

Муниципальное образовательное учреждение  
средняя общеобразовательная школа №2

# КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Автор разработки

Чумичева И.Б., учитель математики

# Цель:

- образовательные: углубить знания по теме «Квадратные уравнения», вывести и доказать формулы корней квадратного уравнения, сформулировать умения применять формулы в решении задач;
- развивающие: развивать умения в нахождении корней квадратного уравнения, абстрагировать и обобщать, развивать навыки самоконтроля;
- воспитательные: воспитывать волю и настойчивость для решения поставленной задачи

1.Квадратные уравнения. Определение , примеры.

2.Неполные квадратные уравнения.

3.Метод выделения полного квадрата . Вывод формулы корней квадратных уравнений . Решение квадратных уравнений.

4.Приведённое квадратное уравнение.

5.Теорема Виета.

6.Теорема , обратная теореме Виета.

7.Разложение квадратного трёхчлена на множители.

8.Уравнения сводящиеся к квадратным.

9.Занимательные задачи.

10.Список используемого материала.

# Квадратное

Квадратным уравнением называется уравнение уравнение.

$$ax^2+bx+c=0,$$

0!

где  $a, b, c$ - заданные числа,  $a \neq 0$ .

$x$ - неизвестное,

$a$ - первый или старший коэффициент,

$b$ - второй коэффициент,

$c$ - свободный член.

Например:

$$x^2+7x-24=0$$

$$4x^2-x+5=0$$

$$2x^2+6x=x^2+3x+9$$



[Далее](#)

[На главную](#)

m!

уравнение  $x^2=d$ , где  $d>0$ , имеет два корня:

$$x_1 = \sqrt{d}$$

$$x_2 = -\sqrt{d}$$

### Доказательство

Пример: решите уравнение  $x^2=25$ .

Решение:

$$x^2=25$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{25}$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -5$$

Ответ:  $x_1=5, x_2=-5$



# Неполные квадратные

## уравнения:

квадратное уравнение  $ax^2+bx+c=0$

0!

называют неполным, если хотя бы один из коэффициентов  $b$  или  $c$  равен 0.

$$ax^2=0 \quad , \quad (b=c=0)$$

$$ax^2+c=0 \quad , \quad (b=0) \quad a \neq 0$$

$$ax^2+b=0 \quad , \quad (c=0).$$

Например:

$$3x^2=0$$

$$x^2-6x=0$$

$$9x^2-81=0$$

$$(x^2-9)/(x-3)=0$$



[На главную](#)

# Метод выделения полного

$$ax^2+bx+c=0 \quad a \neq 0, /a$$

## квадрата.

$$\frac{ax^2+bx+c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{(2a)^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{(2a)^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$



[Далее](#)

[На главную](#)

Если  $b^2-4ac \geq 0$ , то:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(\sqrt{b^2-4ac})^2}{(2a)^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- мы вывели формулу корней квадратного уравнения.

  $b^2-4ac=D$  - дискриминант



Далее



Пример: решите квадратное уравнение  $x^2+2x-3=0$   
методом выделения полного квадрата.

Решение:

$$x^2+2x-3=0$$

$$x^2+2x=3$$

$$x^2+2x+1=3+1$$

$$(x+1)^2=4, \text{ из этого следует:}$$

$$x+1=2, \text{ или } x+1=-2,$$

$$x_1=1$$

$$x_2=-3$$

Ответ:  $x_1=1, x_2=-3$



[На главную](#)

# Формула квадратного



уравнения  $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$

если  $b^2 - 4ac < 0$ , то уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет действительных корней,

если  $b^2 - 4ac > 0$ , то уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два действительных корня,

если  $b^2 - 4ac = 0$ , то уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два равных корня ( $x_1 = x_2$ )

Кое-что интересное

$ax^2+bx+c=0$ , если  $b$ -чётное число,

то  $x_{1,2} = \frac{-m\sqrt{m^2-ac}}{a}$

$b=2m$  ,  $a \neq 0$  ,  $m^2-ac \geq 0$

Доказательство



На главную

0!

