

# Графы

Введение в теорию графов

Решение задач

Алгоритм Крускала

# ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

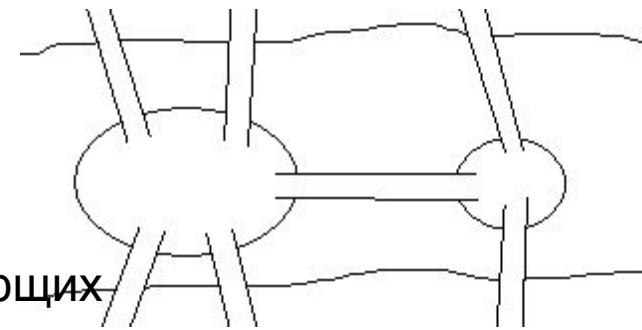
Родоначальником теории графов принято считать математика Леонарда Эйлера (1707-1783).

Через город протекает река Преголя. Она делится на два рукава, огибает остров и имеет семь мостов.

Рассказывают, что однажды житель города спросил у своего знакомого, сможет ли он пройти по всем мостам так, чтобы на каждом из них побывать только один раз и вернуться к тому месту, откуда началась прогулка. Многие горожане заинтересовались этой задачей, однако придумать решение никто не смог. Этот вопрос привлек внимание ученых разных стран. Разрешить проблему удалось известному математику Леонарду Эйлеру. Причем, он не только решил эту конкретную задачу, но придумал общий метод решения подобных задач.

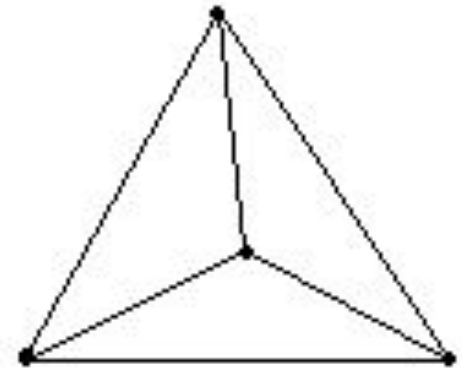
Эйлер поступил следующим образом: он "сжал" сушу в точки, а мосты "вытянул" в линии.

Такую фигуру, состоящую из точек и линий, связывающих эти точки, называют графом. Точки называют вершинами графа, а линии, которые соединяют вершины - ребрами



# Свойства графа(Эйлер):

Если все вершины графа четные, то можно одним росчерком (т.е. не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды по одной и той же линии) начертить граф. При этом движение можно начать с любой вершины и закончить в той же вершине. Граф с двумя нечетными вершинами тоже можно начертить одним росчерком. Движение надо начинать от любой нечетной вершины, а заканчивать на другой нечетной вершине. Граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.



Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз ?

*Первая работа о графах принадлежала Л. Эйлеру и появилась в 1736 году. В дальнейшем над графами работали Кениг (1774-1833), Гамильтон (1805-1865), из современных математиков - К. Берж, О. Оре, А. Зыков.*

# Задача

Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение.

Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Венера; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса ?

# Задача

На урок в танцкласс пришли слон, волк и лев. Партнершами для них были выбраны мышка, белочка и лисичка. Помогите учителю расставить их в пары, если белочка боится, что ее съест волк, а слон – что он раздавит мышку. Сколько вариантов составления пар есть у учителя танцев? Перечислите их.

# Задача

Винни-Пух решил навестить своих друзей: Пятачка, Кролика и Иа-Иа. Ему обязательно нужно побывать у каждого из своих друзей и вернуться домой. Если он к кому-то не зайдет, то его друг обидится. На Винни-Пух не любит длинных путешествий. Определите для него кратчайший путь, если известны расстояния между домиками:

