Муниципальное образовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №2

Квадратные уравнения

Автор разработки
Чумичева И.Б., учитель математики

Цель:

- образовательные: углубить знания по теме «Квадратные уравнения»,вывести и доказать формулы корней квадратного уравнения, сформулировать умения применять формулы в решении задач;
- развивающие: развивать умения в нахождении корней квадратного уравнения, абстрагировать и обобщать, развивать навыки самоконтроля;
- воспитательные: воспитывать волю и настойчивость для решения поставленной задачи

1.Квадратные уравнения. Определение , примеры.

2.Неполные квадратные уравнения.

3.Метод выделения полного квадрата . Вывод формулы корней квадратных уравнений . Решение квадратных уравнений.

4.Приведённое квадратное уравнение.

5.Теорема Виета.

6.Теорема , обратная теореме Виета.

7.Разложение квадратного трёхчлена на множители.

8.Уравнения сводящиеся к квадратным.

9.Занимательные задачи.

10.Список используемого материала.

Квадратное уравнение.

Квадратным уравнением называется уравнение

$ax^2+bx+c=0$,

где a,b,c- заданные числа, $a \neq 0$.

x- неизвестное,

a- первый или старший коэффициент,

b- второй коэффициент,

c- свободный член.

Например:

$x^2+7x-24=0$

$4x^2-x+5=0$

$2x^2+6x=x^2+3x+9$

Далее На главную

m!

уравнение $x^2=d$, где $d>0$, имеет два корня:

$x_1=\sqrt{d}$ $x_2=-\sqrt{d}$

Доказательство

Пример: решите уравнение $x^2=25$.

Решение:

$x^2=25$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{25}$

$x_1=5$ $x_2=-5$

Ответ: $x_1=5$, $x_2=-5$

Неполные квадратные уравнения:

квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называют неполным, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен 0.

0!

$ax^2=0$, $(b=c=0)$

$ax^2+c=0$, $(b=0)$ $a\neq0$

$ax^2+b=0$, $(c=0)$.

Например:

$3x^2=0$ $x^2-6x=0$

$9x^2-81=0$ $(x^2-9)/(x-3)=0$

На главную

Метод выделения полного квадрата.

$ax^2+bx+c=0$ $a \neq 0$, /a

$$\frac{ax^2+bx+c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{bx}{a}=\frac{-c}{a}$$

$$x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{b^2}{(2a)^2}=\frac{-c}{a}+\frac{b^2}{(2a)^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Далее | На главную

Если $b^2-4ac \geq 0$, то:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(\sqrt{b^2-4ac})^2}{(2a)^2}$$

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- *мы вывели формулу корней квадратного уравнения.*

!

$b^2-4ac=D$ - <u>дискриминант</u>

Далее

Пример: решите квадратное уравнение $x^2+2x-3=0$ методом выделения полного квадрата.

Решение:

$x^2+2x-3=0$

$x^2+2x=3$

$x^2+2x+1=3+1$

$(x+1)^2=4$, из этого следует :

$x+1=2$, или $x+1=-2$,

$x_1=1$ $x_2=-3$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-3$

На главную

Формула квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

если $b^2-4ac<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней,

если $b^2-4ac>0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два действительных корня,

если $b^2-4ac=0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два равных корня ($x_1=x_2$)

Кое-что интересное

Проверь себя №2

На главную

$ax^2+bx+c=0$, если **b-чётное число,**

то $x_{1,2}=\frac{-m\sqrt{m^2-ac}}{a}$

$b=2m$, $a\neq0$, $m^2-ac\geq0$

Доказательство

На главную

О!

$x^2+px+q=0$ – <u>приведённое квадратное уравнение ,</u>
($ax^2+bx+c=0$, где $a=1$)

Любое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ может быть приведённым , если разделить обе части на a , $a\neq0$

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

или

$$x_{1,2}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{(p/2)^2-q)}$$

На главную

Теорема Виета.

Если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливы формулы :

m!

$$x_1+x_2=-p \qquad x_1x_2=q$$

т.е. сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту , взятому с противоположным знаком , а произведение корней равно свободному члену.

