Белорусский государственный университет

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра методов оптимального управления

НЕХАЙ ЕКАТЕРИНА СЕРГЕЕВНА

ОПТИМАЛЬНОЕ НЕПРЯМОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Поставленные цели и задачи

- Изучить структуру опоры для задачи в классе ИУВ-1
- Построить опору для задачи в классе ИУВ-2
- Сформулировать критерий оптимального управления и критерий оптимальности опоры для ИУВ-2
- Построить программное и позиционное решение для задач в классах ИУВ-1 и ИУВ-2
- Оценить влияние внешних воздействий на систему
- Написать программную реализацию ОУ и оптимальной обратной связи

Поставленные цели и задачи

- Реализовать моделирование режима реального времени
- Провести сравнительный анализ программного и позиционного управления
- Оценить влияние задержки вычисления на реализацию оптимальной обратной связи
- Проиллюстрировать результаты на примерах

Объект исследования. Методы исследования. Область применения

Объект исследования – задачи в классах инерционных управляющих воздействий

Методы исследования – методы оптимизации, двойственный метод, сведение задач к функциональной форме.

Область применения – производственные задачи, использующие регуляторы.

Актуальность

Возможность построения реализации оптимальной обратной связи позволит управлять системой в режиме реального времени, корректировать это управление в ходе его построения, а также учитывать влияние внешних возмущений на объект управления

Инерционные управляющие воздействия первого порядка.

Постановка задачи

Пусть $T=[t_*,t^*]$ промежуток управления. Скалярную функцию *u*(*t*), $t\in T$, назовем *инерционным управляющим воздействием первого порядка*, если она является решением уравнения

$$\dot{u}=v,\ u(t_*)=u_0 \qquad (1)$$

с ограниченной кусочнонепрерывной функцией *v*(*t*), $t\in T$.

$$
\begin{aligned}
&c'x(t^*)\to \max,\\
&\dot{x}=A(t)x+b(t)u,\ \ x(t_*)=x_0,\\
&\dot{u}=v,\ \ u(t_*)=u_0,\\
&Hx(t^*)=g,\\
&|u(s)|\le L,\ s\in S_h,\ \ |v(t)|\le M,\ t\in T_h,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где $x=x(t)$ — *n*-вектор состояния динамической системы в момент времени *t*;
u = *u*(*t*) — значение скалярного управляющего воздействия;
A(*t*), *b*(*t*), $t\in T$ — кусочнонепрерывные $n\times n$матричная и *n*векторная функции,
H – $m\times n$ матрица терминальных ограничений, *g* – *m*-вектор, rank *H* = *m*<*n*.

$$v(t)=v(t_*+kh),\ t\in[t_*+kh,t_*+(k+1)h[,\ k=\overline{0,N-1}.$$

$$S=T,\ S_h=\{t_*+h,t_*+2h,\ldots,t^*\},\ T_h=\{t_*,t_*+2h,\ldots,t^*-h\}.$$

Задача с фазовыми ограничениями

Если ввести дополнительную фазовую переменную $x_{n+1} = u$, то задачу (2) можно трактовать как задачу с фазовым ограничением

$$\bar{c}'\bar{x}(t^*) \to \max, \dot{\bar{x}} = \bar{A}(t)\bar{x} + \bar{b}(t)v, \bar{x}(t_*) = (x_0, u_0), \bar{H}\bar{x}(t^*) = g,$$
$$|x_{n+1}(s)| \le L, s \in S; |v(t)| \le M, t \in T, \tag{3}$$

где

$$\bar{x} = (x, x_{n+1}), \bar{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & b(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{H} = (H \quad 0), \bar{c} = (c, 0).$$

