

Белорусский государственный университет

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра методов оптимального управления

НЕХАЙ ЕКАТЕРИНА СЕРГЕЕВНА

ОПТИМАЛЬНОЕ НЕПРЯМОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Поставленные цели и задачи

- Изучить структуру опоры для задачи в классе ИУВ-1
- Построить опору для задачи в классе ИУВ-2
- Сформулировать критерий оптимального управления и критерий оптимальности опоры для ИУВ-2
- Построить программное и позиционное решение для задач в классах ИУВ-1 и ИУВ-2
- Оценить влияние внешних воздействий на систему
- Написать программную реализацию ОУ и оптимальной обратной связи

Поставленные цели и задачи

- Реализовать моделирование режима реального времени
- Провести сравнительный анализ программного и позиционного управления
- Оценить влияние задержки вычисления на реализацию оптимальной обратной связи
- Проиллюстрировать результаты на примерах



Объект исследования. Методы исследования. Область применения

Объект исследования – задачи в классах инерционных управляющих воздействий

Методы исследования – методы оптимизации, двойственный метод, сведение задач к функциональной форме.

Область применения – производственные задачи, использующие регуляторы.

Актуальность

Возможность построения реализации оптимальной обратной связи позволит управлять системой в режиме реального времени, корректировать это управление в ходе его построения, а также учитывать влияние внешних возмущений на объект управления

Инерционные управляющие воздействия первого порядка.

Постановка задачи

Пусть $T = [t_*, t^*]$ промежуток управления. Скалярную функцию $u(t)$, $t \in T$, назовем *инерционным управляющим воздействием первого порядка*, если она является решением уравнения

$$\dot{u} = v, u(t_*) = u_0 \quad (1)$$

с ограниченной кусочнонепрерывной функцией $v(t)$, $t \in T$

$$c'x(t^*) \rightarrow \max,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, x(t_*) = x_0,$$

$$\dot{u} = v, u(t_*) = u_0, \quad (2)$$

$$Hx(t^*) = g,$$

$$|u(s)| \leq L, s \in S_h, |v(t)| \leq M, t \in T_h,$$

где $x = x(t)$ — n -вектор состояния динамической системы в момент времени t ;
 $u = u(t)$ — значение скалярного управляющего воздействия;

$A(t)$, $b(t)$, $t \in T$ — кусочнонепрерывные $n \times n$ -матричная и n -векторная функции,
 H — $m \times n$ матрица терминальных ограничений, g — m -вектор, $\text{rank } H = m < n$.

$$v(t) = v(t_* + kh), t \in [t_* + kh, t_* + (k+1)h[, k = \overline{0, N-1}.$$

$$S = T, S_h = \{t_* + h, t_* + 2h, \dots, t^*\}, T_h = \{t_*, t_* + 2h, \dots, t^* - h\}.$$

Задача с фазовыми ограничениями

Если ввести дополнительную фазовую переменную $x_{n+1} = u$, то задачу (2) можно трактовать как задачу с фазовым ограничением

$$\begin{aligned} \bar{c}'\bar{x}(t^*) \rightarrow \max, \dot{\bar{x}} &= \bar{A}(t)\bar{x} + \bar{b}(t)v, \bar{x}(t_*) = (x_0, u_0), \bar{H}\bar{x}(t^*) = g, \\ |x_{n+1}(s)| &\leq L, s \in S; |v(t)| \leq M, t \in T, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\bar{x} = (x, x_{n+1}), \bar{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & b(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{H} = (H \ 0), \bar{c} = (c, 0).$$

Эквивалентная функциональная форма

Задача (2) эквивалентна следующей задаче линейного программирования (ЛП)

$$\sum_{t \in T_h} c(t)v(t) \rightarrow \max,$$
$$-L - u_0 \leq h \sum_{t=t_*}^{s-h} v(t) \leq L - u_0, s \in S_h, \quad (4)$$

