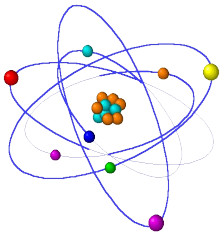
НАУКА И ОБЩЕСТВО

Богданов Юрий Иванович



КВАНТОВАЯ ИНФОРМАТИКА

Инженерия гармонии

Постулаты квантовой информатики

Первый постулат

Основной объект квантовой информатики – квантовая система. Поведение квантовой системы полностью описывается амплитудами вероятностей. Амплитуды вероятностей образуют вектор состояния в гильбертовом пространстве.

Постулаты квантовой информатики

Второй постулат

Амплитуды вероятностей как координаты вектора состояния в гильбертовом пространстве могут быть заданы в различных эквивалентных представлениях. Эквивалентные представления связаны друг с другом унитарными преобразованиями. Унитарное преобразование во времени описывает эволюцию квантовой системы.

Постулаты квантовой информатики

Третий постулат

Измерения, проводимые в различных унитарно связанных друг с другом базисных представлениях, порождают совокупность взаимно- дополнительных статистических распределений. В фиксированном представлении квадрат модуля амплитуды вероятностей задает вероятность обнаружения квантовой системы в соответствующем базисном состоянии.

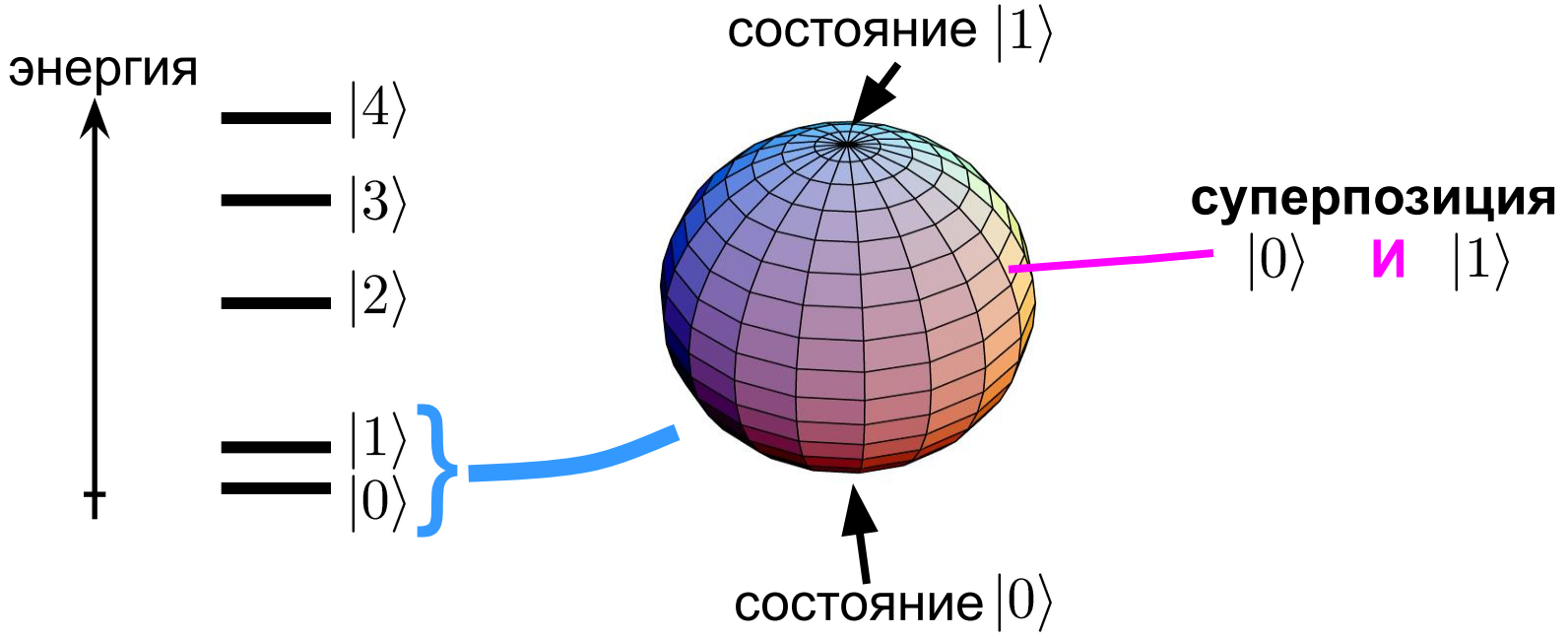
Постулаты квантовой информатики

Четвертый постулат

Пространство состояний составной системы образовано тензорным произведением пространств состояний отдельных систем.

Кубит

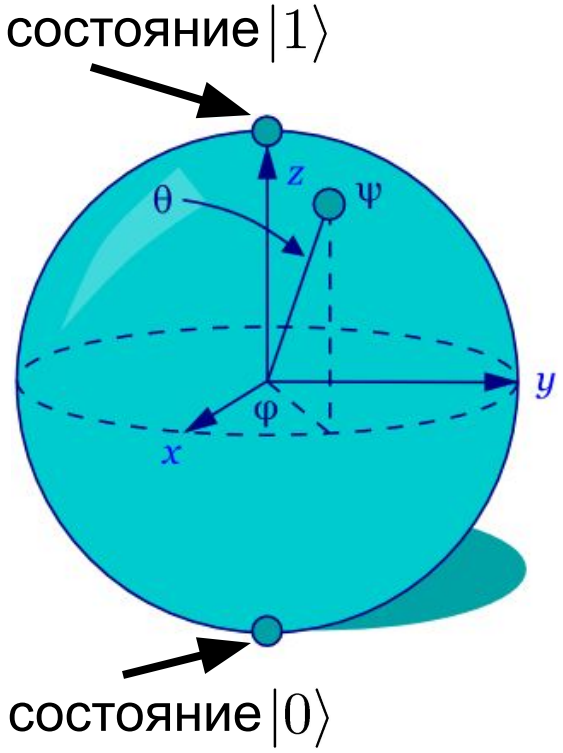
2-хуровневая квантовая система (можно различить $|0\rangle$ и $|1\rangle$)
может существовать в бесконечном числе
физических состояний *промежуточных* между $|0\rangle$ и $|1\rangle$.



Квантовая система может существовать
в двух состояниях одновременно

Сфера Блоха, суперпозиция кубитов

Сфера Блоха: геометрическая интерпретация состояний кубита как точек на единичной сфере



$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

исключаем общий фазовый множитель

$$|\Psi\rangle = \cos\tfrac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\tfrac{\theta}{2}|1\rangle$$

экв. $|\Psi\rangle = e^{-i\varphi/2}\cos\tfrac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi/2}\sin\tfrac{\theta}{2}|1\rangle$