Эквивалентная функциональная форма

Задача (2) эквивалентна следующей задаче линейного программирования (ЛП)

$$\sum_{t \in T_h} c(t)v(t) \to \max,$$

$$-L - u_0 \le h\sum_{t=t_*}^{s-h} v(t) \le L - u_0, s \in S_h, \qquad (4)$$

$$\sum_{t \in T_h} h_{(i)}(t)v(t) = \tilde{g}_i, i = \overline{1,m},$$

$$-M \le v(t) \le M, t \in T_h,$$

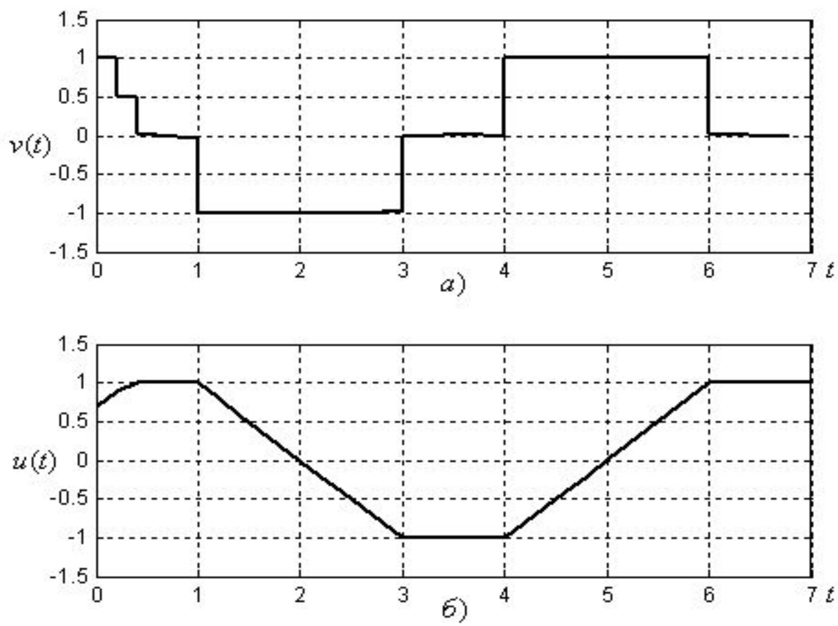
элементы которой вычисляются с помощью динамического двойственного метода.

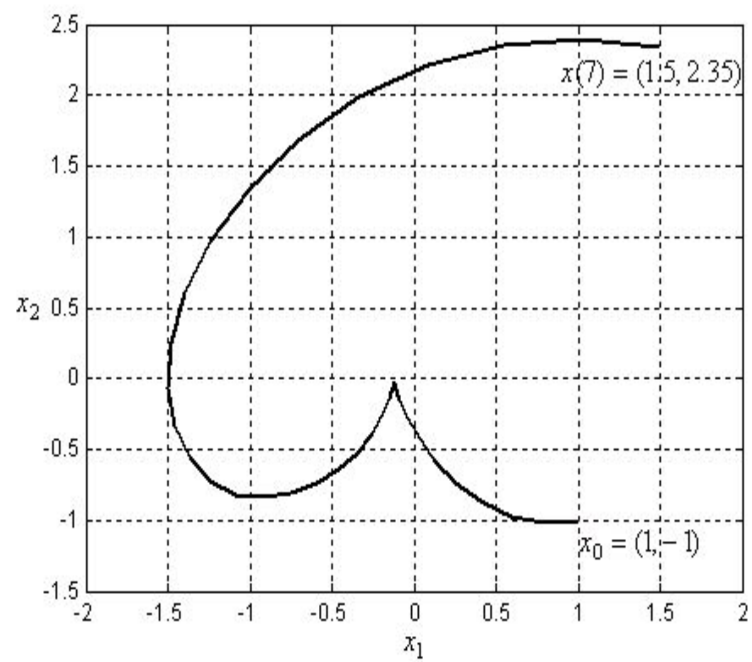
Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Синтез оптимальных обратных связей в классе инерционных управлений. // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №2. – С. 22 - 49

Программное решение в классе инерционных управляющих воздействий первого порядка

Рассмотрим терминальную задачу управления

$$
\begin{gathered}
x_2(7) \to \max, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + u, x_1(0) = 1, x_2(0) = -1, \\
\dot{u} = v, u(0) = 0.7, x_1(7) = 1.5, \\
|v(t)| \le 1, t \in T_h, |u(s)| \le 1, t \in S_h, T = [0; 7].
\end{gathered} \tag{5}
$$





Позиционное решение

Для того, чтобы ввести понятие позиционного решения, рассматриваемую в классе инерционных управлений терминальную задачу (2) погрузим в семейство задач

$$
\begin{aligned}
& c'x(t^*) \to \max, \\
& \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \ x(\tau) = y, \\
& \dot{u} = v, \ u(\tau) = z, \\
& Hx(t^*) = g, \\
& |u(s)| \le L, \ s \in S(\tau) = [\tau, t^*], \ |v(t)| \le M, \ t \in T(\tau) = [\tau, t^*].
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

зависящее от скаляров $\tau \in T_h$, *z* и *n* – вектора *y*.

