Муниципальное образовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа №2

Квадратные уравнения

Автор разработки

Чумичева И.Б., учитель математики

Цель:

- образовательные: углубить знания по теме «Квадратные уравнения»,вывести и доказать формулы корней квадратного уравнения, сформулировать умения применять формулы в решении задач;
- развивающие: развивать умения в нахождении корней квадратного уравнения, абстрагировать и обобщать, развивать навыки самоконтроля;
- воспитательные: воспитывать волю и настойчивость для решения поставленной задачи

1.Квадратные уравнения. Определение , примеры.

2.Неполные квадратные уравнения.

3.Метод выделения полного квадрата . Вывод формулы корней квадратных уравнений . Решение квадратных уравнений.

4.Приведённое квадратное уравнение.

5.Теорема Виета.

6.Теорема , обратная теореме Виета.

7.Разложение квадратного трёхчлена на множители.

8.Уравнения сводящиеся к квадратным.

9.Занимательные задачи.

10.Список используемого материала.

Квадратное уравнение .

Квадратным уравнением называется уравнение

$$ax^2+bx+c=0,$$

О!

где a,b,c- заданные числа, $a \neq 0$.

x- неизвестное,

a- первый или старший коэффициент,

b- второй коэффициент,

c- свободный член.

Например:

$x^2+7x-24=0$

$4x^2-x+5=0$

$2x^2+6x=x^2+3x+9$

Далее

На главную

m!

уравнение $x^2=d$, где $d>0$, имеет два корня:

$x_1=\sqrt{d}$ $\quad$ $x_2= -\sqrt{d}$

Доказательство

Пример: решите уравнение $x^2=25$.

Решение:

$x^2=25$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{25}$

$x_1= 5 \quad x_2 = - 5$

Ответ: $x_1=5$, $x_2= - 5$

Проверь себя №1 **Назад** **На главную**

Неполные квадратные уравнения.

О!

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называют неполным, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен 0.

$ax^2=0$, $(b=c=0)$

$ax^2+c=0$, $(b=0)$ $a\neq 0$

$ax^2+b=0$, $(c=0)$.

Например:

$3x^2=0$ $x^2-6x=0$

$9x^2-81=0$ $(x^2-9)/(x-3)=0$

На главную

Метод выделения полного квадрата.

$ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, /a

$$\frac{ax^2+bx+c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{bx}{a}=\frac{-c}{a}$$

$$x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{b^2}{(2a)^2}=\frac{-c}{a}+\frac{b^2}{(2a)^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Далее

На главную

Если $b^2-4ac\geq 0$, то:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{(2a)^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- *мы вывели формулу корней квадратного уравнения.*

!

$b^2-4ac=D$ - <u>дискриминант</u>

Далее

Пример: решите квадратное уравнение $x^2+2x-3=0$

методом выделения полного квадрата.

Решение:

$x^2+2x-3=0$

$x^2+2x=3$

$x^2+2x+1=3+1$

$(x+1)^2=4$, из этого следует :

$x+1=2$, или $x+1=-2$,

$x_1=1$ $x_2= - 3$

Ответ: $x_1=1$, $x_2= - 3$

На главную

Формула квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

если $b^2-4ac<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней,

если $b^2-4ac>0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два действительных корня,

если $b^2-4ac=0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два равных корня $(x_1=x_2)$

Кое-что интересное

Проверь себя №2

На главную

$ax^2+bx+c=0$, если ***<u>b-чётное число,</u>***

то $x_{1,2}=\frac{-m\sqrt{m^2-ac}}{a}$

$b=2m$, $a\neq0$, $m^2-ac\geq0$

<u>Доказательство</u>

<u>На главную</u>

О!

$x^2+px+q=0$ – <u>*приведённое квадратное уравнение ,*</u>

($ax^2+bx+c=0$, где $a=1$)

Любое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ может быть приведённым , если разделить обе части на а , $a\neq0$

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

или

$$x_{1,2}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{(p/2)^2-q)}$$

На главную

Теорема Виета.

Если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливы формулы :

т!

$$x_1+x_2=-p \qquad\qquad x_1x_2=q$$

т.е. сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту , взятому с противоположным знаком , а произведение корней равно свободному члену.

