

# Построение уточненной теории пластин с применением уравнения равновесия элементарного столбика

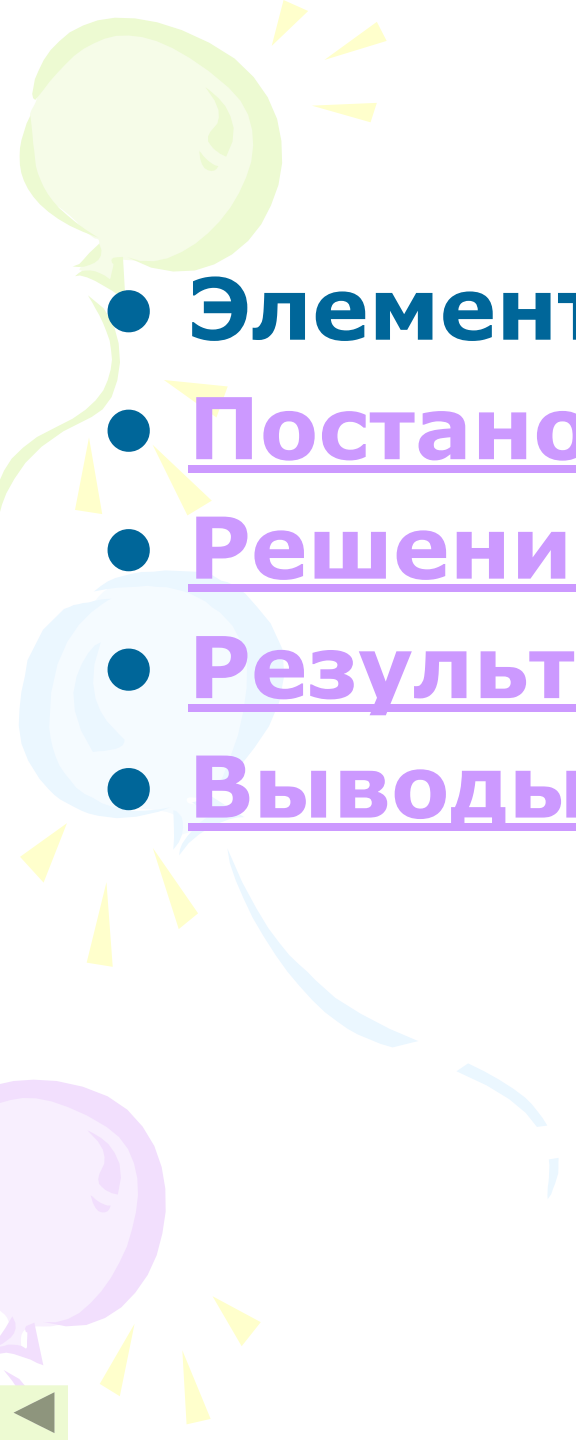
Выполнил:

Скращук Дмитрий Геннадьевич

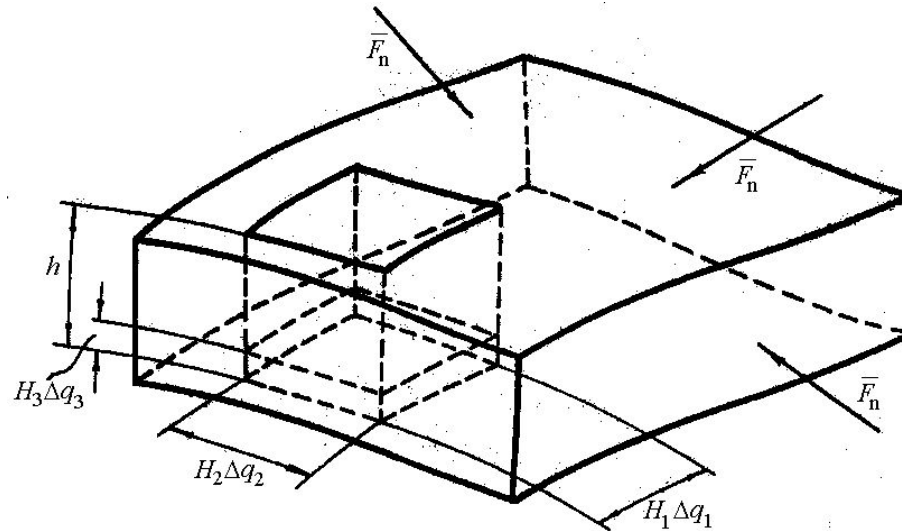
Руководитель:

профессор

Крушевский Александр Евгеньевич

- 
- **Элементарный столбик**
  - Постановка задачи
  - Решение задачи
  - Результаты
  - Выводы

# Элементарный столбик

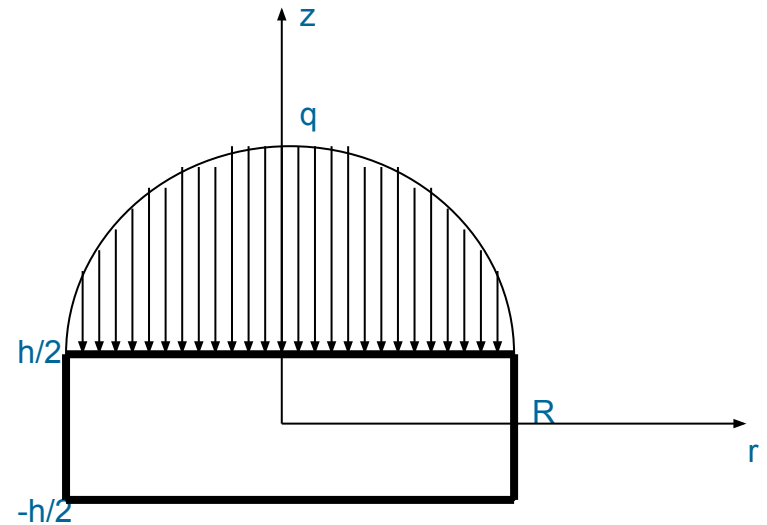


Уравнение равновесия элементарного столбика (1)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial q_1} \int (\bar{e}_1 \cdot T) \delta \bar{u} H_2 H_3 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} \int (\bar{e}_2 \cdot T) \delta \bar{u} H_1 H_3 dq_3 - \int \frac{T}{h} \cdot \delta E H_1 H_2 H_3 dq_3 + \\
 & + \int \left( \bar{K} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \bar{u} H_1 H_2 H_3 dq_3 + \left| \bar{F}_n \cdot \frac{\delta \bar{u} H_1 H_2}{n_3} \right|_s = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

# Постановка задачи

Дана круглая толстая плита нагруженная параболической нагрузкой, края которой находятся в абсолютно жёстких вертикальных направляющих, препятствующих тангенциальному перемещению, причём контурная окружность неподвижна.



Используя уравнение равновесия элементарного столбика исследовать:

1. Зависимость вертикальных перемещений  $w$  круглой толстой плиты от положения контура закрепления.
2. Зависимость напряжений  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  круглой толстой от положения контура закрепления.

# Решение задачи

Для решения поставленной задачи используем уравнение равновесия элементарного столбика (1). Искомые перемещения представим в виде конечных сумм по полиномам Лежандра (2). Достаточно четырех слагаемых чтобы построить шесть независимых возможных перемещений (3) учитывающих работу как постоянных по толщине усилий, так и переменных.

$$u = U_0(r) + \frac{2z}{h} U_1(r) + \frac{1}{2} \left( \frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) U_2(r) + \left( \frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h} \right) U_3(r),$$
$$v = 0, \tag{2}$$

$$w = W_0(r) + \frac{2z}{h} W_1(r) + \frac{1}{2} \left( \frac{12z^2}{h^2} - 1 \right) W_2(r) + \left( \frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h} \right) W_3(r).$$

$$\varphi_0 = \psi_0 = f_0 = 1, \quad \varphi_3 = \psi_3 = f_3 = \frac{20z^3}{h^3} - \frac{15z}{h}, \tag{3}$$