Пусть

$$v^0(t \mid \tau, y, z), \ t \in T(\tau), \qquad (7)$$

-оптимальный программный управляющий сигнал задачи (6) для позиции (τ, y, z),

$G_\tau \subset R^{n+1}$, - множество всех состояний (*y, z*), для которых задача (6) имеет решение.

Оптимальная обратная связь

Функцию

$$v^0(\tau, y, z) = v^0(\tau \mid \tau, y, z),\ (y, z) \in G_\tau,\ \tau \in T_h, \tag{8}$$

назовем *оптимальным управляющим сигналом типа (дискретной) обратной связи* в задаче (6).

Подход, используемый в работе для решения проблем оптимального синтеза основан на построении по ходу каждого конкретного процесса управления реализации оптимальной обратной связи

$$v^*(t) \equiv v^0(t, x^*(t), u^*(t)), t \in T, \tag{9}$$

где $x^*(t), t \in T$, – траектория системы

$$\dot{x}^*(t) \equiv A(t)x^*(t) + b(t)u^*(t) + w^*(t), \tag{10}$$

$$\dot{u}^*(t) \equiv v^0(t, x^*(t), u^*(t)), t \in T, x(t_*) = x_0^*, u(t_*) = u_0^*$$

описывающей поведение физического прототипа математической модели (2).