$x^2+px+q=0$  – приведённое квадратное уравнение ,  
( $ax^2+bx+c=0$ , где  $a=1$ )

Любое квадратное уравнение  $ax^2+bx+c=0$  может  
быть приведённым , если разделить  
обе части на  $a$  ,  $a \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

или

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$$



[На главную](#)

# Теорема Виета.

Если  $x_1$  и  $x_2$  - корни уравнения  $x^2+px+q=0$ , то справедливы формулы :

**m!**

$$x_1+x_2=-p$$

$$x_1x_2=q$$

т.е. сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Доказательство



Далее

На главную

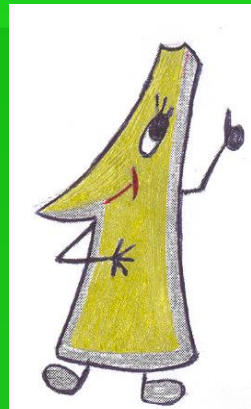
Пример: один из корней уравнения  $x^2-14x-15=0$



положителен. Не решая уравнения, определить знак второго корня.

Решение: По теореме Виета:  $x_1x_2 = -15 < 0$ , пусть  $x_1 > 0$  ( по условию ), тогда  $x_2 < 0$ .

Ответ:  $x_2 < 0$



[На главную](#)

# Теорема, обратная теореме Виета.

m!

Если числа  $p, q, x_1, x_2$  – таковы, что  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 x_2 = q$ , то  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

Доказательство:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_2 x_1 = q$$

$$x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = x^2 - x x_1 - x x_2 + x_1 x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2),$$

$$\text{т.е. } x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$



**0!** Многочлен  $ax^2+bx+c=0$ , где  $a \neq 0$ , называют квадратным трёхчленом.

Его можно разложить на множители способом группировки.

Теорема: если  $x_1$  и  $x_2$  - корни квадратного уравнения  $ax^2+bx+c=0$ , то при всех  $x$  справедливо равенство:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Доказательство



[Далее](#)

[На главную](#)



**m!** Теорема: если квадратное уравнение  $ax^2+bx+c=0$  имеет корни  $x_1$  и  $x_2$ , то справедливо тождество  $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ . В случае, когда уравнение имеет лишь один корень  $x_1$ , справедливо тождество  $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ . Если уравнение не имеет корней, то квадратный трёхчлен  $ax^2+bx+c$  не разлагается на множители.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2, \text{ если } D=0$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \text{ если } D>0$$



# Уравнения, сводящиеся к

## квадратным.

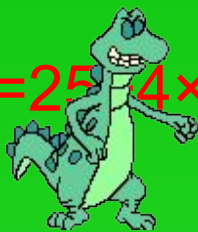
Уравнение  $ax^4+bx^2+c=0$ , где  $a \neq 0$ , называют биквадратным.

Решите биквадратное уравнение:  $9x^4+5x^2-4=0$ .

Решение: пусть  $x^2=t$ , тогда  $x^4=t^2$ , отсюда:  
 $9t^2+5t-4=0$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = 25 + 4 \times 4 \times 9 = 169$$



$$-5 \pm 13$$

$$t_{1,2} = -\frac{-5 \pm 13}{2 \times 9}$$

$$t_1 = -\frac{5+13}{18} = -\frac{18}{18} = -1 \quad t_2 = \frac{5-13}{18} = -\frac{8}{18} = -\frac{4}{9}$$

$x^2 = -1$  - не может быть  
 $x^2 = 4/9$  из этого следует  $x_{1,2} = \pm 2/3$

Ответ:  $x_{1,2} = \pm 2/3$

Решите уравнение:  $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3$ , О.Д.З.:  $x \neq -2$ ,  $x \neq 3$

Решение:  $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3$ ,  $| \cdot (x+2)(x-3)$ , получим:

$$3(x-3) - 4(x+2) = 3(x+2)(x-3)$$

$$3x - 9 - 4x - 8 = 3x^2 + 6x - 9x - 18$$

$$-x - 17 = 3x^2 - 3x - 18$$

$$3x^2 + x + 17 - 18 - 3x = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1/3$$

Ответ:  $x_1 = -1/3$  и  $x_2 = 1$



[На главную](#)

Решите уравнение:  $\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{3}{x-1} = \frac{3-x}{x-2}$  О.Д.З.:  $x \neq 1$  и  $x \neq 2$

Решение: умножим данное уравнение на  $(x-1)(x-2)$

$$1+3(x-2)=(3-x)(x-1)$$

$$1+3x-6=3x-3-x^2+x$$

$$1-6-x+x^2+3=0$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4x_{1,2}}} = 1/2 \pm 3/2$$

$$x_1=2 \quad x_2=-1$$

$x_1=2$ -не подходит по О.Д.З.