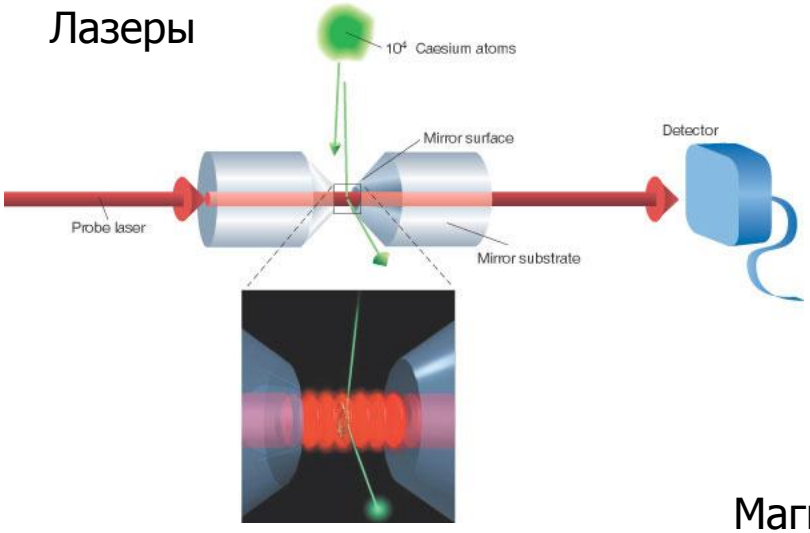
Широта и долгота на сфере Блоха

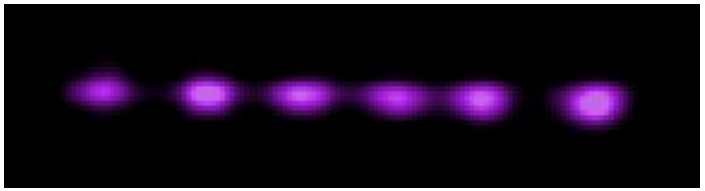
$$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Суперпозиция состояний, обозначенных стрелками – точка на сфере Блоха

Экспериментальная реализация кубитов

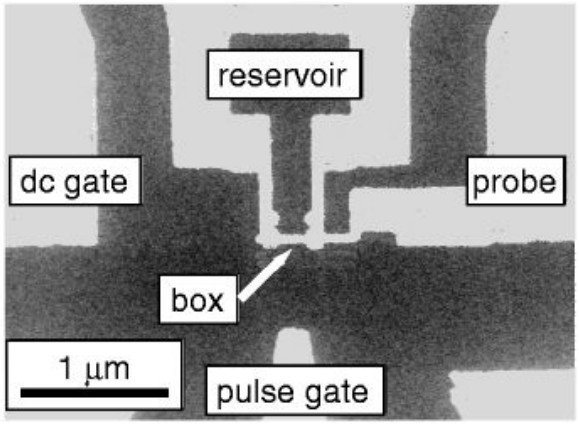
Лазеры





Ионные ловушки

Магнитные резонансы



Сверхпроводники

Примеры кубитов

Двухкубитовые состояния

$$|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle \qquad |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 = 1$$

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ если $c_{00}c_{11} - c_{01}c_{10} \neq 0$ (запутанность состояний)

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ -запутанное состояние (синглет)

$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ незапутанное состояние

Многокубитовые состояния

трёхкубитовое состояние- 8 комплексных параметров $8 = 2^3$

$$|\psi\rangle = c_{000}|000\rangle + c_{001}|001\rangle + c_{010}|010\rangle + c_{011}|011\rangle + c_{100}|100\rangle + c_{101}|101\rangle + c_{110}|110\rangle + c_{111}|111\rangle$$

n-кубитовые состояния 2^n комплексных параметров

$2^{n+1} - 2$ -действительных физически значимых параметров для состояния общего вида

$2n$ -действительных параметров для незапутанного состояния

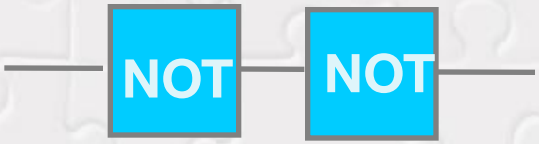
$n = 2,\ 2n = 4,\ 2^{n+1} - 2 = 6$

$n = 1000,\ 2n = 2000,\ 2^{n+1} - 2 \approx 2.14 \cdot 10^{301}$

Квантовые вентили

- **Вентиль с одним входом:** НЕ
  - Входное состояние: $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$
  - Выходное состояние: $c_1|0\rangle + c_0|1\rangle$
  - Правило преобразования чистых состояний: $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ и $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$
  - Матрица операции $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - Как и следовало ожидать:

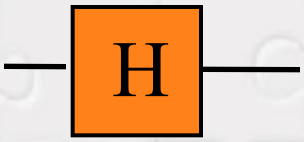
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Квантовые вентили