Винни-Пух – Кролик – 60

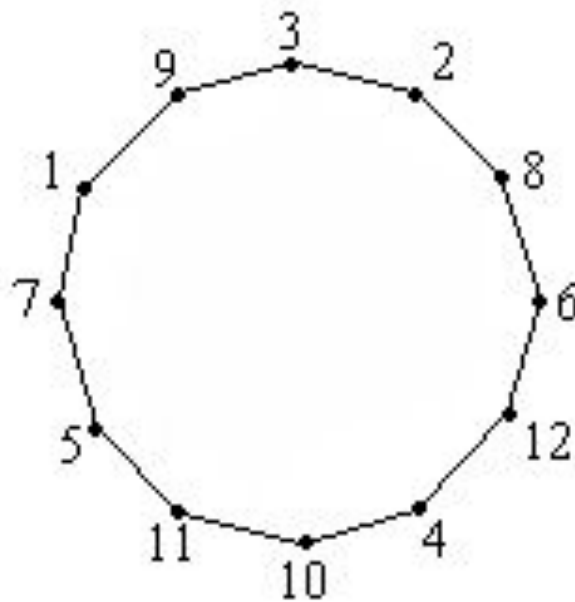
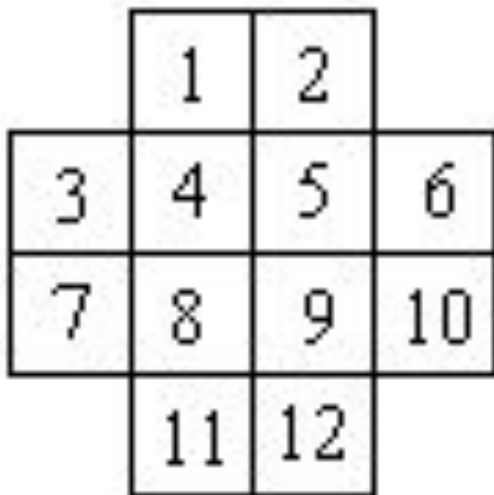
Иа-Иа – Пятачок – 55

Иа-Иа - Винни-Пух – 30

Винни-Пух - Пятачок – 40

Кролик – Пятачок - 50

Кролик – Иа-Иа – 45



Графы – замечательные математические объекты, с их помощью можно решать очень много различных, внешне не похожих друг на друга задач. теория графов стала простым, доступным и мощным средством решения вопросов, относящихся к широкому кругу проблем: это проблемы проектирования интегральных схем и схем управления, исследования автоматов, логических цепей, блок-схем программ, экономики и статистики, химии и биологии, теории расписаний и дискретной оптимизации.

# Основные понятия теории графов

- Граф задается парой множеств  $G(V,R)$
- Вершины называются смежными, если их соединяет ребро
- Количество вершин и ребер – мощность множеств  $V,R$
- Ребро и любая из двух вершин называются инцидентными
- Степень вершины – количество инцидентных ей ребер
- Вершины, не имеющие инцидентных ребер, называются изолированными



# Основные понятия теории графов

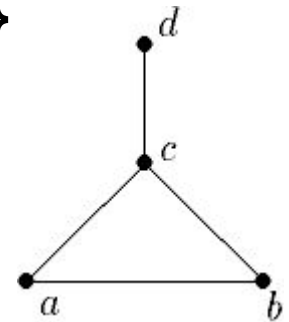
- Маршрут графа – последовательность чередующихся вершин и ребер
- Замкнутый маршрут – маршрут, в котором начальная и конечная вершины совпадают
- Простая цепь – маршрут, в котором все ребра и вершины различны
- Связный граф – граф, в котором каждая вершина достижима из любой другой

# Основные понятия теории графов

- Ориентированный граф (орграф) имеет направленные ребра – дуги
- Входящая степень вершины – количество входящих дуг
- Исходящая степень вершины - количество исходящих дуг
- Взвешенный граф – граф, ребрам или дугам которого поставлены в соответствие числовые величины
- Вес сети равен сумме весов ее ребер