Доказательство

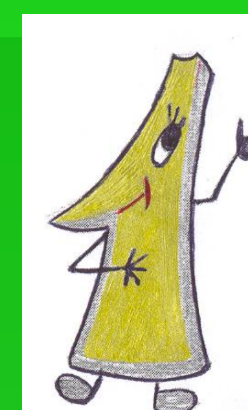
Далее **На главную**

Пример : один из корней уравнения $x^2-14x-15=0$

положителен . Не решая уравнения , определить знак второго корня.

Решение: По теореме Виета: $x_1x_2= -15<0$, пусть $x_1>0$ (по условию),тогда $x_2<0$.

Ответ : $x_2<0$



На главную

Теорема , обратная теореме Виета.

т!

Если числа p , q , x_1, x_2 – таковы, что $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2+px+q=0.$

Доказательство:

$x^2+px+q=0$

$x_1+x_2=-p$, $x_2x_1=q$

$x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2=x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2),$

т.е. $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$

Проверь себя №3
На главную

О!

Многочлен $ax^2+bx+c=0$, где $a \neq 0$, называют <u>квадратным</u> <u>трёхчленом.</u>

Его можно разложить на множители способом группировки.

<u>Теорема:</u> если x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то при всех x справедливо равенство:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Доказательство

Далее **На главную**

Теорема: если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2, то справедливо тождество $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. В случае, когда уравнение имеет лишь один корень x_1, справедливо тождество $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$. Если уравнение не имеет корней, то квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не разлагается на множители.

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$, если $D=0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, если $D>0$

Проверь себя №4

На главную

Уравнения , сводящиеся к квадратным.

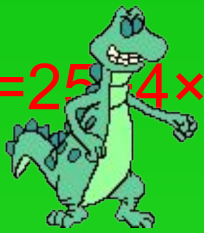
Уравнение $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq0$, называют *биквадратным*.

Решите биквадратное уравнение: $9x^4+5x^2-4=0$.

Решение: пусть $x^2=t$, тогда $x^4=t^2$, отсюда:

$9t^2+5t-4=0$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$



$D=25+4\times4\times9=169$

$$t_{1,2}=-\frac{-5\pm13}{2\times9}$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm13}{18}$$

$t_1=-1$ $t_2=8/18=4/9$ $x^2=-1$- не может быть

$x^2=4/9$ из этого следует $x_{1,2}=\pm2/3$

Ответ: $x_{1,2}=\pm 2/3$

На главную

Решите уравнение: $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{4}{x-3} = 3$, О.Д.З.: $x \neq -2$, $x \neq 3$

Решение : $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{4}{x-3} = 3$, $| \times (x+2)(x-3)$, получим:

$3(x-3)-4(x+2)=3(x+2)(x-3)$

$3x-9-4x-8=3x^2+6x-9x-18$

$-x-17=3x^2-3x-18$

$3x^2+x+17-18-3x=0$

$3x^2-2x-1=0$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+3}}{3}$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm2}{3}$

$x_1=1$ $x_2=-1/3$

Ответ: $x_1=-1/3$ и $x_2=1$

На главную

Решите уравнение: $\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{3}{x-1} = \frac{3-x}{x-2}$ О.Д.З.: $x \neq 1$ и $x \neq 2$

Решение: умножим данное уравнение на $(x-1)(x-2)$

$1+3(x-2)=(3-x)(x-1)$

$1+3x-6=3x-3-x^2+x$

$1-6-x+x^2+3=0$

$x^2-x-2=0$

$x_{1,2}= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$ $x_{1,2}=1/2\pm3/2$

$x_1=2$ $x_2=-1$

$x_1=2$-не подходит по О.Д.З.

Ответ : $x=-1$.

Корень $x=2$ - посторонний . *При решении уравнения , содержащего неизвестное в знаменателе дроби , необходима проверка.*

На главную

Решите уравнение: $\dfrac{x+7}{x+4} - \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2+7x+12} = 0$

Решение:

$x^2+7x+12=0$

$x_{1,2} = -\dfrac{7}{2} \pm \sqrt{\dfrac{49}{4} - \dfrac{48}{4}}$

$x_{1,2}=-7/2\pm1/2$ $x_1=-4$

и $x_2=-3$, $x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$

О.Д.З.: $x\neq-4$, $x\neq-3$; получим:

$\dfrac{x+7}{x+4} - \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2+7x+12} = 0$, $|\times(x+4)(x+3)$

$(x+7)(x+3)-(x+4)+1=0$

$x^2+7x+21+3x-x-4+1=0$

$x^2+9x+18=0$

$x_{1,2} = -\dfrac{9}{2} \pm \sqrt{\dfrac{81}{4} - \dfrac{72}{4}}$

$x_{1,2}=-9/2\pm3/2$

$x_1=-6$ $x_2=-3$ – не подходит по О.Д.З.