# Решение задачи

Раскрывая вариационное уравнение (1) для разложений (2) и вариаций (3), после некоторых преобразований получим:

$$\Delta\Delta\Delta W_0 - \frac{224(\gamma-1)}{\gamma\gamma_2 h^2} \Delta\Delta W_0 = \frac{672}{\gamma_2 G h^5} (Z^+ + Z^-) + \frac{4(3\gamma^2 + 42\gamma - 28)}{\gamma\gamma_2 G h^3} \Delta(Z^+ + Z^-) -$$
$$- \frac{(\gamma-1)}{\gamma_2 G h} \Delta\Delta(Z^+ + Z^-) + \left( \frac{336}{\gamma G h^4} + \frac{6\gamma\Delta}{\gamma_2 G h^2} \right) (\partial_1(X^+ - X^-) + \partial_2(Y^+ - Y^-)),$$

$$\Delta W_1 = - \left( 1 + \frac{15}{14\gamma_2} \right) \Delta W_3 + \frac{60\gamma}{\gamma_2 h^2} W_3 + \frac{(\gamma-1)}{2\gamma_2 G} (\partial_1(X^+ + X^-) + \partial_2(Y^+ + Y^-)),$$

$$\Delta\Delta W_3 - \frac{48(\gamma-1)}{\gamma\gamma_2 h^2} \Delta W_3 + \frac{28 \cdot 96(\gamma-1)}{\gamma_2 h^4} W_3 = \frac{14\Delta(Z^+ - Z^-)}{5G} -$$
$$- \left( \frac{(3\gamma-4)28}{5\gamma_2 G h^2} - \frac{7\Delta}{15G} \right) (\partial_1(X^+ + X^-) + \partial_2(Y^+ + Y^-))$$

# Решение задачи

Их общие решения приведенные принимают вид:

$$W_0 = C_1 J_0(ikr) + C_2 r^2 + C_3,$$

$$W_1 = -\frac{B_1}{\gamma_2} \left( \frac{60\gamma}{k_1^2 h^2} + \gamma_2 + \frac{15}{14} \right) J_0(k_1 r) - \frac{B_2}{\gamma_2} \left( \frac{60\gamma}{k_2^2 h^2} + \gamma_2 + \frac{15}{14} \right) J_0(k_2 r) + B_3,$$

$$W_2 = C_1 \frac{56(\gamma - 1)}{3\gamma^2} J_0(ikr) + C_2 \gamma_2 \frac{h^2}{3\gamma},$$

$$W_3 = B_1 \frac{J_0(rk_1)(-10 + 10\gamma k_1 + k_1^3 h^2 \gamma_2)}{k_1^3 h^2 \gamma_2} + B_2 \frac{J_0(rk_2)(-10 + 10\gamma k_2 + k_2^3 h^2 \gamma_2)}{k_2^3 h^2 \gamma_2}.$$

# Решение задачи

Применяя метод неопределённых коэффициентов можно построить решения для  $W_i$  и нагрузок вида  $\sum_{i=0}^n q_i r^{2i}$

$U_i$  найдём из следующих условий:

$$\sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right) = 0, \quad \sigma_z\left(\frac{h}{2}\right) = Q$$