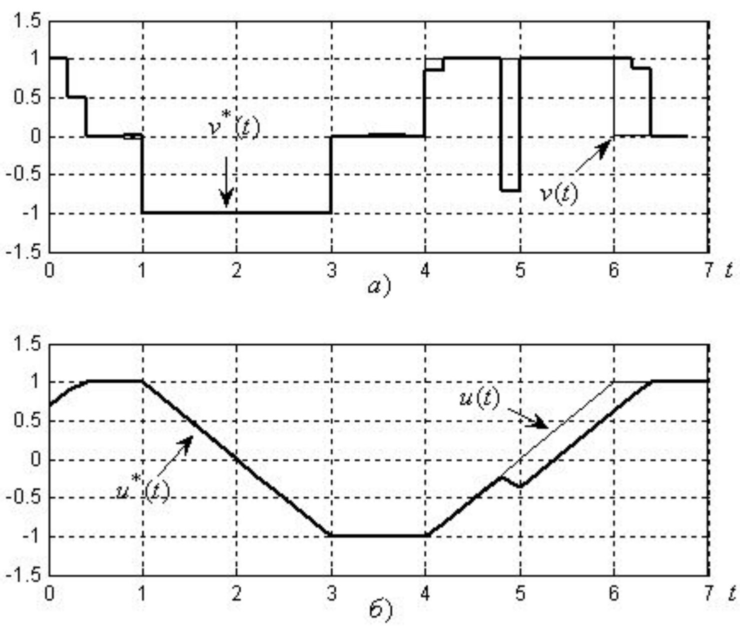
$w^*(t), t \in T$, – возмущение,

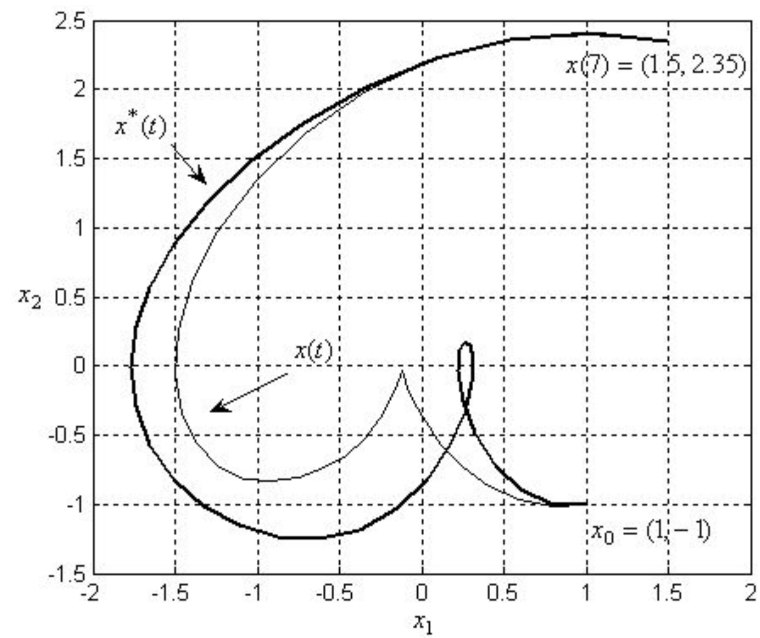
x_0^*, u_0^* – реализовавшиеся начальные состояния.

Позиционное решение в классе инерционных управляющих воздействий первого порядка

На примере задачи управления (5) покажем вид позиционного решения в предположении, что реализующееся в процессе управления возмущение имеет вид

$$w(t) = 0.5\sin(2t), t \in [0,5[; \quad w(t) \equiv 0, t \in [5;7]. \qquad (11)$$





Моделирование режима реального времени

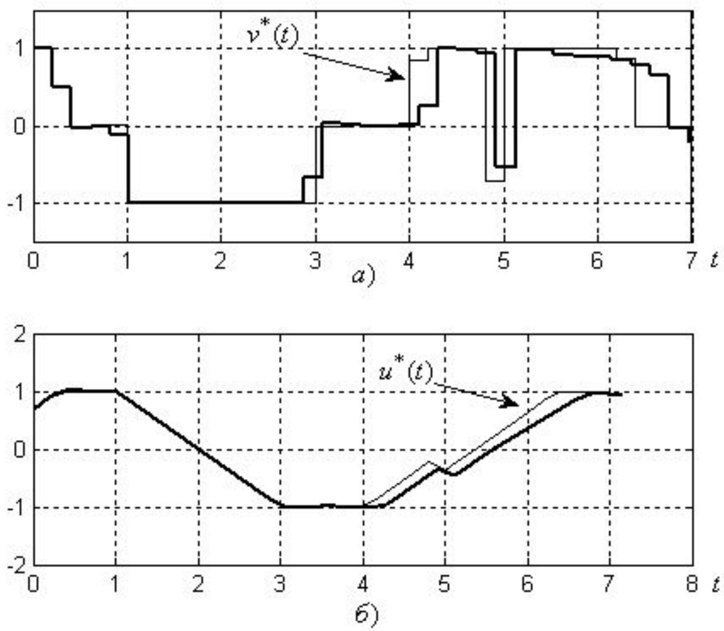
На примере задачи в классе инерционных управлений первого порядка

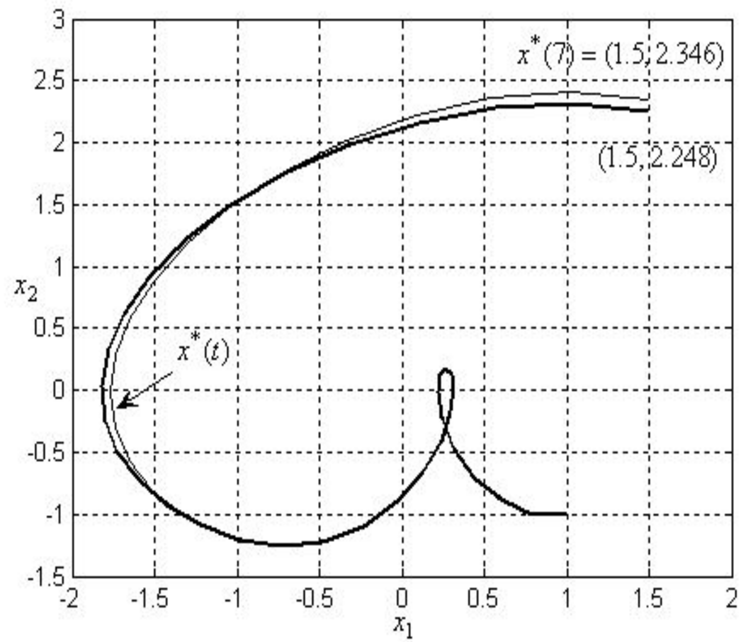
$$
\begin{aligned}
& x_2(7) \to \max, \\
& \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \\
& x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1, \\
& \dot{u} = v,\ u(0) = 0.7, \\
& x_1(7) = 1.5, \\
& |v(t)| \le 1,\ t \in T_h, \\
& |u(s)| \le 1,\ t \in S_h, \\
& T = [0; 7].
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