Ответ: $x = -6$

На главную

Занимательные задачи.

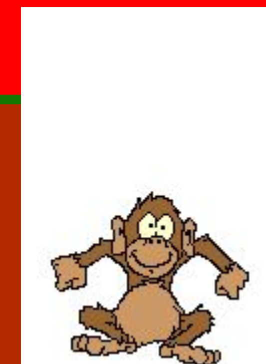
1. Стая обезьян.
2. Ряд чисел.
3. Пчелиный рой.
4. Какие числа?
5. Интересное о дискриминанте.
6. Квадратное уравнение.
7. Теорема Виета.

На главную

Стая обезьян.

На две партии разбившись,

Забавлялись обезьяны.



сть восьмая их в квадрате

роще весело резвилась;

Криком радостным двенадцать

Воздух свежий оглашали.

Вместе сколько, ты мне скажешь ,

Обезьян там было в роще?

Решение

Решение: решим эту задачу с помощью уравнения. Пусть x обезьян было в роще , тогда по условию $(x/8)^2+12=x$.

Решим это уравнение $(x/8)^2+12=0$

$1/64x^2-x+12=0$, умножим это уравнение на 64 и получим:

$x^2-64x+768=0$

$x_{1,2}=32\pm\sqrt{1024-768}$

$x_{1,2}=32\pm\sqrt{256}$

$x_1=32+16=48$

$x_2=32-16=16$

Ответ: в роще было 16 или 48 обезьян.

Назад

<u>*Задание:*</u> Записать ряд из пяти последовательных чисел , сумма квадратов первых трёх из к... х равна сумме квадратов двух п... них .

<u>*Решение:*</u> Пусть x – первое число , тогда :

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2$$

$$\ldots+x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9+x^2+8x+16$$

$$\ldots+1+4-9-8x-16=0$$

$$\ldots-8x-20=0$$

$$\ldots_2=4\pm\sqrt{16+20}$$

$$\ldots=4+6=10 \qquad x_2=4-6$$

<u>*Ответ*</u>: существует два ряда чисел , обладающих требуемым свойством :

1 ряд : 10;11;12;13;14.

2 ряд : - 2; - 1;0;1;2.

<u>Назад</u>

Пчелиный рой.

Пчёлы в числе , равном квадратному корню из половины всего их роя , сели на куст жасмина , оставив позади себя 8/9 роя . И только одна пчёлка из того же роя кружится возле лотоса , привлечённая жужжанием подруги , неосторожно попавшей в западню сладко пахнущего цветка . Сколько всего было пчёл в рое?

Решение

Решение: Пусть всего пчёл было x , тогда : $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8x}{9} + 2 = x$

Решим это уравнение: $\sqrt{x/2}=y$, $x=2y^2$

$y+ \frac{2x8xy2}{9} +2=2y2$ – |× 9;

$9y+16y^2+18-18y^2=0$

$9y-2y^2+18=0$ – |× (-1)

$2y^2-9y-18=0$

$D=81+4\times2\times18=81+144=225$

$y_{1,2}= \frac{9\pm15}{4}$

$y_1=-6/4$

$y_2=6$

$x_1=2(-6/4)^2=2(-3/2)^2=2\times9/4=4,5$, но число пчёл – натуральное, следовательно 4,5 – не подходит.

$x_2=2\times6^2=2\times36=72$

Ответ: всего было 72 пчёл в рое .

Назад

Какие числа?

<u>*Задание:*</u> найти три последовательных числа , отличающихся тем свойством , что квадрат среднего на 1 больше произведения двух остальных .