$$\tau_{rz}\left(-\frac{h}{2}\right) = \tau_{rz}\left(\frac{h}{2}\right) = 0$$

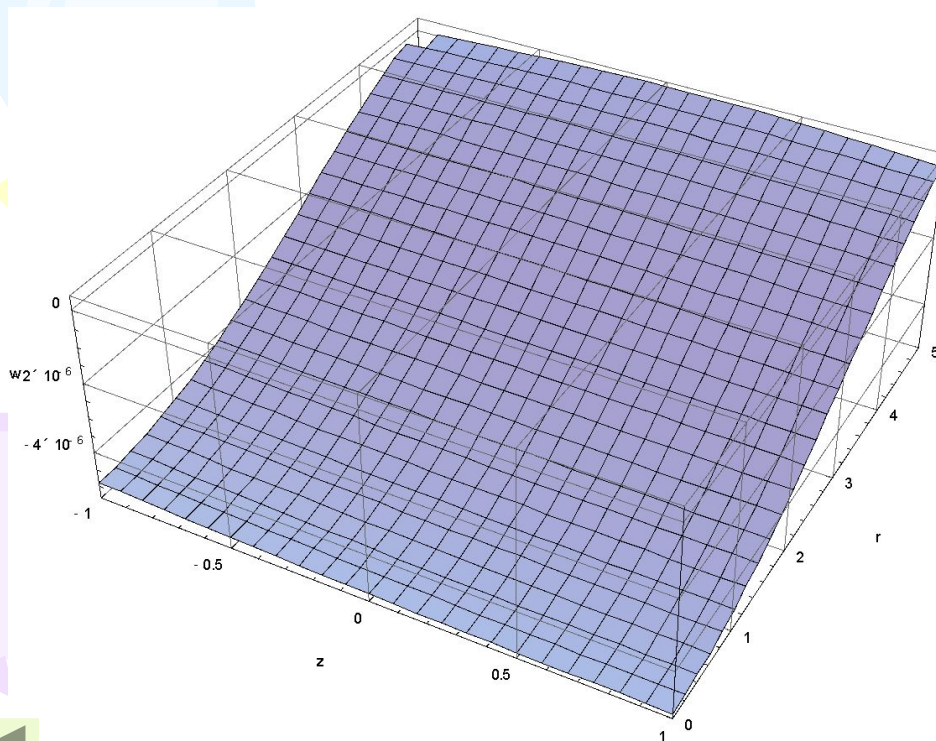
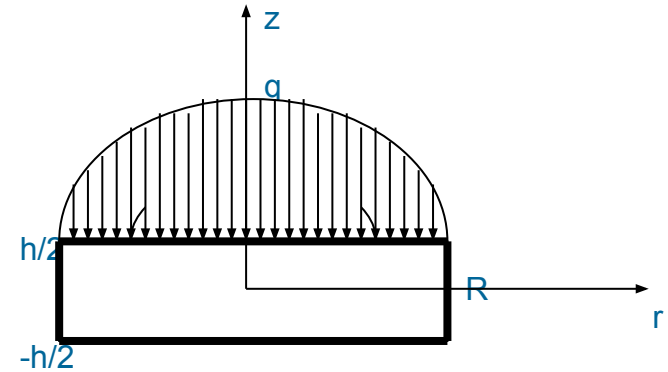


# Результаты

Используем написанную программу для:

$$Q = q \frac{R^2 - r^2}{R^2}, \quad \frac{h}{R} = \text{coef} = \frac{2}{5}, \quad R=5, \quad q=100$$

Закрепление при  $z_0 = -\frac{h}{2}$   
:

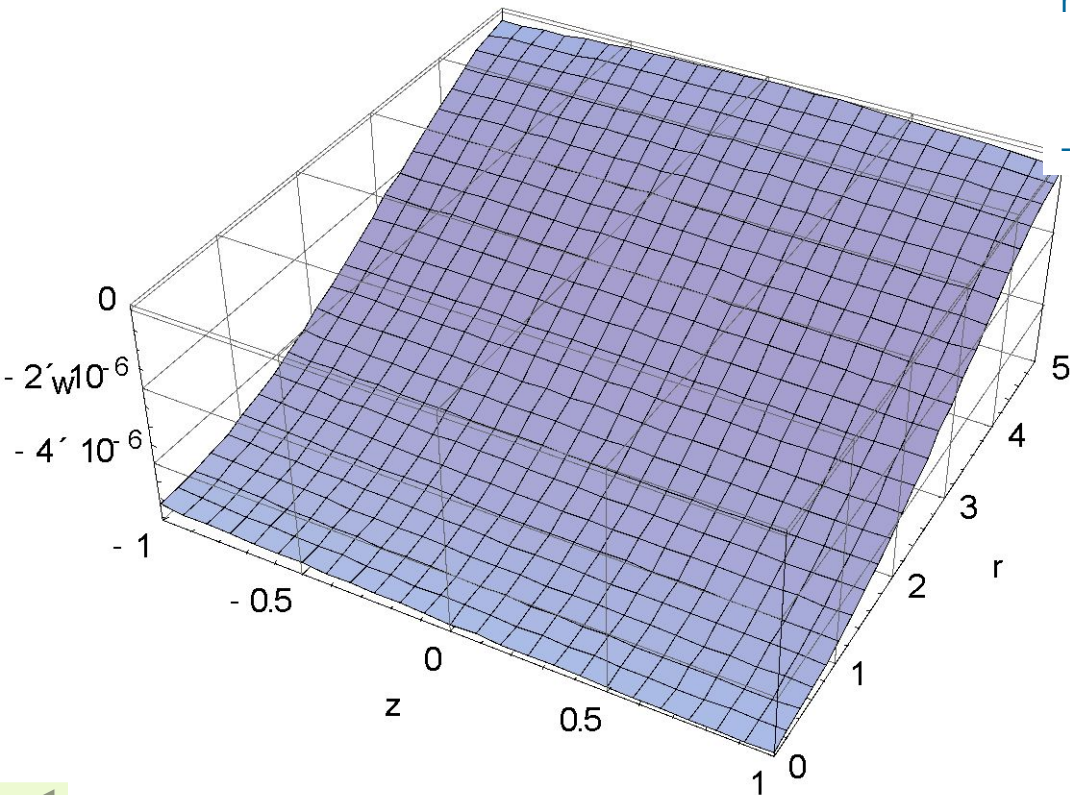
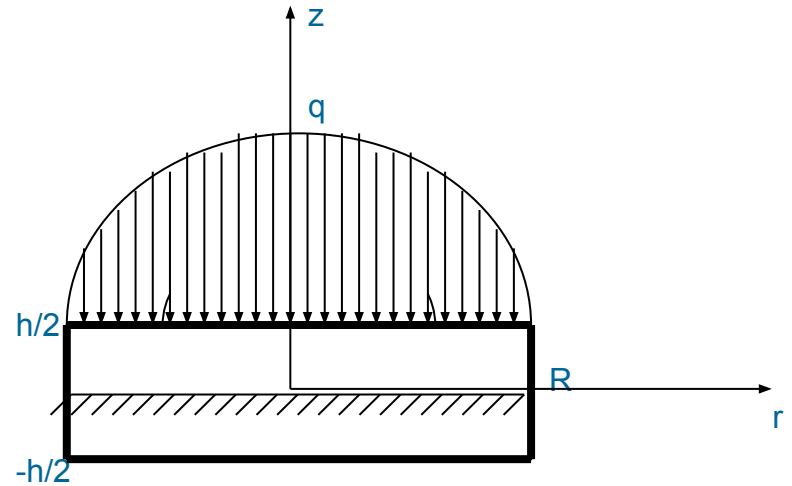


В левом нижнем углу эпюры показан прогиб  $w(r=0, z = -\frac{h}{2})$ , в правом нижнем  $w(r=0, z = \frac{h}{2})$ , в левом верхнем  $w(r=R, z = -\frac{h}{2})$ , в левом нижнем  $w(r=0, z = \frac{h}{2})$ .