Доказательство

Далее

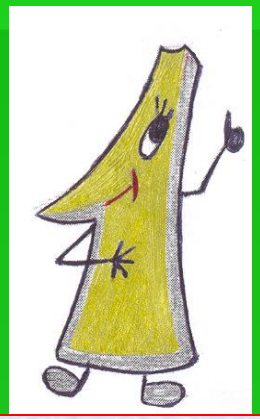
На главную

Пример : один из корней уравнения $x^2-14x-15=0$

положителен . Не решая уравнения , определить знак второго корня.

Решение: По теореме Виета: $x_1x_2= -15<0$, пусть $x_1>0$ (по условию),тогда $x_2<0$.

Ответ : $x_2<0$



На главную

Теорема , обратная теореме Виета.

m!

Если числа p , q ,x_1, x_2 – таковы, что $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2+px+q=0$.

Доказательство:

$x^2+px+q=0$

$x_1+x_2=-p$, $x_2x_1=q$

$x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2=x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2)$,

т.е. $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$

Проверь себя №3

На главную

О!

Многочлен $ax^2+bx+c=0$, где $a \neq 0$, называют <u>квадратным</u> <u>трёхчленом.</u>

Его можно разложить на множители способом группировки.

<u>Теорема:</u> если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то при всех x справедливо равенство:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Доказательство

Далее **На главную**

m!

<u>Теорема:</u> если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2, то справедливо тождество $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. В случае, когда уравнение имеет лишь один корень x_1, справедливо тождество $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$. Если уравнение не имеет корней, то квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не разлагается на множители.

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$, если $D=0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, если $D>0$

Проверь себя №4 **На главную**

Уравнения , сводящиеся к квадратным.

Уравнение $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq0$, называют *биквадратным*.

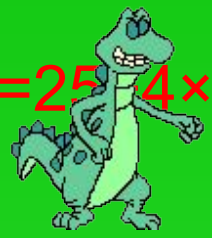
Решите биквадратное уравнение: $9x^4+5x^2-4=0$.

Решение: пусть $x^2=t$, тогда $x^4=t^2$, отсюда:

$9t^2+5t-4=0$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$D=25+4\times4\times9=169$



$$t_{1,2}=-\frac{-5\pm13}{2\times9}$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm13}{18}$$

$t_1=-1$ $t_2=8/18=4/9$ $x^2=-1$- не может быть

$x^2=4/9$ из этого следует $x_{1,2}=\pm2/3$

Ответ: $x_{1,2}=\pm2/3$

На главную

Решите уравнение: $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3$, О.Д.З.:$x \neq -2$, $x \neq 3$

Решение : $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3$, $|\times (x+2)(x-3)$, получим:

$3(x-3)-4(x+2)=3(x+2)(x-3)$

$3x-9-4x-8=3x^2+6x-9x-18$

$-x-17=3x^2-3x-18$

$3x^2+x+17-18-3x=0$

$3x^2-2x-1=0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{3}$

$x_{1,2}=\frac{1\pm 2}{3}$ $x_1=1$ $x_2=-1/3$

Ответ: $x_1=-1/3$ и $x_2=1$

На главную

Решите уравнение: $\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{3}{x-1} = \frac{3-x}{x-2}$ О.Д.З.:$x \neq 1$ и $x \neq 2$

Решение: умножим данное уравнение на (x-1)(x-2)

$1+3(x-2)=(3-x)(x-1)$

$1+3x-6=3x-3-x^2+x$

$1-6-x+x^2+3=0$

$x^2-x-2=0$

$x_{1,2}=\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}$ $x_{1,2}=1/2 \pm 3/2$

$x_1=2$ $x_2=-1$

$x_1=2$-не подходит по О.Д.З.

Ответ : $x=-1$.