- **Вентиль с одним входом:** преобразование Адамара

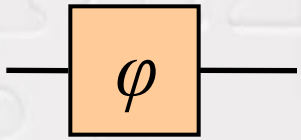
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$



  - Правило преобразования $|0\rangle \rightarrow 1/\sqrt{2}\,|0\rangle + 1/\sqrt{2}\,|1\rangle$ и $|1\rangle \rightarrow 1/\sqrt{2}\,|0\rangle - 1/\sqrt{2}\,|1\rangle$.
  - Исключая нормировочный множитель $1/\sqrt{2}$, получаем $|x\rangle \rightarrow (-1)^x\,|x\rangle - |1-x\rangle$

- **Вентиль с одним входом:** Фазовый сдвиг

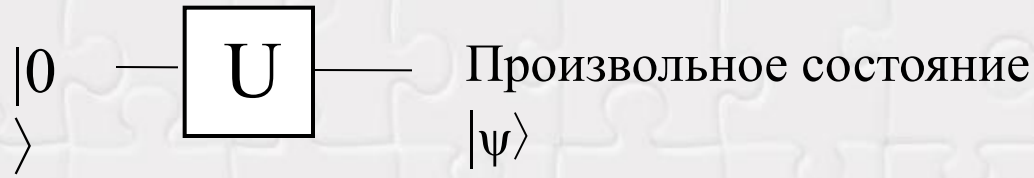
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\phi}\end{pmatrix}$$



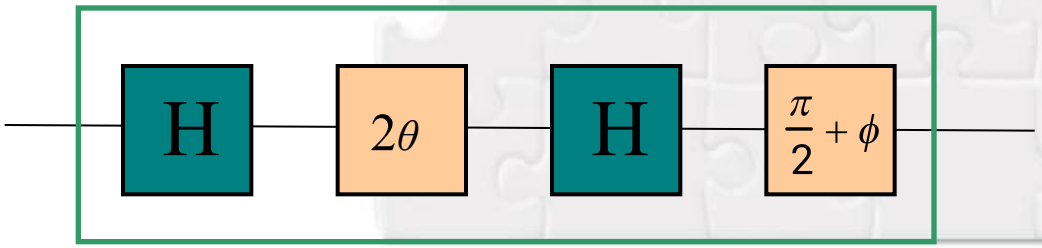
Квантовые вентили

Универсальный вентиль с одним входом

- Требование:

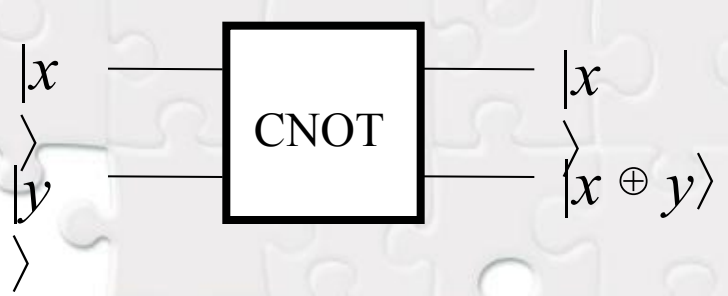


- Вентили **преобразования Адамара** и **фазового сдвига** формируют *универсальный вентиль*, любое однокубитовое состояние может быть сформировано из них.
- *Пример*: Следующая цепь генерирует $|\psi\rangle = \cos\vartheta\ |0\rangle + e^{i\varphi}\sin\vartheta\ |1\rangle$

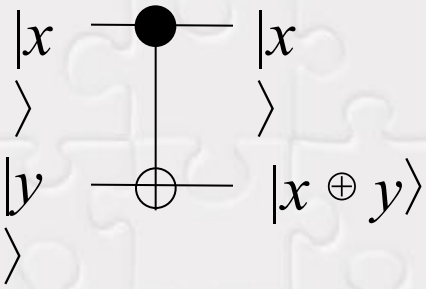


Квантовые вентили

- **Вентиль с двумя входами:** Контролируемое НЕ (Controlled NOT, CNOT)