# Способы задания графа

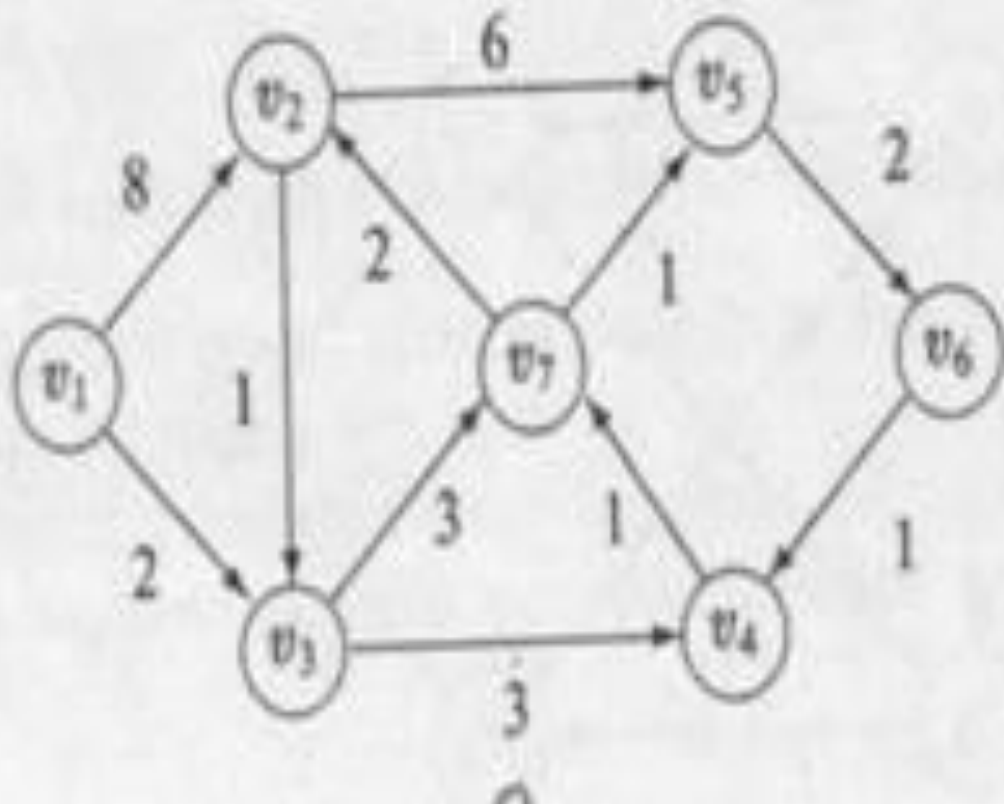
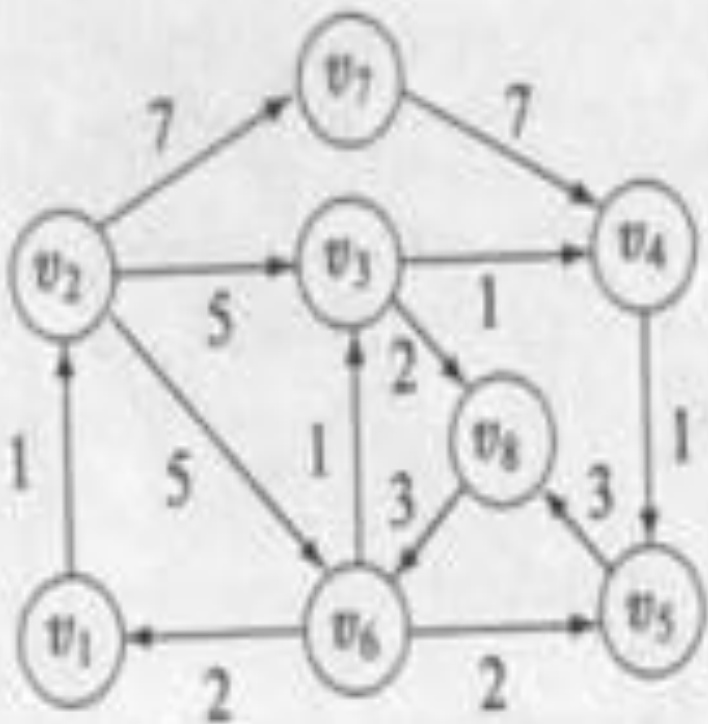
- Явное задание графа как алгебраической системы  $\{a, b, c, d\}$ :  $\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a), (c, d), (d, c)\}$
- Геометрический
- Матрица смежности
- Матрица инцидентности