# Результаты

Закрепление  
при:

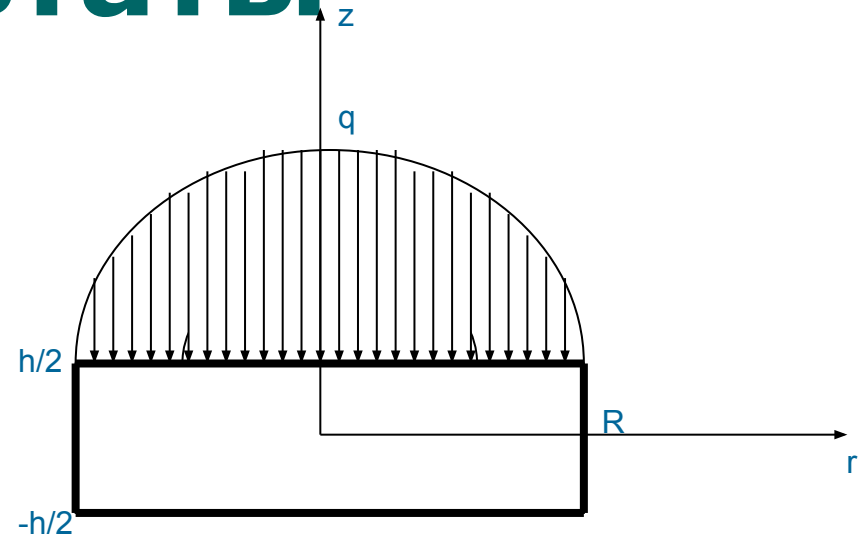
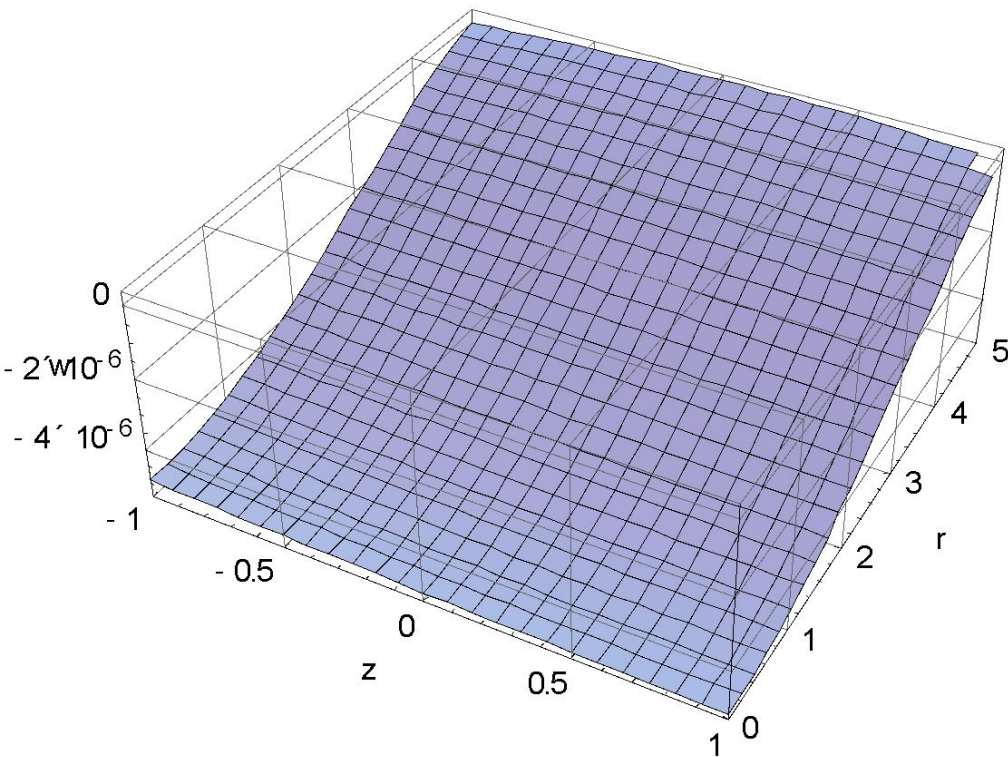
$$z_0 = 0$$



В левом нижнем углу эпюры  
показан прогиб  $w(r=0, z = -\frac{h}{2})$ , в  
правом нижнем  $w(r=0, z = \frac{h}{2})$ ,  
в левом верхнем  $w(r=R, z = -\frac{h}{2})$ ,  
в левом нижнем  $w(r=0, z = \frac{h}{2})$ .