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



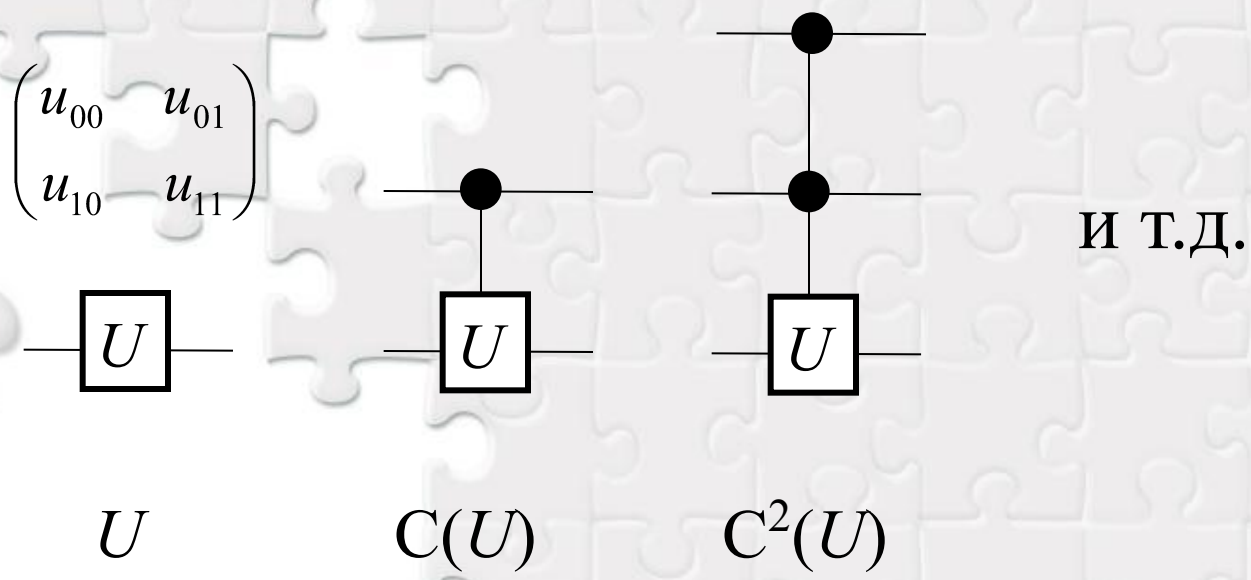
  - Правило действия операции CNOT

    $|x\rangle|0\rangle \rightarrow |x\rangle||x\rangle$ и $|x\rangle|1\rangle \rightarrow |x\rangle||\mathrm{NOT}\ x\rangle$

    Преобразование $|x\rangle|0\rangle \rightarrow |x\rangle||x\rangle$ *похоже на операцию клонирования*, Но это не так. Это преобразование действует только на чистые состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$

Квантовые вентили

- Очень полезны обобщённые контролирующие вентили которые контролируют некоторую однокубитовую унитарную операцию *U*



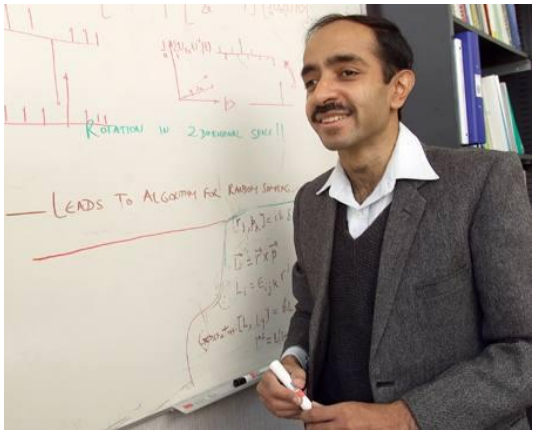
Квантовые алгоритмы

Д. Дойч

Р. Джозс

Алгоритм Дойча-Джозса

Proc. R. Soc. London A, 439, 553 (1992)