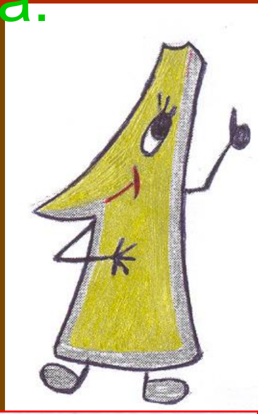
<u>*Решение*</u>:

(x-1) и x и (x+1)

$x^2 - (x-1)(x+1)=1$

$x^2-x^2+1=1$

<u>*Ответ*</u> *:* можно взять любы последовательные числа.



Назад

Если вам скажут : “ Квадратное уравнение , дискриминант которого меньше нуля , не имеет решения ” , можете уточнить : “ Не имеет решения в действительных числах , в комплексных же имеет целых два ”.

<u>Пример:</u>

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(1-5)}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(-4)}$$

$$x_1 = 1 + 2i \qquad x_2 = 1 - 2i$$

<u>Ответ</u>: $x_1 = 1 + 2i$

$x_2 = 1 - 2i$

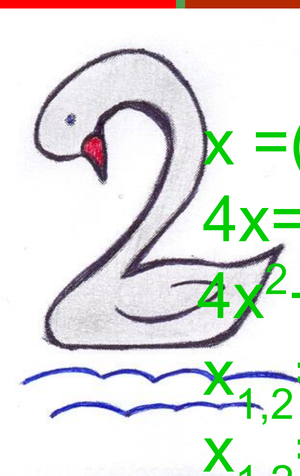
<u>Формула уравнения</u> **<u>Занимательные задачи</u>**

Задание: в уравнении $4x^2-15x+4m^2=0$, найти m так , чтобы один корень был квадратом другого .

Решение:

$x_1=x_2^{\,2}$

$(4m^2)/4=x\times x^2$, значит $m^2=x^3$, $m=\pm\sqrt{(x^3)}=\pm x\sqrt{(x)}$.



$x+x^2=15/4$

$x=(15-4x^2)/4$

$4x=15-4x^2$

$4x^2+4x-15=0$

$x_{1,2}=(-2\pm\sqrt{4+4\times15})/4$

$x_{1,2}=(-2\pm8)/4$

$x_1=-10/4$ – не натуральное число под корнем .

$x_2=6/4=3/2$

$m=\pm3/2\sqrt{(3/2)}$

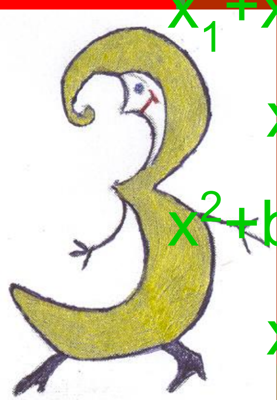
Ответ: $m=\pm3/2\sqrt{(3/2)}$

Назад

Задание: найти сумму квадратов корней уравнения

$ax^2+bx+c=0$, не находя его корней.

Решение:



$x_1+x_2=-\,b/x$

$x_1 \times x_2 = c/a$

$x^2+bx/a+c/a=0$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-b/a)^2-2c/a=b^2/a^2-2c/a=(b^2-2ac)/a^2$

Ответ: $x_1^2+x_2^2=(b^2-2ac)/a^2$

Назад

Проверь себя №1.

1.Как будет выглядеть квадратное уравнение , если известны его коэффициенты a=2 , b=7 , c=-1 ?

1) $2x^2+7x+1=0$ $+7x+1=0$

2) $2x^2+7x-1=0$

$+7x-1=0$

3) $7x^2+2x-1=0$

2.Найдите корни уравнения $x^2=289$. Какой из них является арифметическим? 1) x=17 , это арифметический корень 2) x= -17 , это арифметический корень

3) $x_1=17$, это арифметический корень ; $x_2=-17$

3.Решите уравнение $x^2=-16$ 1) $x_{1,2}=\pm 4$ 2) $x=-4$ $=\pm 4$

2) $x=-4$

Назад

Проверь себя №2.

1.Чему равен дискриминант уравнения $2x^2+3x+1=0$

1)D=9

2)+3x+1=0 1)D=9

2)D=17

+3x+1=0 1)D=9

2)D=17

3)D=1

2.Не решая уравнения $4x^2 - 7x - 2 = 0$, скажите , сколько корней оно имеет ?

1)данное уравнение имеет один корень

– 7x –2=0 , скажите , сколько корней оно имеет ?