$$\sum_{t \in T_h} h_{(i)}(t)v(t) = \tilde{g}_i, i = \overline{1, m},$$

$$-M \leq v(t) \leq M, t \in T_h,$$

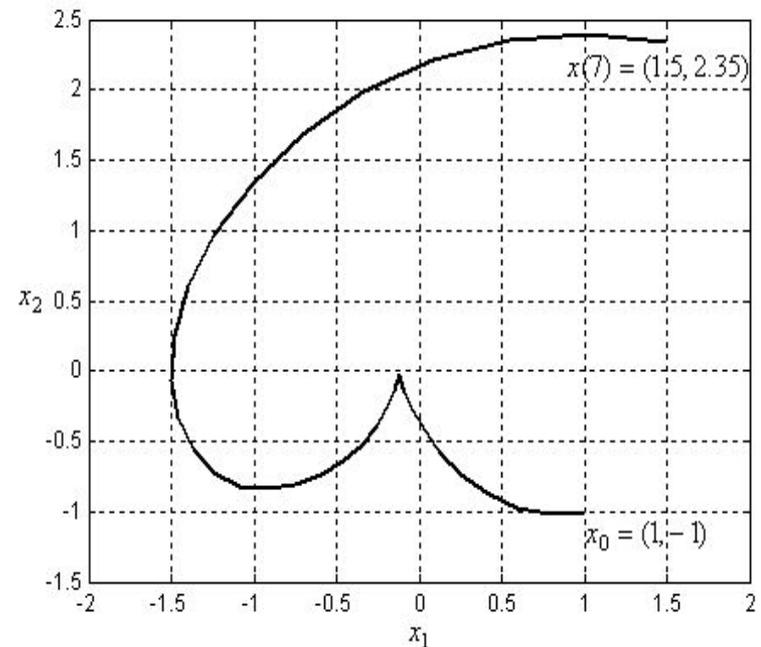
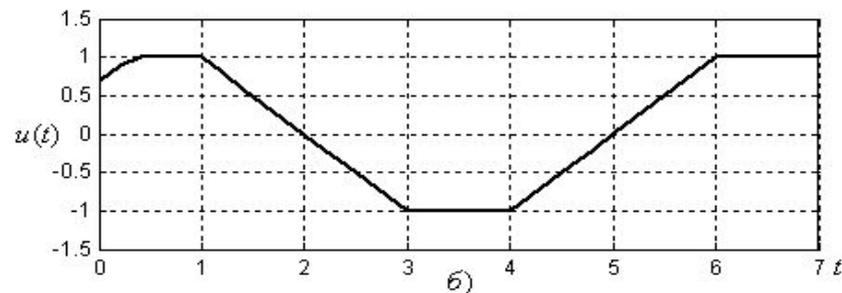
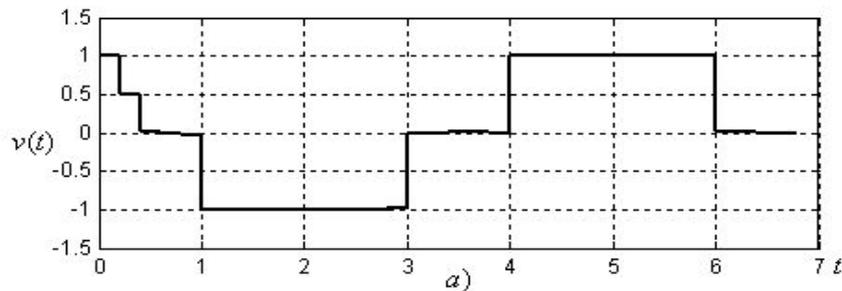
элементы которой вычисляются с помощью динамического двойственного метода.

Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Синтез оптимальных обратных связей в классе инерционных управлений. // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №2. – С. 22 - 49

Программное решение в классе инерционных управляющих воздействий первого порядка

Рассмотрим терминальную задачу управления

$$\begin{aligned} x_2(7) \rightarrow \max, \quad \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1, \\ u &= v, \quad u(0) = 0.7, \quad x_1(7) = 1.5, \\ |v(t)| &\leq 1, \quad t \in T_h, \quad |u(s)| \leq 1, \quad t \in S_h, \quad T = [0; 7]. \end{aligned} \quad (5)$$



Позиционное решение

Для того, чтобы ввести понятие позиционного решения, рассматриваемую в классе инерционных управлений терминальную задачу (2) погрузим в семейство задач

$$\begin{aligned}c'x(t^*) &\rightarrow \max, \\ \dot{x} &= A(t)x + b(t)u, \quad x(\tau) = y, \\ \dot{v} &= v, \quad u(\tau) = z, \\ Hx(t^*) &= g, \\ |u(s)| &\leq L, \quad s \in S(\tau) = [\tau, t^*], \quad |v(t)| \leq M, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t^*].\end{aligned}\tag{6}$$

зависящее от скаляров $\tau \in T_h$, z и n – вектора y .