Корень $x=2$ - посторонний . *При решении уравнения , содержащего неизвестное в знаменателе дроби , необходима проверка.*

На главную

Решите уравнение: $\frac{x+7}{x+4} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+7x+12} = 0$

Решение:

$x^2+7x+12=0$

$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{48}{4}}$

$x_{1,2} = -7/2 \pm 1/2$

$x_1=-4$

и $x_2=-3$, $x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$

, $|\times(x+4)(x+3)$

О.Д.З.: $x \neq -4$, $x \neq -3$; получим:

$\frac{x+7}{x+4} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+7x+12} = 0$

$(x+7)(x+3)-(x+4)+1=0$

$x^2+7x+21+3x-x-4+1=0$

$x^2+9x+18=0$

$x_{1,2} = -9/2 \pm 3/2$

$x_{1,2} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{72}{4}}$

$x_1 = -6$ $x_2 = -3$ – не подходит по О.Д.З.

Ответ: $x = -6$

На главную

Занимательные задачи.

1.Стая обезьян.

2.Ряд чисел.

3.Пчелиный рой.

4.Какие числа?

5.Интересное о дискриминанте.

6.Квадратное уравнение.

7.Теорема Виета.

На главную

Стая обезьян.

На две партии разбившись,

Забавлялись обезьяны.

сть восьмая их в квадрате

роще весело резвилась;

Криком радостным двенадцать

Воздух свежий оглашали.

Вместе сколько, ты мне скажешь ,

Обезьян там было в роще?

Решение

Решение: решим эту задачу с помощью уравнения. Пусть x обезьян было в роще, тогда по условию $(x/8)^2+12=x$.

Решим это уравнение $(x/8)^2+12=0$

$1/64x^2-x+12=0$, умножим это уравнение на 64 и получим:

$x^2-64x+768=0$

$x_{1,2}=32\pm\sqrt{1024-768}$

$x_{1,2}=32\pm\sqrt{256}$

$x_1=32+16=48$

$x_2=32-16=16$

Ответ: в роще было 16 или 48 обезьян.

Назад

Задание: Записать ряд из пяти последовательных чисел , сумма квадратов первых трёх из к[illegible]х равна сумме квадратов двух п[illegible]них .

Решение: Пусть x – первое число , тогда :

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2$

$+x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9+x^2+8x+16$

$+1+4-9-8x-16=0$

$-8x-20=0$

$_2=4\pm\sqrt{16+20}$

$=4+6=10$ $x_2=4-6$

Ответ: существует два ряда чисел , обладающих требуемым свойством :

1 ряд : 10;11;12;13;14.

2 ряд : - 2; - 1;0;1;2.

Назад

Пчелиный рой.

Пчёлы в числе , равном квадратному корню из половины всего их роя , сели на куст жасмина , оставив позади себя 8/9 роя . И только одна пчёлка из того же роя кружится возле лотоса , привлечённая жужжанием подруги , неосторожно попавшей в западню сладко пахнущего цветка . Сколько всего было пчёл в рое?

Решение

Решение: Пусть всего пчёл было x , тогда : $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8x}{9} + 2 = x$

Решим это уравнение: $\sqrt{x/2}=y$, $x=2y^2$

$y+\frac{2x8xy2}{9}+2=2y2$ – |× 9;

$9y+16y^2+18-18y^2=0$

$9y-2y^2+18=0$ – |× (-1)

$2y^2-9y-18=0$

$D=81+4\times2\times18=81+144=225$

$y_{1,2}=\frac{9\pm15}{4}$

$y_1=-6/4$

$y_2=6$

$x_1=2(-6/4)^2=2(-3/2)^2=2\times9/4=4,5$, но число пчёл – натуральное, следовательно 4,5 – не подходит.

$x_2=2\times6^2=2\times36=72$

Ответ: всего было 72 пчёл в рое .

Назад

Какие числа?

Задание: найти три последовательных числа , отличающихся тем свойством , что квадрат среднего на 1 больше произведения двух остальных .

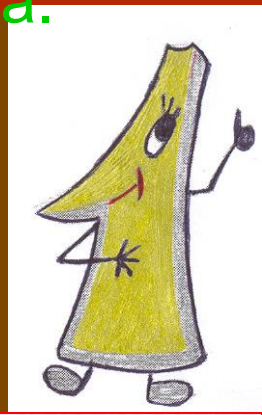
Решение:

$(x-1)$ и x и $(x+1)$

$x^2 - (x-1)(x+1)=1$

$x^2-x^2+1=1$

Ответ : можно взять любы последовательные числа.