проиллюстрируем влияние задержки вычисления на оптимальное воздействие и оптимальный сигнал.

Моделирование режима реального времени.

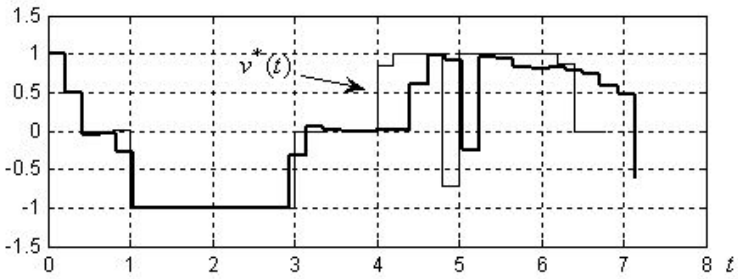
Если вычисления будут происходить с задержкой $s(\tau) = 0.005$
значение критерия качества уменьшится на величину равную 0.098.



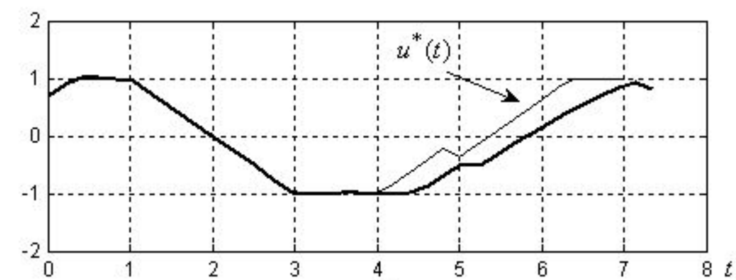


Моделирование режима реального времени.

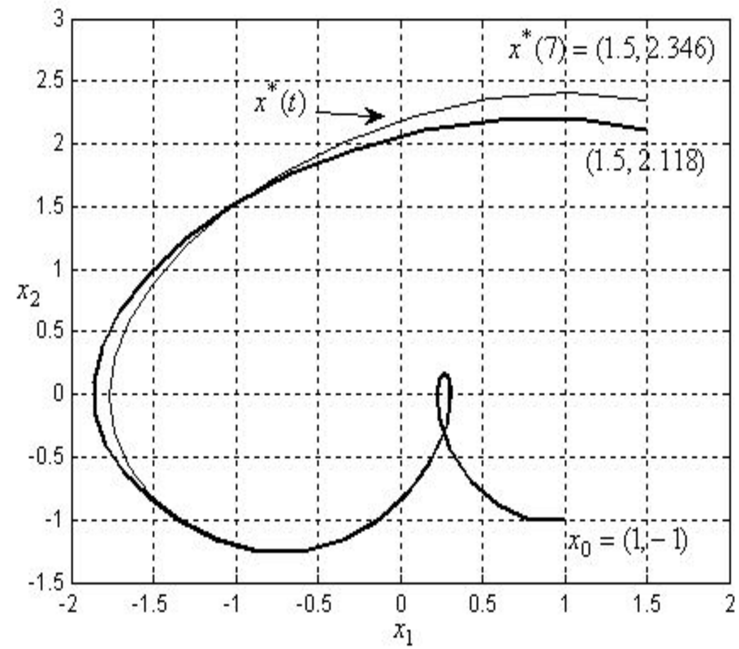
Если вычисления будут происходить с задержкой $s(\tau) = 0.01$ значение критерия качества уменьшится на величину равную 0.228.



