

Приближённые вычисления интегралов

интегрированный урок
алгебры и информатики
Учителя : Мещерина В.В.и Волков В.Т.

Цель урока:

- Научить вычислять определённые интегралы с помощью ПЭВМ в случае, когда первообразная F для подинтегральной функции не выражается через элементарные функции.

План урока

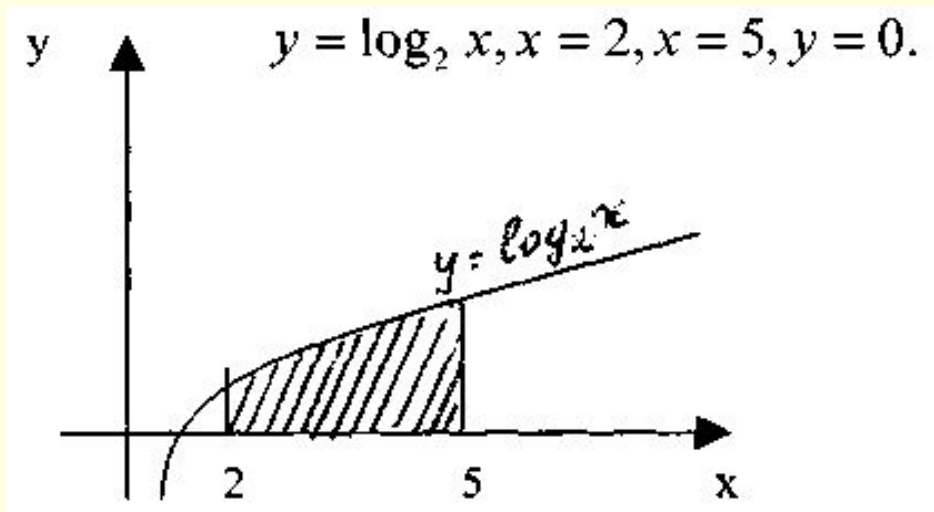
- Приближённый метод вычисления определённого интеграла. Формула трапеции.
- Составление программы для вычисления площади криволинейной трапеции.
- Отчёт по программе.

Ход урока:

- Приближённый метод вычисления определённого интеграла. Формула трапеции.

Проблемная задача

Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями :



В процессе решения задачи повторить схему вычисления площади фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций.

- Построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.
- Найти абсциссы X_1 и X_2 точек пересечения этих графиков.
- Если точек пересечения две, то определить, график какой из функций на отрезке $[x_1, x_2]$ расположен выше.
- Найти площадь фигуры по формуле

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (f_1(x) - f_2(x)) dx, \text{ если } f_1(x) \geq f_2(x) \text{ на } [x_1, x_2].$$

- Если точек пересечения больше двух, то разбить фигуру на части.

Итак, решая поставленную задачу получили, что

$$S = \int_2^5 \log_2 x \, dx.$$

- Возникла ситуация, когда первообразная для подинтегральной функции не выражается через известные нам элементарные функции. В этом случае,
- для нахождения значения $\int_a^b f(x) \, dx$
- применяют приближенные методы.
- Рассмотрим один из них .
- Для простоты будем считать функцию неотрицательной и непрерывной на
- $[a, b]$.