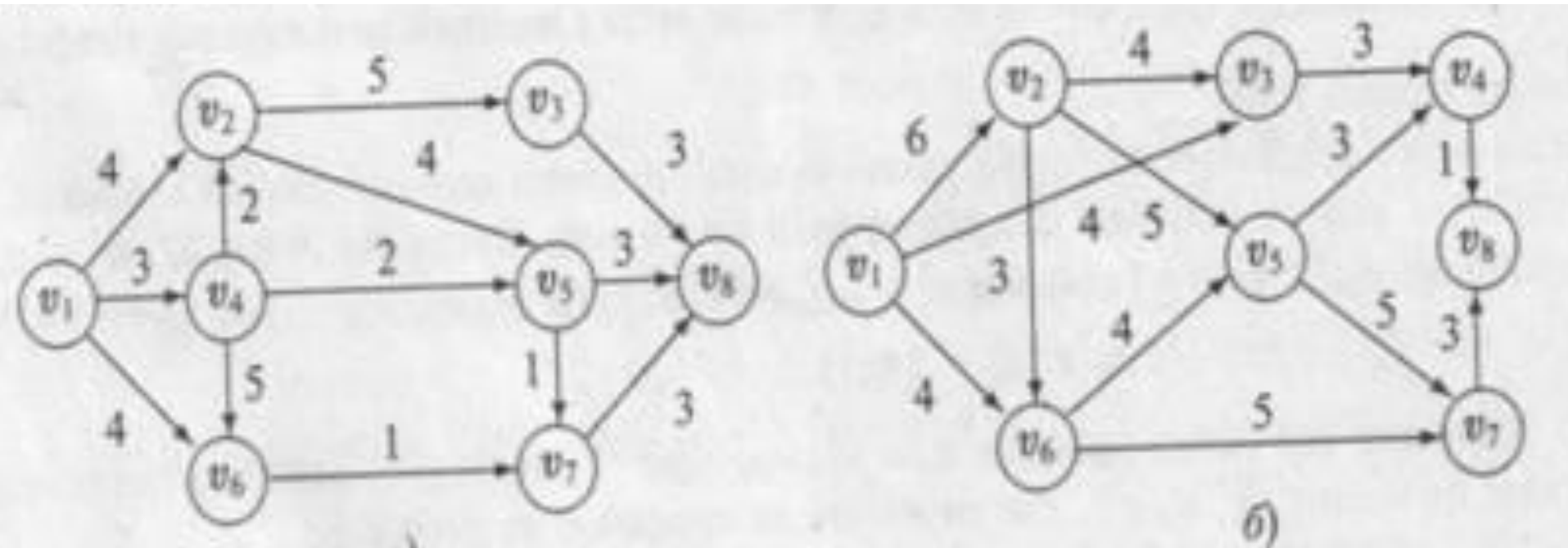
	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	0	0	1	0

	u	v	w	x
a	1	0	0	0
b	1	1	1	0
c	0	1	0	1
d	0	0	1	1

# Составить матрицы смежности для графов



# Составить матрицы смежности для графов



# Основные понятия теории графов(продолжение)

- *Подграфом* графа называется граф, являющийся подмоделью исходного графа. Иначе говоря, подграф содержит некоторые вершины исходного графа и некоторые рёбра (только те, оба конца которых входят в подграф).
- *Остовной связный подграф* – подграф графа  $G$ , который содержит все его вершины и каждая вершина достижима из любой другой
- *Дерево* – граф без циклов
- *Остовное связное дерево* – подграф, включающий вершины исходного графа  $G$ , не содержащего циклы, каждая вершина которого достижима из любой другой.

# Основные понятия теории графов

Цикломатическое число  $\gamma$  показывает, сколько ребер нужно удалить из графа, чтобы в нем не осталось циклов