а)



б)



Инерционные управляющие воздействия второго порядка.

Постановка задачи

Пусть $T=[t_*,t^*]$ промежуток управления. Скалярную функцию *u*(*t*), $t\in T$ назовем *инерционным управляющим воздействием второго порядка*, если она является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{u}=v,\ \dot{u}(t_*)=\dot{u}_0,\ u(t_*)=u_0, \tag{13}$$

с ограниченной кусочнонепрерывной функцией *v*(*t*), $t\in T$.

$$\begin{aligned}
&c'x(t^*)\to \max,\\
&\dot{x}=A(t)x+b(t)u,\ \ x(t_*)=x_0,\\
&\ddot{u}=v,\ \ u(t_*)=u_0,\ \ \dot{u}(t_*)=\dot{u}_0\\
&Hx(t^*)=g,\\
&|u(s)|\le L,\ \ s\in S_h,\ \ |v(t)|\le M,\ \ t\in T_h.
\end{aligned} \tag{14}$$

где $x=x(t)$ — *n*-вектор состояния динамической системы в момент времени *t*;
u = *u*(*t*) — значение скалярного управляющего воздействия;
A(*t*), *b*(*t*), $t\in T$ — кусочнонепрерывные $n\times n$ матричная и *n*-векторная функции,
H – $m\times n$ матрица терминальных ограничений, *g* – *m*-вектор, rank *H* = *m*<*n*.

$$v(t)=v(t_*+kh),\ t\in[t_*+kh,t_*+(k+1)h[,\ k=\overline{0,N-1}.$$

$$S=T,\ S_h=\{t_*+h,t_*+2h,\dots,t^*\},\ T_h=\{t_*,t_*+2h,\dots,t^*-h\}.$$

Задача с фазовыми ограничениями

Если ввести дополнительные фазовые переменные $x_{n+1} = u,\ x_{n+2} = \dot{u}$, то задачу (14) можно трактовать как задачу с фазовым ограничением

$$\bar{c}'\bar{x}(t^*) \to \max,\ \dot{\bar{x}} = \bar{A}(t)\bar{x} + \bar{b}(t)v,\ \bar{x}(t_*) = (x_0, u_0, \dot{u}_0),\ \bar{H}\bar{x}(t^*) = g,$$
$$|x_{n+1}(s)| \le L,\ s \in S;\ |v(t)| \le M,\ t \in T, \tag{15}$$

где

$$\bar{x} = (x, x_{n+1}, x_{n+2}),\ \bar{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & b(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{b}(t) = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{H} = (H\ \ 0\ \ 0),\ \bar{c} = (c, 0, 0).$$

Эквивалентная функциональная форма

Задача (14) эквивалентна следующей задаче линейного программирования (ЛП)

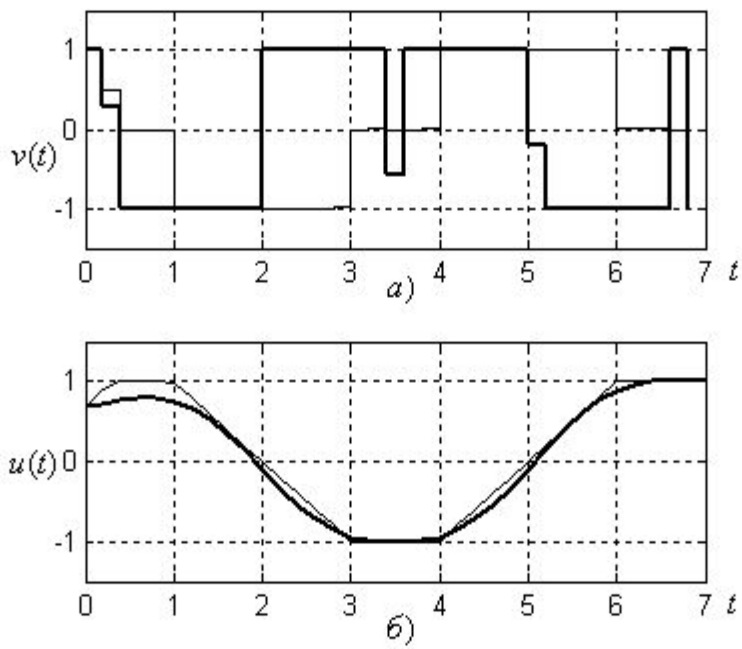
$$
\begin{aligned}
&\sum_{t\in T_h} c(t)v(t) \to \max, \\
&-L-u_0-(s-t_*)\dot{u}_0 \le \sum_{t=t_*}^{s-h} d(s,t)v(t) \le L-u_0-(s-t_*)\dot{u}_0,\ s\in S_h, \\
&\sum_{t\in T_h} h_{(i)}(t)v(t)=\tilde{g}_i,\ i=\overline{1,m}, \\
&-M\le v(t)\le M,\ t\in T_h,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