Ответ:  $x=-1$ .

Корень  $x=2$  - посторонний. При решении уравнения, содержащего неизвестное в знаменателе дроби, необходима проверка.

Решите уравнение:  $\frac{x+7}{x+4} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+7x+12} = 0$

Решение:

$$x^2+7x+12=0$$

$$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{48}{4}}$$

и  $x_2 = -3$ ,  $x^2+7x+12 = (x+4)(x+3)$

,  $|x(x+4)(x+3)$

О.Д.З.:  $x \neq -4$ ,  $x \neq -3$ ; получим:

$$\frac{x+4}{(x+7)(x+3)} - \frac{x+3}{(x+4)+1} = 0$$

$$x^2+7x+21+3x-x-4+1=0$$

$$x^2+9x+18=0$$

$$x_{1,2} = -\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = -6$ ,  $x_2 = -3$  не подходит по О.Д.З.

Ответ:  $x = -6$



$$x_1 = -4$$

# Занимательные задачи.

1.Стая обезьян.

2.Ряд чисел.

3.Пчелиный рой.

4.Какие числа?

5.Интересное о дискриминанте.

6.Квадратное уравнение.

7.Теорема Виета.



[На главную](#)

# Стая обезьян.

На две партии разбившись,  
Забавлялись обезьяны.



Восьмая их в квадрате  
роще весело резвилась;



Криком радостным двенадцать

Воздух свежий оглашали.

Вместе сколько, ты мне скажешь ,

Обезьян там было в роще?

Решение: решим эту задачу с помощью уравнения.  
Пусть  $x$  обезьян было в роце , тогда по условию  $(x/8)^2+12=x$ .

Решим это уравнение  $(x/8)^2+12=0$

$1/64x^2-x+12=0$  , умножим это уравнение на 64 и получим:

$$x^2-64x+768=0$$

$$x_{1,2}=32 \pm \sqrt{1024-768}$$

$$x_{1,2}=32 \pm \sqrt{256}$$

$$x_1=32+16=48$$

$$x_2=32-16=16$$



Ответ: в роце было 16 или 48 обезьян.



Задание: Записать ряд из пяти последовательных чисел, сумма квадратов первых трёх из которых равна сумме квадратов двух последних.



Решение: Пусть  $x$  – первое число, тогда:



$$\begin{aligned}x^2+(x+1)^2+(x+2)^2&=(x+3)^2+(x+4)^2 \\x^2+2x+1+x^2+4x+4&=x^2+6x+9+x^2+8x+16 \\1+4-9-8x-16&=0 \\-8x-20&=0 \\x&=4\pm\sqrt{16+20} \\x_1&=4+6=10 \quad x_2=4-6\end{aligned}$$

Ответ: существует два ряда чисел, обладающих требуемым свойством:

1 ряд : 10;11;12;13;14.

2 ряд : - 2; - 1;0;1;2.



# Пчелиный рой.



Пчёлы в числе, равном квадратному корню из половины всего их роя, сели на куст жасмина, оставив позади себя  $\frac{8}{9}$  роя. И только одна пчёлка из того же роя кружится возле лотоса, привлечённая жужжанием подруги, неосторожно попавшей в западню сладко пахнущего цветка. Сколько всего было пчёл в рое?



Решение

Решение: Пусть всего пчёл было  $x$ , тогда:  $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8x}{9} + 2 = x$

Решим это уравнение:  $\sqrt{x/2} = y, x = 2y^2$

$$y + \frac{2 \times 8xy}{9} + 2 = 2y^2 - | \times 9;$$

9

$$9y + 16y^2 + 18 - 18y^2 = 0$$

$$9y - 2y^2 + 18 = 0 - | \times (-1)$$

$$2y^2 - 9y - 18 = 0$$

$$D = 81 + 4 \times 2 \times 18 = 81 + 144 = 225$$

$$y_{1,2} =$$

$$y_1 = \frac{9 \pm 15}{4}$$

$$y_2 = 6$$

$x_1 = 2(-6/4)^2 = 2(-3/2)^2 = 2 \times 9/4 = 4,5$ , но число пчёл – натуральное, следовательно 4,5 – не подходит.

$$x_2 = 2 \times 6^2 = 2 \times 36 = 72$$

Ответ: всего было 72 пчёл в рое.