Назад

Если вам скажут : “ Квадратное уравнение , дискриминант которого меньше нуля , не имеет решения ” , можете уточнить : “ Не имеет решения в действительных числах , в комплексных же имеет целых два ”.

Пример:

$$x^2-2x+5=0$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{(1-5)}$$

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{(-4)}$$

$$x_1=1+2i \qquad x_2=1-2i$$

Ответ: $x_1=1+2i$

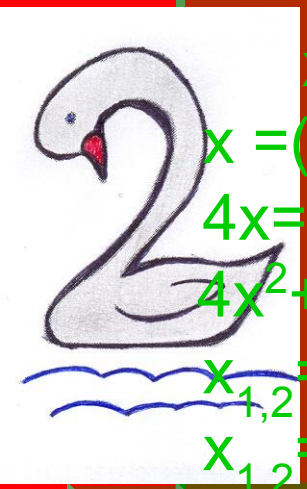
$x_2=1-2i$

Задание: в уравнении $4x^2-15x+4m^2=0$, найти m так, чтобы один корень был квадратом другого.

Решение:

$x_1=x_2^2$

$(4m^2)/4=x\times x^2$, значит $m^2=x^3$, $m=\pm\sqrt{(x^3)}=\pm x\sqrt{(x)}$.



$x+x^2=15/4$

$x=(15-4x^2)/4$

$4x=15-4x^2$

$4x^2+4x-15=0$

$x_{1,2}=(-2\pm\sqrt{4+4\times15})/4$

$x_{1,2}=(-2\pm8)/4$

$x_1=-10/4$ – не натуральное число под корнем.

$x_2=6/4=3/2$

$m=\pm3/2\sqrt{(3/2)}$

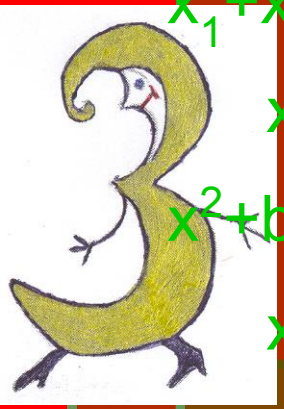
Ответ: $m=\pm3/2\sqrt{(3/2)}$

Назад

Задание: найти сумму квадратов корней уравнения

$ax^2+bx+c=0$, не находя его корней.

Решение:



$x_1+x_2=-b/x$

$x_1 \times x_2 = c/a$

$x^2+bx/a+c/a=0$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-b/a)^2-2c/a=b^2/a^2-2c/a=(b^2-2ac)/a^2$

Ответ: $x_1^2+x_2^2=(b^2-2ac)/a^2$

Назад

Проверь себя №1.

1.Как будет выглядеть квадратное уравнение , если известны его коэффициенты a=2 , b=7 , c=-1 ?

1)$2x^2+7x+1=0$+7x+1=0

2)$2x^2+7x-1=0$

+7x – 1=0

3)$7x^2+2x-1=0$

2.Найдите корни уравнения $x^2=289$. Какой из них является арифметическим?

1) x=17 , это арифметический корень

2) x= -17 , это арифметический корень

3)$x_1=17$, это арифметический корень ; $x_2=-17$

3.Решите уравнение $x^2=-16$

1) $x_{1,2}=\pm 4$

2)x= =±4

–4

2)x= –4

Назад

Проверь себя №2.

1.Чему равен дискриминант уравнения $2x^2+3x+1=0$

1)D=9

2)+3x+1=0 1)D=9

2)D=17

+3x+1=0 1)D=9

2)D=17

3)D=1

2.Не решая уравнения $4x^2-7x-2=0$, скажите , сколько корней оно имеет ?

1)данное уравнение имеет один корень

– 7x –2=0 , скажите , сколько корней оно имеет ?