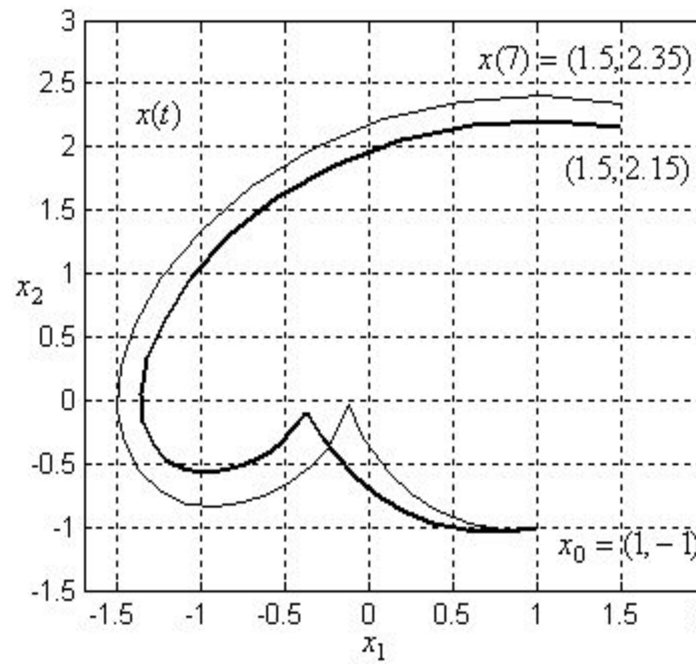
элементы которой вычисляются с помощью динамического двойственного метода.

Программное решение в классе инерционных управляющих воздействий второго порядка

Рассмотрим терминальную задачу управления

$$
\begin{aligned}
&x_2(7) \to \max,\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u,\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1,\\
&\dot{u} = v,\ u(0) = 0.7,\ \dot{u}(0) = 0,\ x_1(7) = 1.5,\\
&|v(t)| \le 1,\ t \in T_h,\ |u(s)| \le 1,\ t \in S_h,\ T = [0;7].
\end{aligned}
\tag{17}
$$





Позиционное решение в классе инерционных управляющих воздействий второго порядка

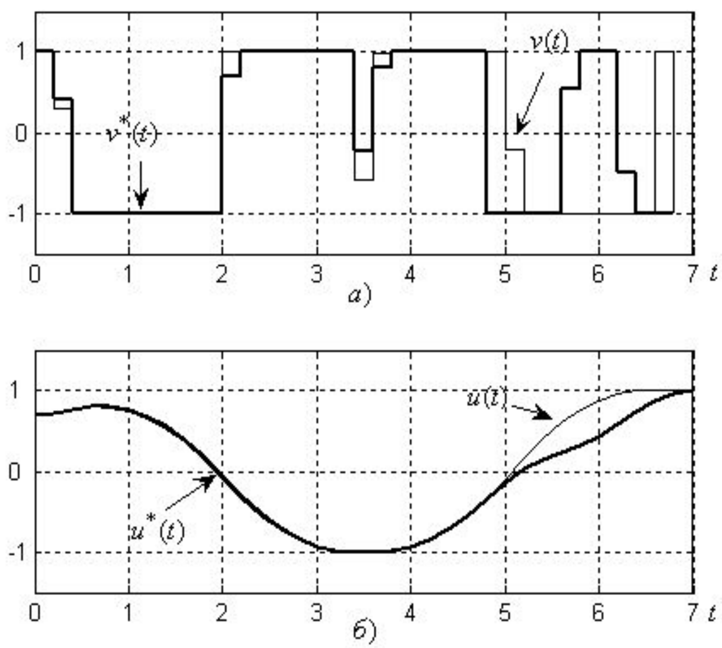
В классе инерционных управляющих воздействий второго порядка рассмотрим задачу