Пусть

$$v^0(t | \tau, y, z), \quad t \in T(\tau),\tag{7}$$

-оптимальный программный управляющий сигнал задачи (6) для позиции

(τ, y, z) ,

$G_\tau \subset R^{n+1}$, - множество всех состояний (y, z) , для которых задача (6) имеет решение.

Оптимальная обратная связь

Функцию

$$v^0(\tau, y, z) = v^0(\tau | \tau, y, z), (y, z) \in G_\tau, \tau \in T_h, \quad (8)$$

назовем *оптимальным управляющим сигналом типа (дискретной) обратной связи* в задаче (6).

Подход, используемый в работе для решения проблем оптимального синтеза основан на построении по ходу каждого конкретного процесса управления реализации оптимальной обратной связи

$$v^*(t) \equiv v^0(t, x^*(t), u^*(t)), t \in T, \quad (9)$$

где $x^*(t), t \in T$, – траектория системы

$$\dot{x}^*(t) \equiv A(t)x^*(t) + b(t)u^*(t) + w^*(t), \quad (10)$$

$$\dot{x}^*(t) \equiv v^0(t, x^*(t), u^*(t)), t \in T, x(t_*) = x_0^*, u(t_*) = u_0^*$$

описывающей поведение физического прототипа математической модели (2).

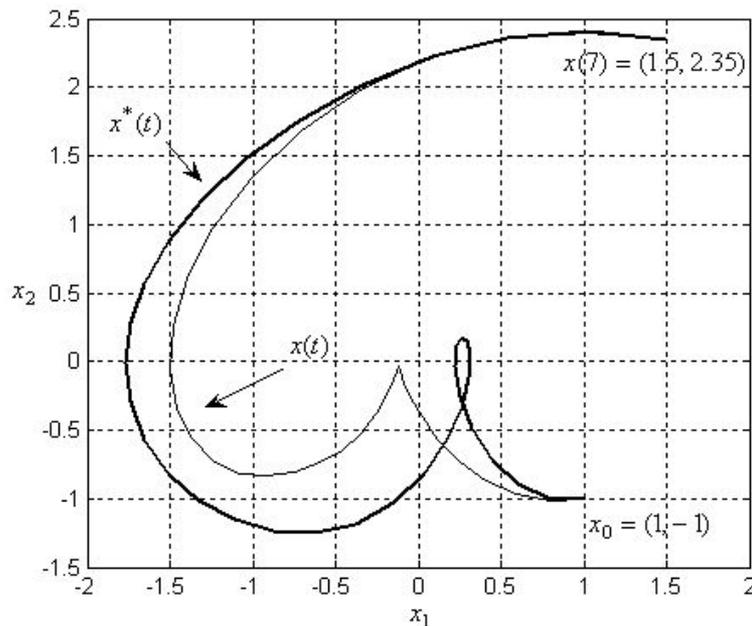
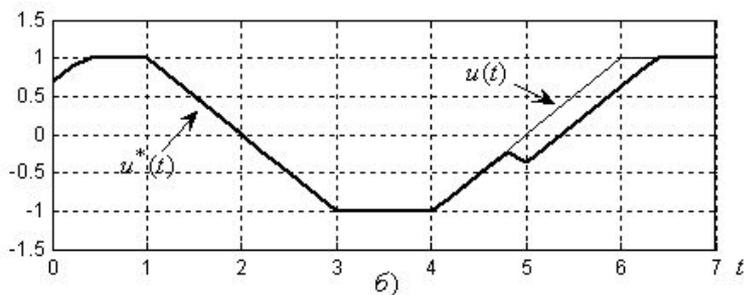
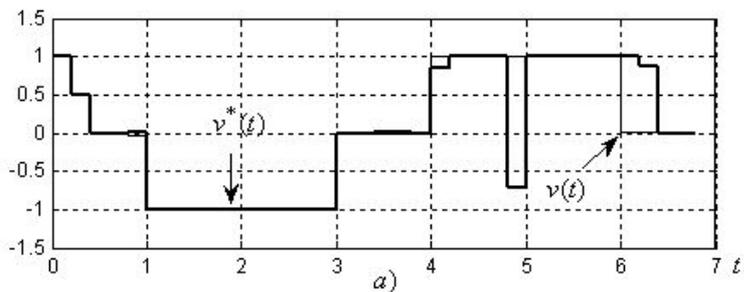
$w^*(t), t \in T$, – возмущение,