# Результаты

Закрепление при  $z_0 = \frac{h}{2}$



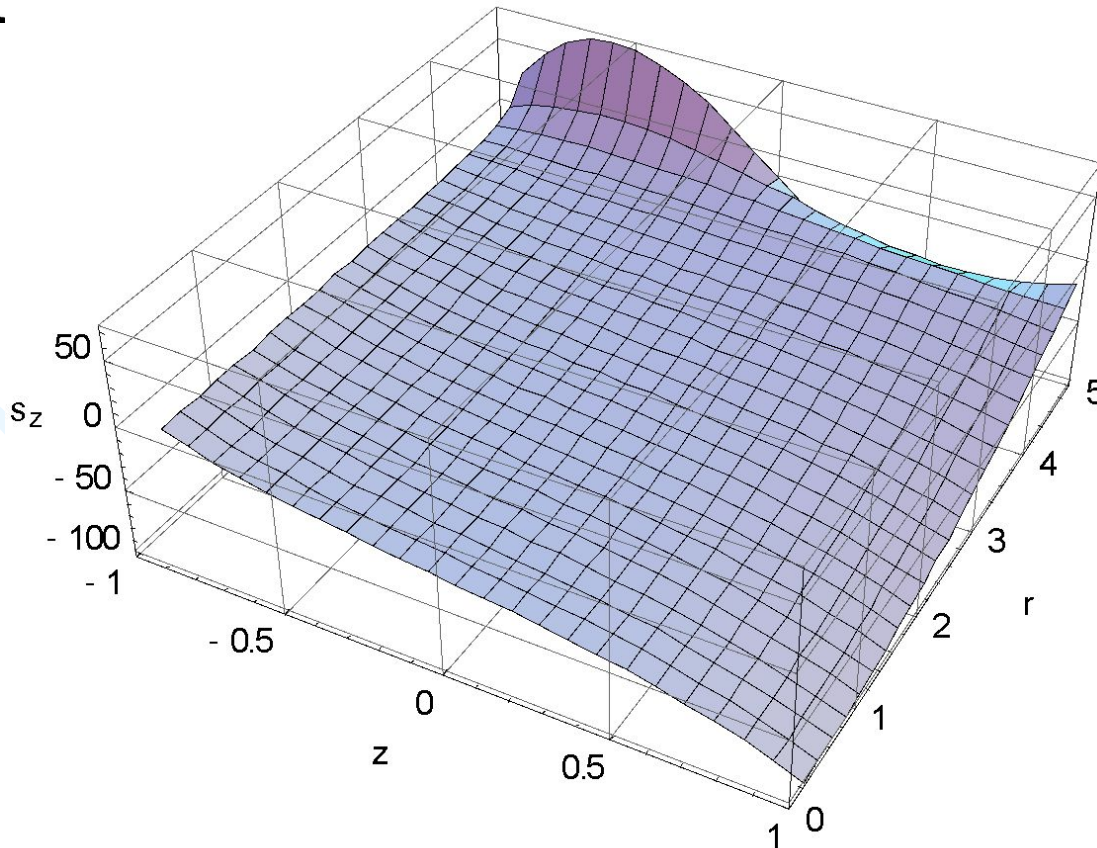
В левом нижнем углу эпюры показан прогиб  $w(r=0, z = -\frac{h}{2})$ , в правом нижнем  $w(r=R, z = \frac{h}{2})$ , в левом верхнем  $w(r=R, z = -\frac{h}{2})$ , в левом нижнем  $w(r=0, z = \frac{h}{2})$ .