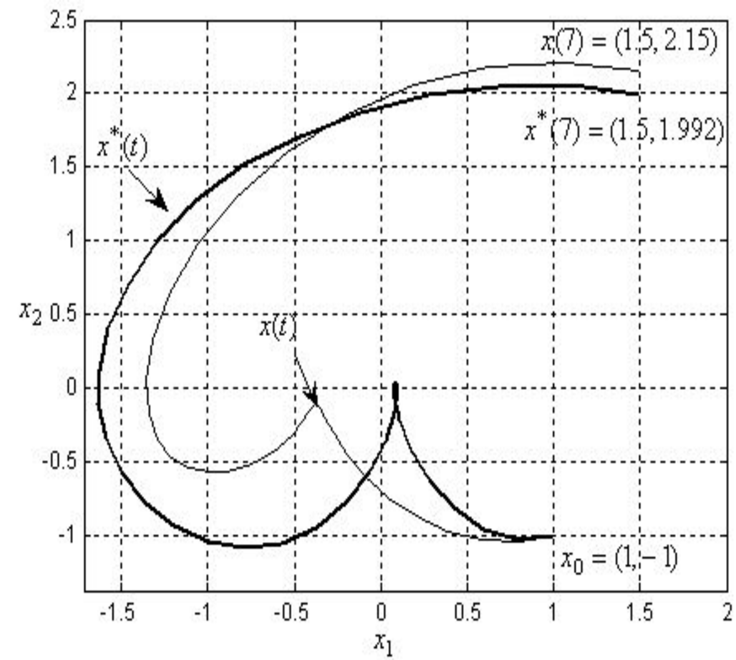
$$
\begin{aligned}
& x_2(7) \to \max, \\
& \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \\
& x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1, \\
& \ddot{u} = v,\ u(0) = 0.7,\ \dot{u}(0) = 0, \\
& x_1(7) = 1.5, \\
& |v(t)| \le 1,\ t \in T_h,\ |u(s)| \le 1,\ t \in S_h,\ T = [0; 7].
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Был выбран период квантования равный 0.2.
Реализация оптимальной обратной связи построена в предположении, что в процессе управление реализовалось возмущение вида:

$$
w(t) = 0.5\sin(2t),\ t \in [0,5[; \quad w(t) \equiv 0,\ t \in [5; 7]; \tag{19}
$$

Позиционное решение в классе инерционных управляющих воздействий второго порядка





Значение критерия качества для программного решения равно 2.15, для позиционного решения - 1.992

Заключение

В данной работе исследованы терминальные задачи ОУ в классе инерционных управлений первого и второго порядков с учетом геометрических ограничений на управляющий сигнал, управляющее воздействие и его первую производную.

- Описана структура опоры, приведены сопровождающие элементы, сформулированы принцип максимума и принцип - максимума, критерий оптимальности опоры.
- Построено программное решение, получена реализация оптимальной обратной связи.
- Приведены графики, отображающие вид программного и позиционного решений в классах инерционных управлений первого и второго порядков, а также фазовые траектории системы.
- Демонстрируется влияние величины задержки вычисления на значение достигаемого критерия качества.

Опуликованность результатов

- Тезисы совместного с Н.С. Павленок доклада опубликованы в сборнике конференции «Еругинские чтения - 2009»

- Тезисы доклада, представленного на 66-й научной конференции студентов и аспирантов, приняты к публикации

Посетить сайт магистранта

Перейти к началу презентации

Спасибо за внимание