x_0^*, u_0^* – реализовавшиеся начальные состояния.

Позиционное решение в классе инерционных управляющих воздействий первого порядка

На примере задачи управления (5) покажем вид позиционного решения в предположении, что реализующееся в процессе управления возмущение имеет вид

$$w(t) = 0.5 \sin(2t), t \in [0, 5[; \quad w(t) \equiv 0, t \in [5; 7]. \quad (11)$$



Моделирование режима реального времени

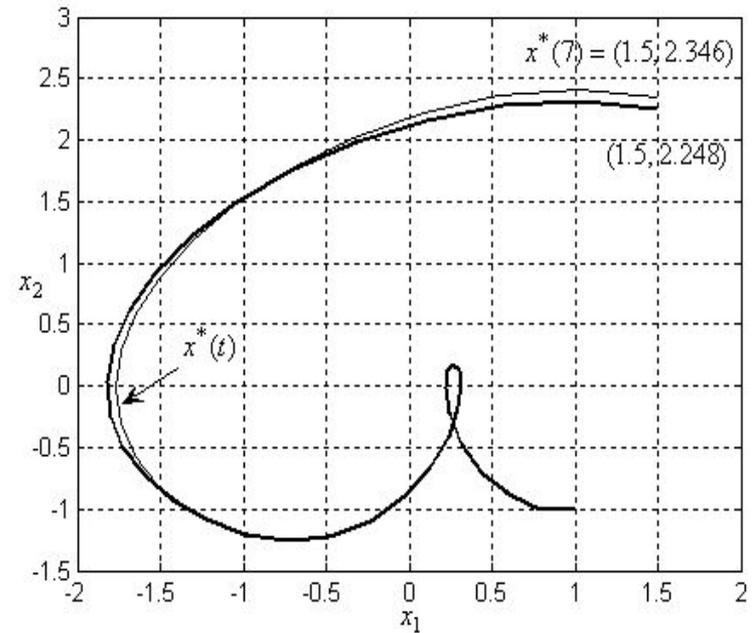
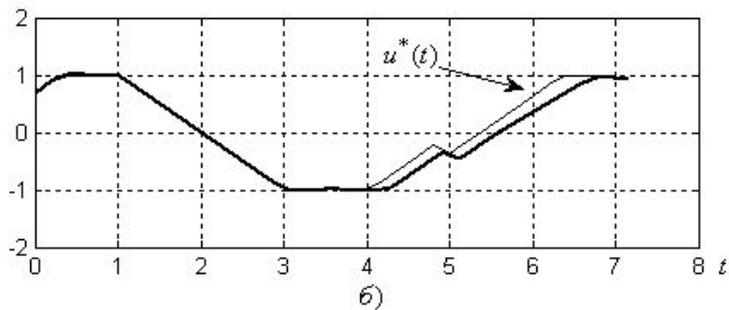
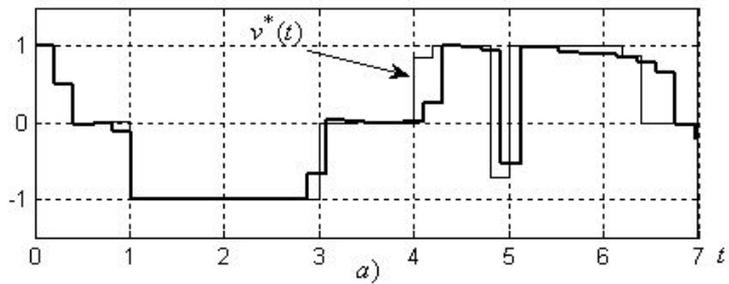
На примере задачи в классе инерционных управлений первого порядка