# Результаты

Напряжение  $\sigma_z$

Напряжение  $\sigma_z$  в цилиндрических координатах вычисляется по формуле:

$$\sigma_z = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$



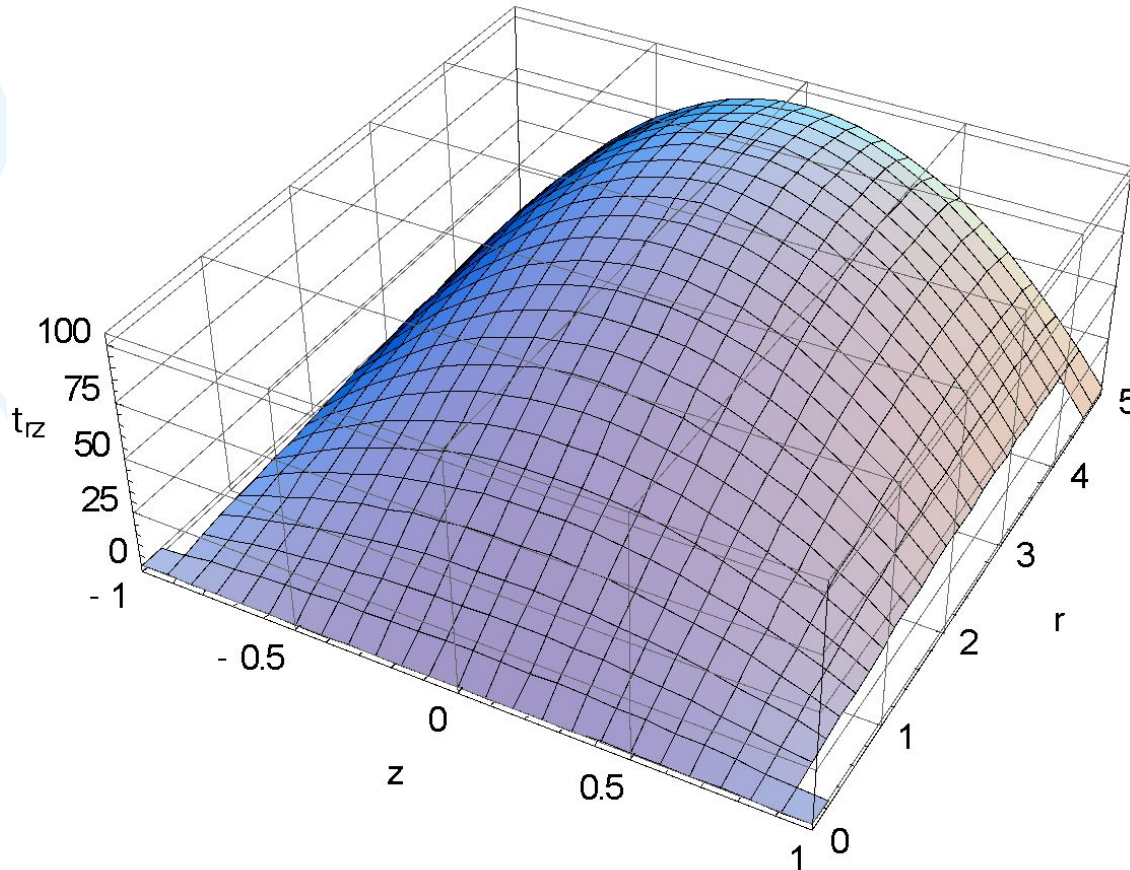


# Результаты

Напряжение  $\tau_{rz}$ :

Напряжение  $\tau_{rz}$  в цилиндрических координатах вычисляется по формуле:

$$\tau_{rz}[r, z] = G( D[u[r, z], z] + D[w[r, z], r] )$$



# Выводы

Основными новыми результатами работы являются:

1. Разработана программа для нахождения вертикального  $w$  и горизонтального  $u$  и перемещений круглой толстой плиты, нагруженной нагрузкой вида  $Q = \sum_{i=0}^n q_i r^{2i}$ , края которой находятся в абсолютно жёстких вертикальных направляющих, препятствующих тангенциальному перемещению, причём контурная окружность неподвижна

2. Проведено численное исследование напряжённо-деформированного состояния круглой пластины нагруженной параболической нагрузкой.

3. Вычислены прогибы пластины во всех точках, а также напряжения  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$ .

4. Обнаружено, что напряжения  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  не зависят от положения закрепленного контура по вертикали



Спасибо за внимание