# Какие числа?

Задание: найти три последовательных числа, отличающихся тем свойством, что квадрат среднего на 1 больше произведения двух остальных.

Решение:

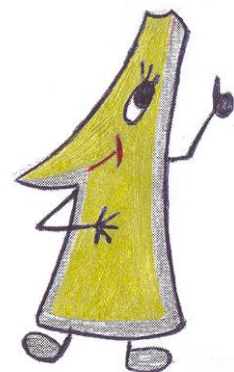
$$(x-1) \text{ и } x \text{ и } (x+1)$$

$$x^2 - (x-1)(x+1) = 1$$

$$x^2 - x^2 + 1 = 1$$



Ответ: можно взять любые последовательные числа.



[Назад](#)

Если вам скажут: “Квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля, не имеет решения”, можете уточнить: “Не имеет решения в действительных числах, в комплексных же имеет целых два”.

Пример:



$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 5 &= 0 \\x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 5} \\x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{-4} \\x_1 &= 1 + 2i & x_2 &= 1 - 2i\end{aligned}$$



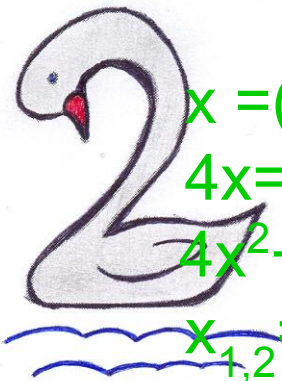
Ответ:  $x_1 = 1 + 2i$   
 $x_2 = 1 - 2i$

Задание: в уравнении  $4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$ , найти  $m$  так, чтобы один корень был квадратом другого.

Решение:

$$x_1 = x_2^2$$

$(4m^2)/4 = x \times x^2$ , значит  $m^2 = x^3$ ,  $m = \pm \sqrt{x^3} = \pm x \sqrt{x}$ .



$$x + x^2 = 15/4$$

$$x = (15 - 4x^2)/4$$

$$4x = 15 - 4x^2$$

$$4x^2 + 4x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 15})/4$$

$$x_{1,2} = (-2 \pm 8)/4$$

$x_1 = -10/4$  – не натуральное число под корнем.

$$x_2 = 6/4 = 3/2$$

$$m = \pm 3/2 \sqrt{3/2}$$

Ответ:  $m = \pm 3/2 \sqrt{3/2}$

Задание: найти сумму квадратов корней уравнения  $ax^2+bx+c=0$ , не находя его корней.

Решение:

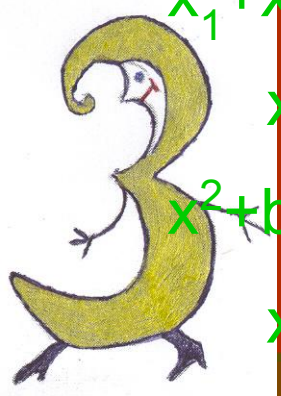
$$x_1+x_2=-b/a$$

$$x_1 \times x_2 = c/a$$

$$x^2+bx/a+c/a=0$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-b/a)^2-2c/a=b^2/a^2-2c/a=(b^2-2ac)/a^2$$

Ответ:  $x_1^2+x_2^2=(b^2-2ac)/a^2$



[Назад](#)

# Проверь себя №1.

1. Как будет выглядеть квадратное уравнение, если известны его коэффициенты  $a=2$ ,  $b=7$ ,  $c=-1$  ?

1)  $2x^2+7x+1=0$   $+7x+1=0$

2)  $2x^2+7x-1=0$

$+7x-1=0$

3)  $7x^2+2x-1=0$

2. Найдите корни уравнения  $x^2=289$ . Какой из них является арифметическим? 1)

$x=17$ , это арифметический корень 2)

$x=-17$ , это арифметический корень

3)  $x_1=17$ , это арифметический корень;  $x_2=-17$

3. Решите уравнение  $x^2=-16$

$x_{1,2}=\pm 4$

$-4$

1)

2)  $x=$

$=\pm 4$

2)  $x=-4$



# Проверь себя №2.

1. Чему равен дискриминант уравнения  $2x^2+3x+1=0$

1)D=9

2)+3x+1=0

1)D=9

2)D=17

+3x+1=0

1)D=9

2)D=17

3)D=1

2. Не решая уравнения  $4x^2-7x-2=0$ , скажите, сколько корней оно имеет?