$$\begin{aligned}x_2(7) &\rightarrow \max, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \\ x_1(0) &= 1, x_2(0) = -1, \\ \dot{w} &= v, u(0) = 0.7, \\ x_1(7) &= 1.5, \\ |v(t)| &\leq 1, t \in T_h, \\ |u(s)| &\leq 1, t \in S_h, \\ T &= [0; 7].\end{aligned}\tag{12}$$

проиллюстрируем влияние задержки вычисления на оптимальное воздействие и оптимальный сигнал.

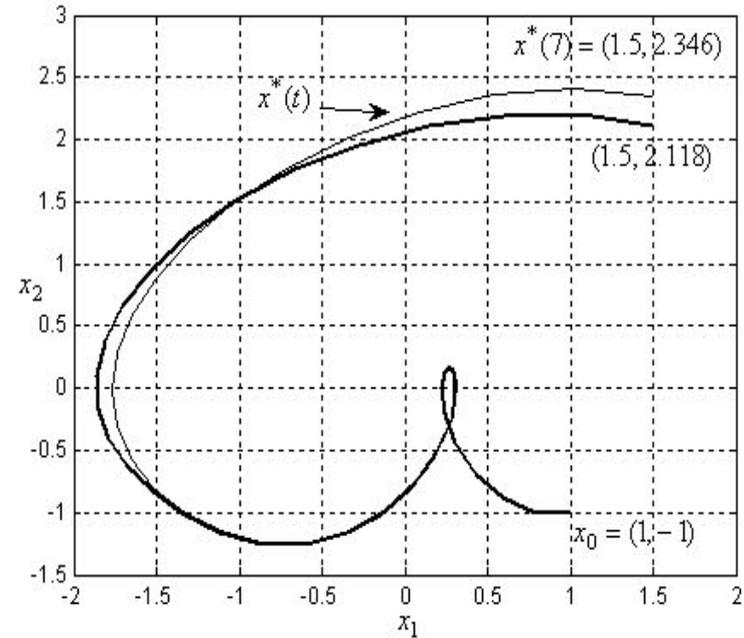
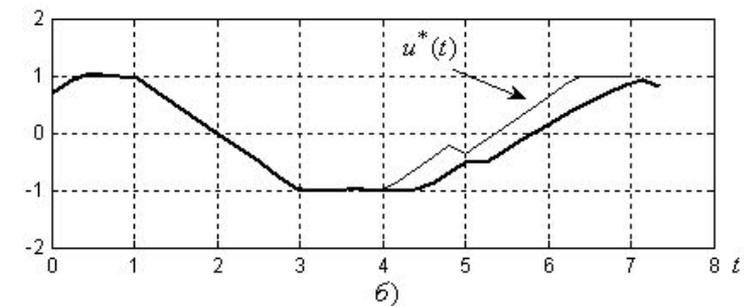
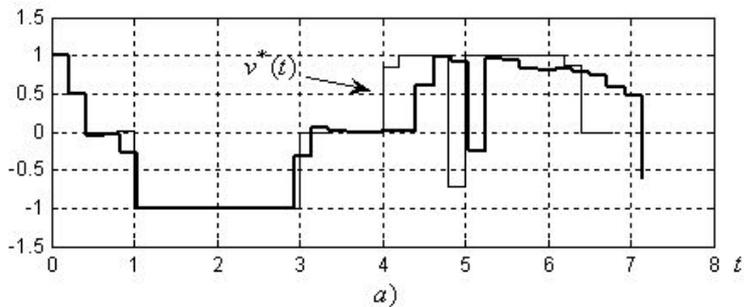
Моделирование режима реального времени.

Если вычисления будут происходить с задержкой $s(\tau) = 0.005$ значение критерия качества уменьшится на величину равную 0.098.



Моделирование режима реального времени.

Если вычисления будут происходить с задержкой $s(\tau) = 0.01$ значение критерия качества уменьшится на величину равную 0.228.