Л. К. Гровер

Поисковый алгоритм Гровера

Phys. Rev. Lett., 79, 325 (1997)

П. В. Шор

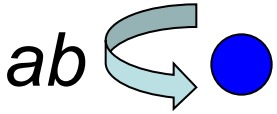
Алгоритм факторизации больших чисел Шора

SIAM J. Comp., 26, 1484 (1997)

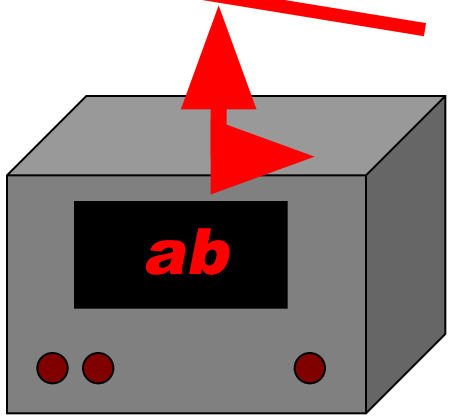
Сверхплотное кодирование

Алиса

Боб



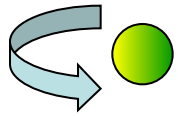
Формула измерительного прибора



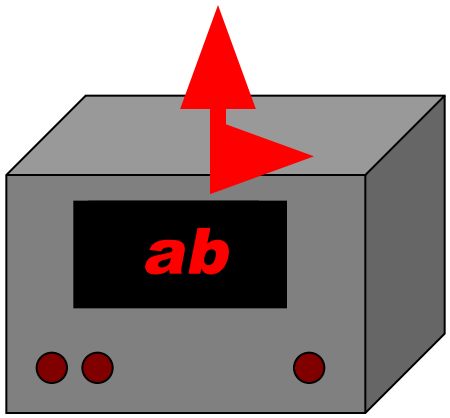
Сверхплотное кодирование

Алиса

ab



Боб



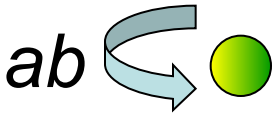
Сверхплотное кодирование

Алиса

Боб

$X|0\rangle = |1\rangle; \quad X|1\rangle = |0\rangle$

$Z|0\rangle = |0\rangle; \quad Z|1\rangle = -|1\rangle$



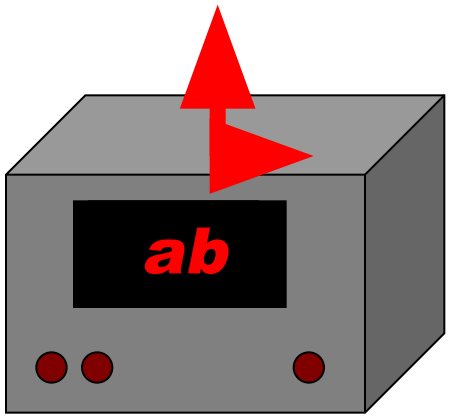
00 Применяем I $\dfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \dfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$

01 Применяем Z $\dfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \dfrac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$

10 Применяем X $\dfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \dfrac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}$

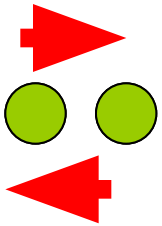
11 Применяем XZ $\dfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \dfrac{|10\rangle - |01\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