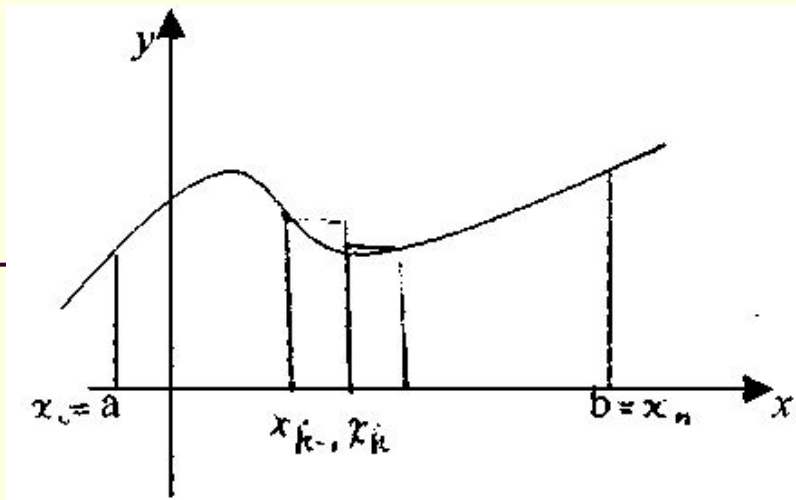


рис. 1

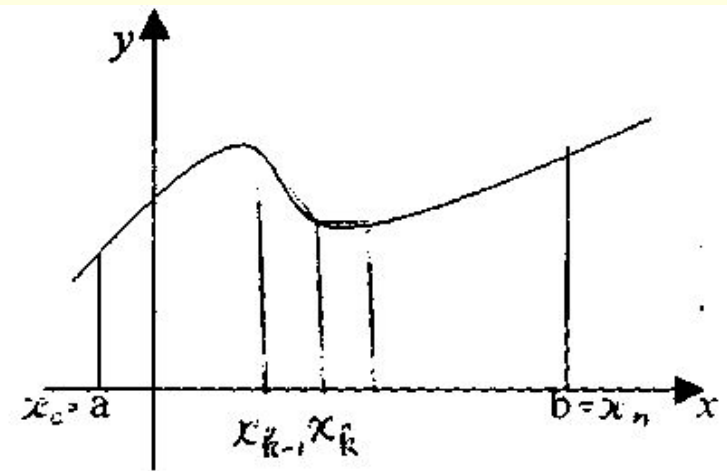


рис. 2

Для вычисления площади данной фигуры $[a, b]$ разбивается точка $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частей и на каждом участке

строят прямоугольники с высотами

$$f(x_{k-1}), \text{ где } k = 1, 2, \dots, n.$$

$$S_{np} = f(x_{k-1})\Delta x, \text{ где } \Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)). \quad (1)$$

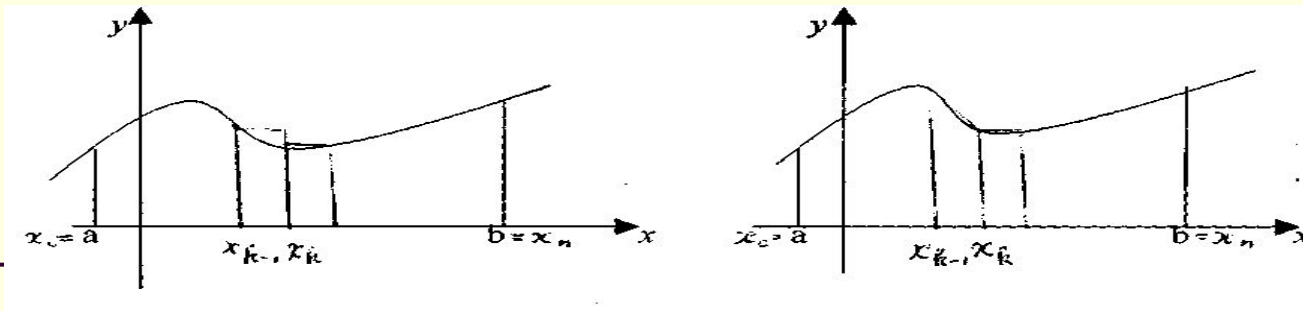
Для приближённого вычисления интеграла
можно использовать формулу
(1).

$$n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, S_n \rightarrow S, \text{ где } S = \int_a^b f(x) dx.$$

Для приближённого вычисления интеграла
можно использовать формулу

$$S_{np} = f(x_{k-1})\Delta x, \text{ где } \Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}. \quad (1).$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)). \quad (1)$$



- Рассмотрим рис. 2. Объединение каких плоских фигур ближе к криволинейной трапеции, нежели объединение прямоугольников?
- Трапеций. Сумма площадей полученных трапеций равна:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right). \quad (2)$$

Эта формула называется формулой трапеции.

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n.$$

- Точность вычисления зависит от выбора n , чем больше n , тем выше точность, но с увеличением n , вычисления становятся всё более громоздкими, поэтому при приближённом вычислении интеграла удобно использовать вычислительную технику. Беря достаточно большое значение n , можно получить сколь угодно точные оценки интеграла. Если точность вычисления интеграла задана, то можно определить на сколько частей нужно разбить отрезок, чтобы вычислить интеграл с заданной точностью.
- Существует несколько способов оценки числа n . Один из них основывается на разности оценок интеграла снизу и сверху.

Если $f(x)$ убывает, то поменять местами нижний и верхний пределы интегрирования. Это следует из того, что:

$$\frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ если } f(x) \text{ - возрастает.}$$

Если $f(x)$ убывает, то поменять местами нижний и верхний пределы интегрирования. Это следует из того, что:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \text{ если } m \leq f(x) \leq M \text{ на отрезке } [a, b] \text{ и } a < b.$$

Пример. На сколько частей надо разбить отрезок $[1;2]$, чтобы вычислить

$$\int_1^2 x^3 dx \quad \text{с точностью до } 0,01?$$

■ Решение.

$$a = 1, b = 2, f(x) = x^3, f(a) = 1, f(b) = 8.$$

$$\frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \leq 0,01.$$

$$\frac{2-1}{n} (8-1) \leq 0,01, \text{ откуда } n \geq 700.$$

2 Составление программы для вычисления площади криволинейной трапеции.

- Каждый учащийся получает индивидуальное задание. Выполняет его, используя компьютер. Отчёт по программе принимает учитель информатики.