Инерционные управляющие воздействия второго порядка.

Постановка задачи

Пусть $T = [t_*, t^*]$ промежуток управления. Скалярную функцию $u(t)$, $t \in T$ назовем *инерционным управляющим воздействием второго порядка*, если она является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = v, \quad \dot{x}(t_*) = \dot{x}_0, \quad x(t_*) = x_0, \quad (13)$$

с ограниченной кусочнонепрерывной функцией $v(t)$, $t \in T$

$$c'x(t^*) \rightarrow \max,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0,$$

$$\ddot{x} = v, \quad u(t_*) = u_0, \quad \dot{x}(t_*) = \dot{x}_0 \quad (14)$$

$$Hx(t^*) = g,$$

$$|u(s)| \leq L, \quad s \in S_h, \quad |v(t)| \leq M, \quad t \in T_h.$$

где $x = x(t)$ — n -вектор состояния динамической системы в момент времени t ;

$u = u(t)$ — значение скалярного управляющего воздействия;

$A(t)$, $b(t)$, $t \in T$ — кусочнонепрерывные $n \times n$ матричная и n -векторная функции,

H — $m \times n$ матрица терминальных ограничений, g — m -вектор, $\text{rank } H = m < n$.

$$v(t) = v(t_* + kh), \quad t \in [t_* + kh, t_* + (k+1)h], \quad k = \overline{0, N-1}.$$

$$S = T, \quad S_h = \{t_* + h, t_* + 2h, \dots, t^*\}, \quad T_h = \{t_*, t_* + 2h, \dots, t^* - h\}.$$

Задача с фазовыми ограничениями

Если ввести дополнительные фазовые переменные $x_{n+1} = u$, $x_{n+2} = \dot{u}$, то задачу (14) можно трактовать как задачу с фазовым ограничением

$$\begin{aligned} \bar{c}'\bar{x}(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{\bar{x}} &= \bar{A}(t)\bar{x} + \bar{b}(t)v, \quad \bar{x}(t_*) = (x_0, u_0, \dot{u}_0), \quad \bar{H}\bar{x}(t^*) = g, \\ |x_{n+1}(s)| &\leq L, s \in S; \quad |v(t)| \leq M, t \in T, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\bar{x} = (x, x_{n+1}, x_{n+2}), \quad \bar{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & b(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}(t) = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{H} = (H \ 0 \ 0), \quad \bar{c} = (c, 0, 0).$$

Эквивалентная функциональная форма

Задача (14) эквивалентна следующей задаче линейного программирования (ЛП)

$$\sum_{t \in T_h} c(t)v(t) \rightarrow \max,$$
$$-L - u_0 - (s - t_*)\bar{u}_0 \leq \sum_{t=t_*}^{s-h} d(s,t)v(t) \leq L - u_0 - (s - t_*)\bar{u}_0, \quad s \in S_h, \quad (16)$$