1)данное уравнение имеет один корень

2)данное уравнение имеет два действительных корня

3)данное уравнение не имеет действительных корней

3.Продолжите фразу :» Если дискриминант меньше нуля

Назад

Проверь себя №3.

1.Один из корней уравнения x^2 –15x +14=0 равен 1 .Чему равен второй корень ?

1) 14 –15x +14=0 равен 1 .Чему равен второй корень ?

1) 14

2) 15 –15x +14=0 равен 1 .Чему равен второй корень ?

1) 14

2) 15

3) –15

2.Не решая уравнения $x^2+2x-80=0$, найдите сумму и произведение его корней . 1) $x_1+x_2=-80$; $x_1x_2=2$ =2 2) $x_1+x_2=-2$; $x_1x_2=$ – 80 80 3) $x_1+x_2=80$; $x_1x_2=2$

3.Как будет выглядеть приведённое квадратное уравнение , если известны его корни : $x_1=5$, $x_2=2$? 1) $x^2-7x+10=0$ –7x +10=0 2) $x^2+10x+7=0$ 3) x^2-7x 10=0

Назад

Проверь себя №4.

1.Если $2x^2+x-3=2(x-1)(x+3/2)$,то какие корни будет иметь уравнение $2x^2+x-3=0$?

1)$x_1=-1$,$x_2=-3/2$

2)=-3/2 2)$x_1=-1$, $x_2=3/2$ =3/2

3)$x_1=1$,$x_2=-3/2$

=-3/2 4)$x_1=1$, $x_2=3/2$

2.Разложите на множители квадратный трёхчлен $x^2-15x+26$, если решением уравнения $x^2-15x+26=0$ являются корни $x_1=13$, $x_2=2$

1)$(x+13)(x+2)$

2)$(x-13)(x+2)$

3)$(x-13)(x-2)$

3)$(x-13)(x-2)$

4)$(x+13)(x-2)$

Назад

ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №1

ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №2

ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №3

ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №4

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №1

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

Проверь себя №2

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

[Проверь себя №3]

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ

[Проверь себя №4]

Доказательство:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+2mx+c=0$$

$$D=4m^2-4ac=4(m^2-ac)$$

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm\sqrt{4(m^2-ac)}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm2\sqrt{(m^2-ac)}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-m\sqrt{m^2-ac}}{a}$$

Назад

Доказательство:

$x_1 = -p/2 + \sqrt{(p/2)^2 - q}$ +

$x_2 = -p/2 - \sqrt{(p/2)^2 - q}$

$x_1 + x_2 = -2p/2 = -p$, $x_1 + x_2 = -p$

$x_1 x_2 = (-p/2)^2 = (\sqrt{(p/2)^2 - q})^2 = (p/2) - (p/2)^2 + q^2 = q$, $x_1 x_2 = q$

Назад

Доказательство:

Пр. часть $a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-axx_2-axx_1+ax_1x_2=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$

x_1 *и* x_2 *– корни уравнения* $ax^2+bx+c=0$, *т.е.*

уравнения $x^2+bx/a+c/a=0$,*то*

по теореме Виета $x_1+x_2=-b/a$, $x_1x_2=c/a$

из этого следует: $ax^2-a(-b/a)x+ac/a=ax^2+bx+c$, *что и требовалось доказать.*

Назад

Доказательство:

$x^2=d,\ d>0$

$x^2-d=0$

$d=(\sqrt{d})^2$

$x^2-(\sqrt{d})^2=0$

$(x-\sqrt{d})(x+\sqrt{d})=0$

$x_1=\sqrt{d}$ $x_2=-\sqrt{d}$,что и требовалось доказать.

Назад

Список используемого материала:

1. “Алгебра 8 класс” Виленкин Н.Я. Москва “Просвещение” 2001год

2. “Алгебра 8 класс” Алимов Ш.А. Москва “Просвещение” 1994 год

3. Энциклопедия для детей “ Математика” том 11 Москва “Аванта+” 1998 год

4. “Сборник задач московских математических олимпиад ” Г.И.Зубелевич

5. http://office.microsoft.com – картинки

6. “Информатика в видеосюжетах” Л.Ф.Соловьёва Санкт-Петербург “БХВ-Петербург” 2002 год

На главную