1)данное уравнение имеет один корень

$-7x-2=0$ , скажите, сколько корней оно имеет?

1)данное уравнение имеет один корень

2)данное уравнение имеет два действительных корня

3)данное уравнение не имеет действительных корней

3. Продолжите фразу :» Если дискриминант меньше

# Проверь себя №3.

1. Один из корней уравнения  $x^2 - 15x + 14 = 0$  равен 1. Чему равен второй корень?

1) 14  $-15x + 14 = 0$  равен 1. Чему равен второй корень?

1) 14

2) 15  $-15x + 14 = 0$  равен 1. Чему равен второй корень?

1) 14

2) 15

3) -15

2. Не решая уравнения  $x^2 + 2x - 80 = 0$ , найдите сумму и произведение его корней.

1)

$x_1 + x_2 = -80$  ;  $x_1 x_2 = 2 = 2$

2)  $x_1 + x_2 = -2$  ;  $x_1 x_2 = 80$

3. Как будет выглядеть приведённое квадратное уравнение, если известны его корни:  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 2$  ?

1)

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$-7x$

$+10 = 0$

2)  $x^2 + 10x$

$+7 = 0$

3)  $x^2 - 7x$

$10 = 0$

# Проверь себя

№4.

1. Если  $2x^2+x-3=2(x-1)(x+3/2)$ , то какие корни будет иметь уравнение  $2x^2+x-3=0$  ?

1)  $x_1=-1$  ,  $x_2=-3/2$

2)  $-3/2$

$x_2=3/2$

$=3/2$

2)  $x_1=-1$  ,

3)  $x_1=1$  ,  $x_2=-3/2$

$=-3/2$

4)  $x_1=1$  ,

$x_2=3/2$

2. Разложите на множители квадратный трёхчлен  $x^2-15x+26$ , если решением уравнения  $x^2-15x+26=0$  являются корни  $x_1=13$ ,  $x_2=2$

1)  $(x+13)(x+2)$

2)  $(x-13)(x+2)$

3)  $(x-13)(x-2)$

3)  $(x-13)(x-2)$

4)  $(x+13)(x-2)$

**ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ**

**ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ**

**ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ**

**ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ**

# НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ



**НЕПРАВИЛЬНЫЙ  
ОТВЕТ**

**НЕПРАВИЛЬНЫЙ  
ОТВЕТ**

**НЕПРАВИЛЬНЫЙ  
ОТВЕТ**

Доказательство:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+2mx+c=0$$

$$D=4m^2-4ac=4(m^2-ac)$$

$$x_{1,2} = \frac{-2m \pm \sqrt{4(m^2-ac)}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2m \pm 2\sqrt{(m^2-ac)}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2-ac}}{a}$$

Доказательство:

$$x_1 = \frac{-p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}}{1} +$$

$$x_2 = \frac{-p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}}{1}$$

$$x_1 + x_2 = -2p/2 = -p, \quad x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = (-p/2)^2 - (\sqrt{(p/2)^2 - q})^2 = (p/2)^2 - (p/2)^2 + q = q, \quad x_1 x_2 = q$$

## Доказательство:

Пр. часть  $a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-axx_2-axx_1+ax_1x_2=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$

$x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  $ax^2+bx+c=0$ , т.е.

уравнения  $x^2+bx/a+c/a=0$ , то

по теореме Виета  $x_1+x_2=-b/a$  ,  $x_1x_2=c/a$

из этого следует:  $ax^2-a(-b/a)x+ac/a=ax^2+bx+c$  , что и требовалось доказать.

Доказательство:

$$x^2 = d, d > 0$$

$$x^2 - d = 0$$

$$d = (\sqrt{d})^2$$

$$x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{d} \quad x_2 = -\sqrt{d}, \text{ что и требовалось}$$

доказать.

## Список используемого материала:

1. “Алгебра 8 класс” Виленкин Н.Я.  
Москва “Просвещение” 2001 год
2. “Алгебра 8 класс” Алимов Ш.А.  
Москва “Просвещение” 1994 год
3. Энциклопедия для детей “Математика” том 11  
Москва “Аванта+” 1998 год
4. “Сборник задач московских математических олимпиад”  
Г.И.Зубелевич
5. <http://office.microsoft.com> – картинки
6. “Информатика в видеосюжетах” Л.Ф.Соловьёва  
Санкт-Петербург “БХВ-Петербург” 2002 год