$$\sum_{t \in T_h} h_{(i)}(t)v(t) = \tilde{g}_i, \quad i = \overline{1, m},$$

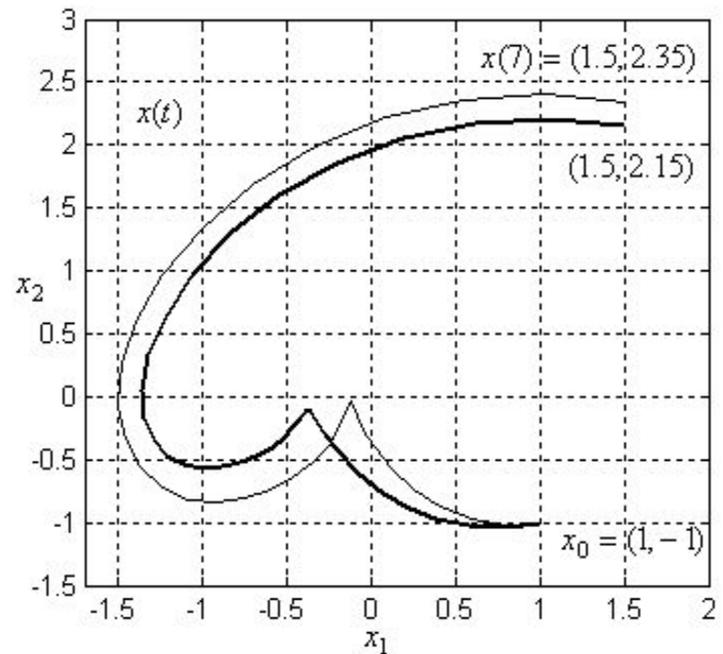
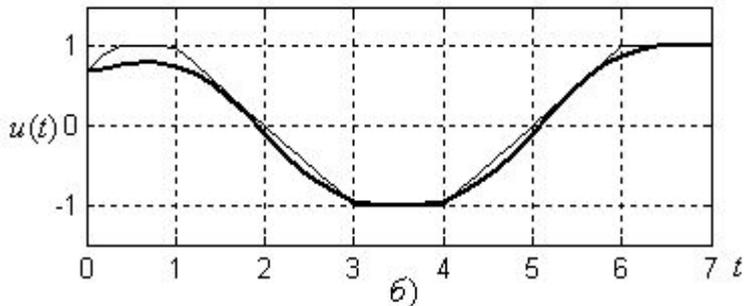
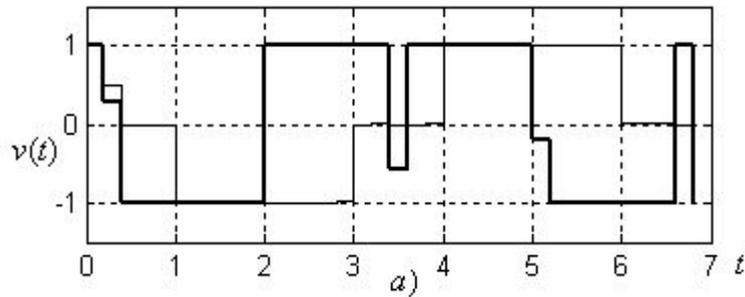
$$-M \leq v(t) \leq M, \quad t \in T_h,$$

элементы которой вычисляются с помощью динамического двойственного метода.

Программное решение в классе инерционных управляющих воздействий второго порядка

Рассмотрим терминальную задачу управления

$$\begin{aligned}
 &x_2(7) \rightarrow \max, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + u, x_1(0) = 1, x_2(0) = -1, \\
 &u = v, u(0) = 0.7, u(7) = 0, x_1(7) = 1.5, \\
 &|v(t)| \leq 1, t \in T_h, |u(s)| \leq 1, t \in S_h, T = [0; 7].
 \end{aligned}
 \tag{17}$$