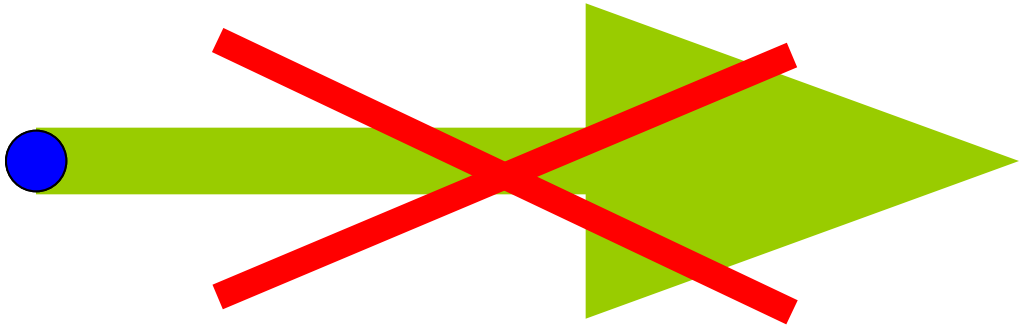


Телепортация

Алиса



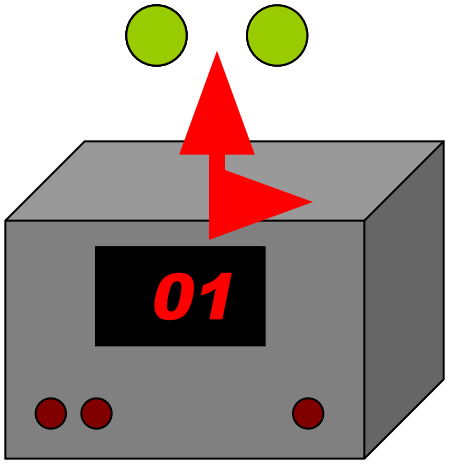
Боб

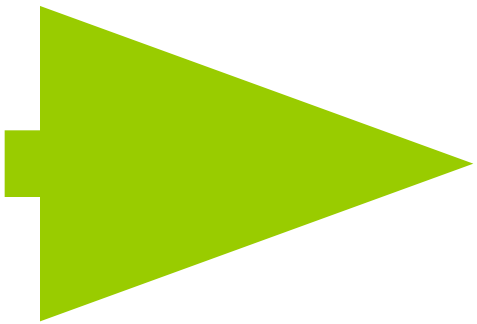


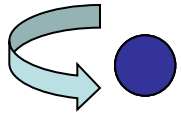
Телепортация

Алиса

Боб



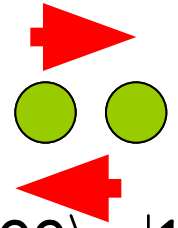




Телепортация

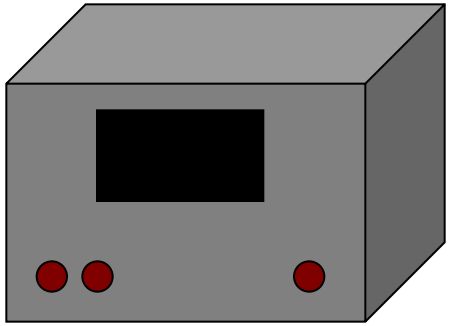
Алиса

Боб



$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$



$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

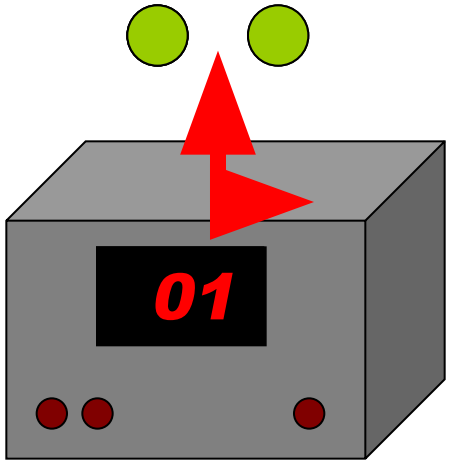
$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

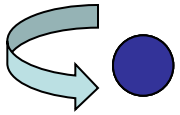
$$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Телепортация

Алиса



Боб



$$= \frac{1}{2}\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right) \xrightarrow{I} \left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle\right) \xrightarrow{Z} \left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle\right) \xrightarrow{X} \left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle\right) \xrightarrow{ZX} \left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)$$