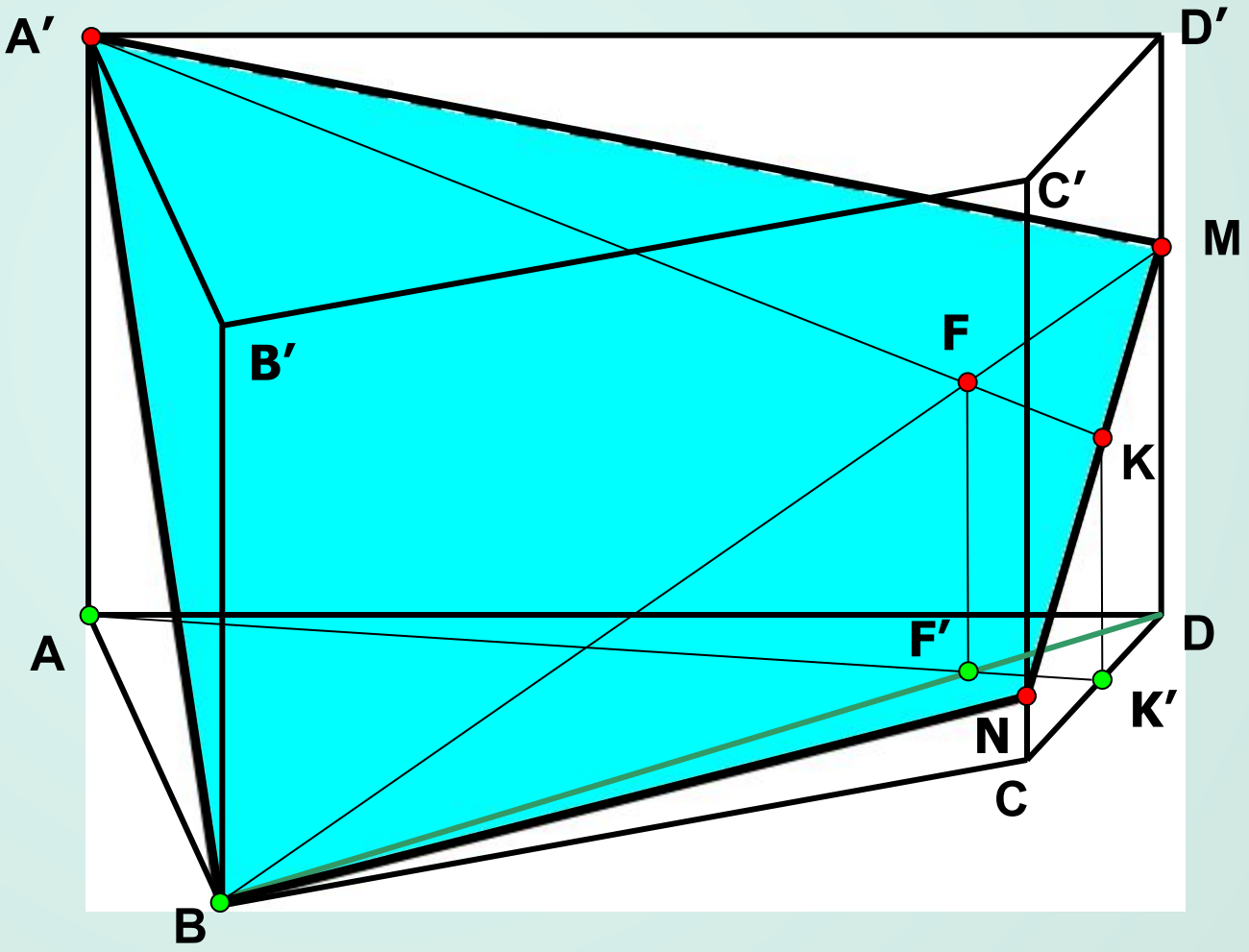


Решение. Выберем на диагонали две точки **B** и **A′**. Построим сечение, проходящее через три точки **K**, **B** и **A′**. При параллельной проекции на нижнее основание призмы образами этих точек являются точки **K′**, **B** и **A**.

Проведем отрезок **A′K** и построим его образ – отрезок **AK′**.

Соединим точки **B** и **D**, отмечая точку **F′** пересечения его с **AK′**.

Найдем прообраз точки **F′**.

Отметим дополнительную точку **M=BF∩ DD′**.

Получим сечение призмы **A′MNB**, последовательно соединяя полученные точки.