1)данное уравнение имеет один корень

2)данное уравнение имеет два действительных корня

3)данное уравнение не имеет действительных корней

3.Продолжите фразу :» Если дискриминант меньше нуля

Назад

Проверь себя №3.

1.Один из корней уравнения $x^2 - 15x + 14 = 0$ равен 1 .Чему равен второй корень ?

1) 14 $-15x + 14 = 0$ равен 1 .Чему равен второй корень ?

1) 14

2) 15 $-15x + 14 = 0$ равен 1 .Чему равен второй корень ?

1) 14

2) 15

3) –15

2.Не решая уравнения $x^2 + 2x - 80 = 0$, найдите сумму и произведение его корней .

1) $x_1 + x_2 = -80$; $x_1 x_2 = 2$ $= 2$

2) $x_1 + x_2 = -2$; $x_1 x_2 = -80$

3) $x_1 + x_2 = 80$; $x_1 x_2 = 2$

3.Как будет выглядеть приведённое квадратное уравнение , если известны его корни : $x_1 = 5$, $x_2 = 2$?

1) $x^2 - 7x + 10 = 0$

2) $x^2 + 10x + 7 = 0$

3) $x^2 - 7x - 10 = 0$

Назад

Проверь себя №4.

1.Если $2x^2+x-3=2(x-1)(x+3/2)$,то какие корни будет иметь уравнение $2x^2+x-3=0$?

1)$x_1=-1$,$x_2=-3/2$

2)$=-3/2$ 2)$x_1=-1$, $x_2=3/2$ $=3/2$

3)$x_1=1$,$x_2=-3/2$ $=-3/2$ 4)$x_1=1$, $x_2=3/2$

2.Разложите на множители квадратный трёхчлен $x^2-15x+26$, если решением уравнения $x^2-15x+26=0$ являются корни $x_1=13$, $x_2=2$

1)(x+13)(x+2)

2)(x-13)(x+2)

3)(x-13)(x-2)

3)(x-13)(x-2)

4)(x+13)(x-2)

Назад

ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №1

ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №2

ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №3

ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №4

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №1

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №2

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №3

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №4

Доказательство:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+2mx+c=0$$

$$D=4m^2-4ac=4(m^2-ac)$$

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm\sqrt{4(m^2-ac)}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm2\sqrt{(m^2-ac)}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-m\sqrt{m^2-ac}}{a}$$

Назад

Доказательство:

$x_1 = -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}$ +

$x_2 = -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}$

$x_1 + x_2 = -2p/2 = -p$, $x_1 + x_2 = -p$

$x_1 x_2 = (-p/2)^2 = (\sqrt{(p/2)^2 - q})^2 = (p/2) - (p/2)^2 + q^2 = q$, $x_1 x_2 = q$

Назад

Доказательство:

Пр. часть $a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-axx_2-axx_1+ax_1x_2=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$

x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, т.е.

уравнения $x^2+bx/a+c/a=0$,то

по теореме Виета $x_1+x_2=-b/a$, $x_1x_2=c/a$

из этого следует: $ax^2-a(-b/a)x+ac/a=ax^2+bx+c$, что и

требовалось доказать.

Назад

Доказательство:

$x^2=d,\ d>0$

$x^2-d=0$

$d=(\sqrt{d})^2$

$x^2-(\sqrt{d})^2=0$

$(x-\sqrt{d})(x+\sqrt{d})=0$

$x_1=\sqrt{d}$ $x_2=-\sqrt{d}$,что и требовалось доказать.

Назад

Список используемого материала:

1. “Алгебра 8 класс” Виленкин Н.Я.
Москва “Просвещение” 2001год

2. “Алгебра 8 класс” Алимов Ш.А.
Москва “Просвещение” 1994 год

3.Энциклопедия для детей “ Математика” том 11
Москва “Аванта+” 1998 год

4.“Сборник задач московских математических олимпиад ” Г.И.Зубелевич

5.http://office.microsoft.com – картинки

6. “Информатика в видеосюжетах” Л.Ф.Соловьёва
Санкт-Петербург “БХВ-Петербург” 2002 год

На главную