Позиционное решение в классе инерционных управляющих воздействий второго порядка

В классе инерционных управляющих воздействий второго порядка рассмотрим задачу

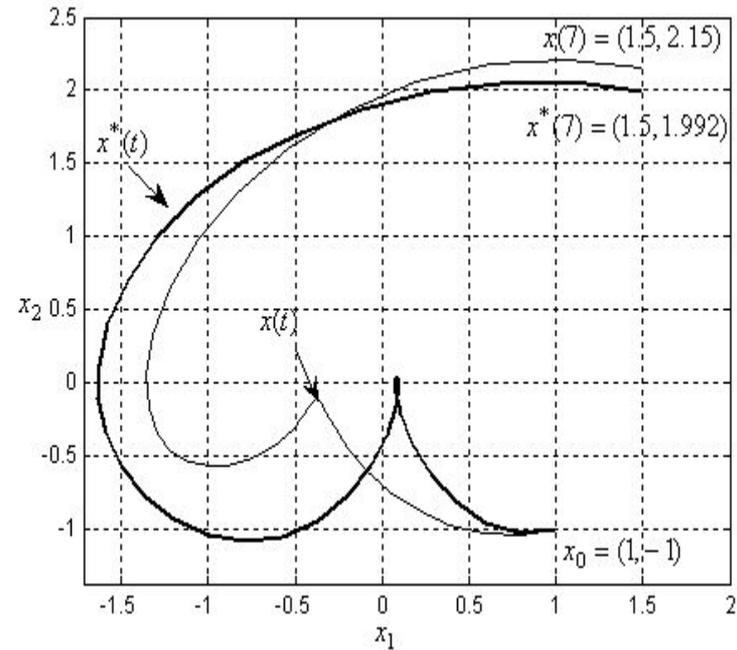
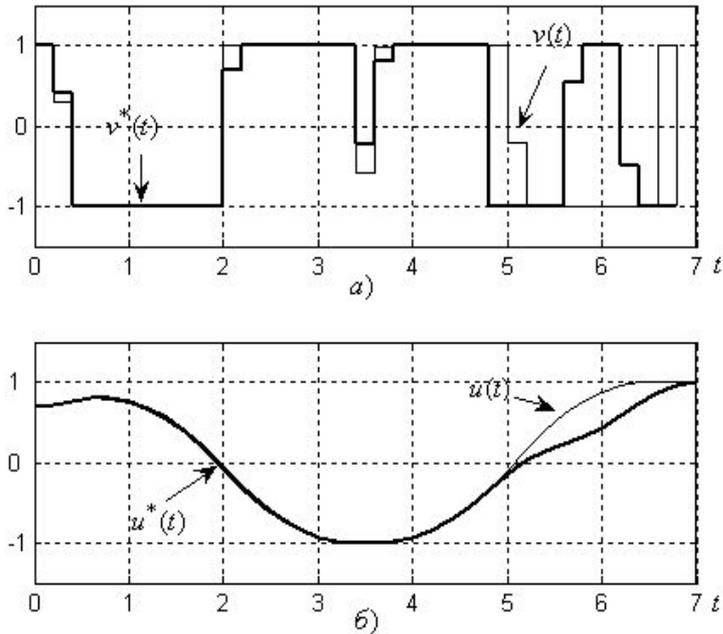
$$\begin{aligned}x_2(7) &\rightarrow \max, \\x_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \\x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = -1, \\v &= v, \quad u(0) = 0.7, \quad \dot{u}(0) = 0, \\x_1(7) &= 1.5, \\|v(t)| &\leq 1, \quad t \in T_h, \quad |u(s)| \leq 1, \quad t \in S_h, \quad T = [0; 7].\end{aligned}\tag{18}$$

Был выбран период квантования равный 0.2.

Реализация оптимальной обратной связи построена в предположении, что в процессе управление реализовалось возмущение вида:

$$w(t) = 0.5 \sin(2t), \quad t \in [0, 5[; \quad w(t) \equiv 0, \quad t \in [5; 7];\tag{19}$$

Позиционное решение в классе инерционных управляющих воздействий второго порядка



Значение критерия качества для программного решения равно 2.15, для позиционного решения - 1.992

Заключение

В данной работе исследованы терминальные задачи ОУ в классе инерционных управлений первого и второго порядков с учетом геометрических ограничений на управляющий сигнал, управляющее воздействие и его первую производную.

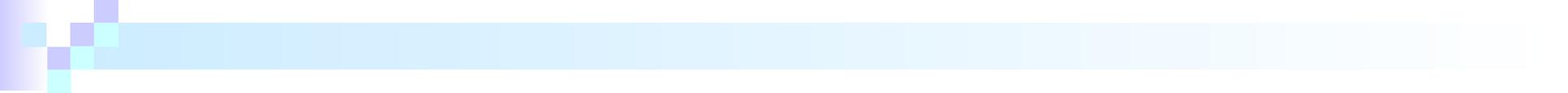
- Описана структура опоры, приведены сопровождающие элементы, сформулированы принцип максимума и принцип - максимума, критерий оптимальности опоры.
- Построено программное решение, получена реализация оптимальной обратной связи.
- Приведены графики, отображающие вид программного и позиционного решений в классах инерционных управлений первого и второго порядков, а также фазовые траектории системы.
- Демонстрируется влияние величины задержки вычисления на значение достигаемого критерия качества.

Опубликованность результатов

- Тезисы совместного с Н.С. Павленок доклада опубликованы в сборнике конференции «Еругинские чтения - 2009»
- Тезисы доклада, представленного на 66-й научной конференции студентов и аспирантов, приняты к публикации

[Посетить сайт магистранта](#)

Перейти к началу презентации



Спасибо за внимание