$$\gamma = m - n + 1,$$

$m$ - количество ребер

$n$ -количество вершин

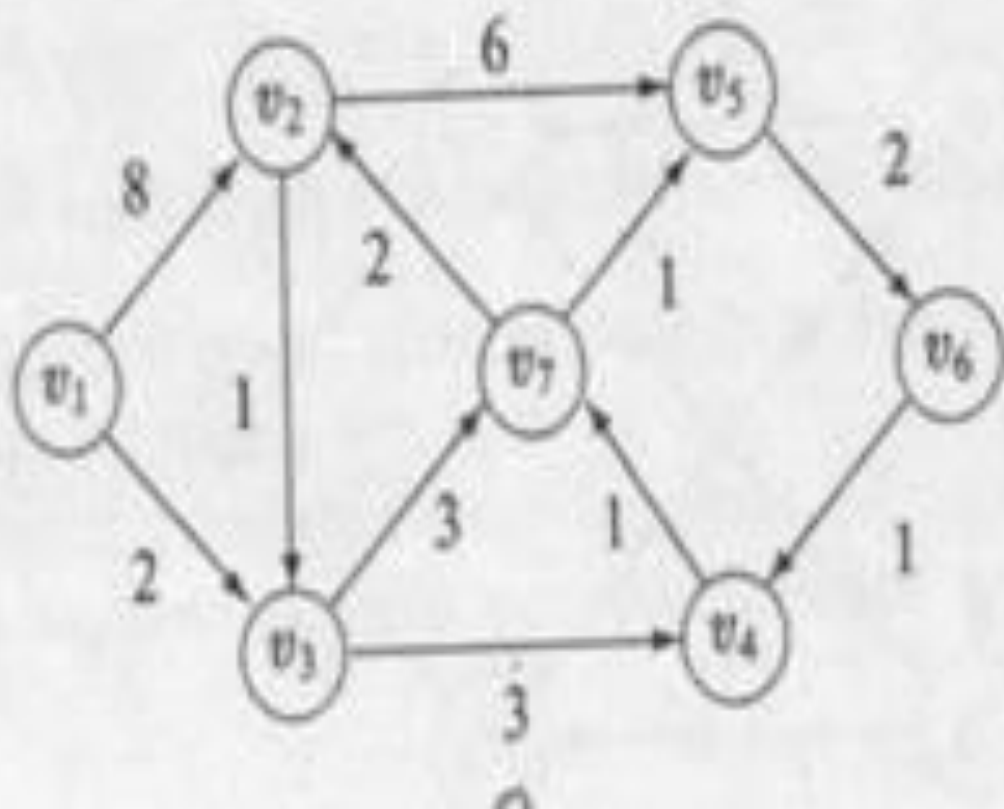
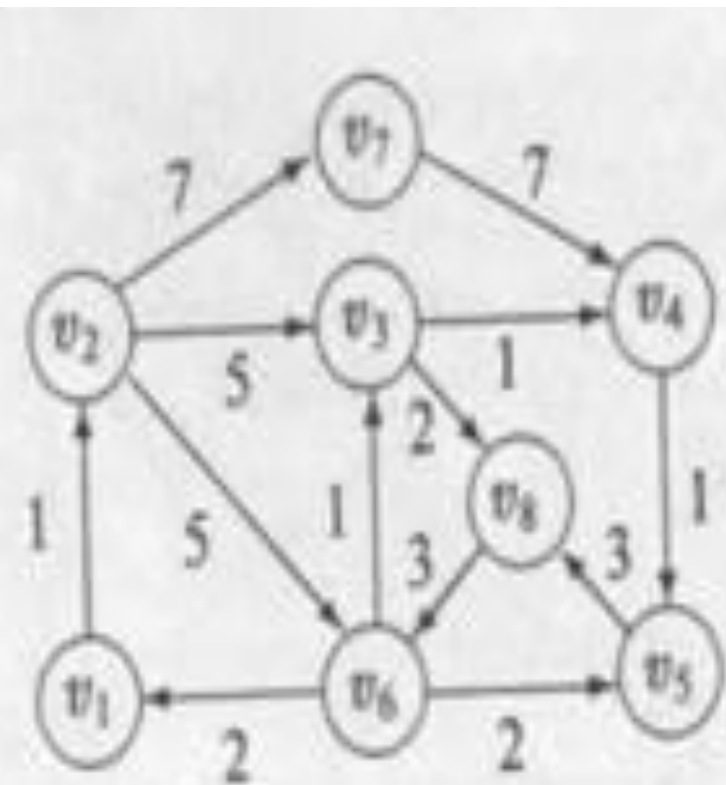
# Алгоритм Крускала построения остовного связного дерева минимального веса

1. Построение остовного подграфа с изолированными вершинами
2. Упорядочить ребра по возрастанию
3. Ребра последовательно, по возрастанию их весов, включаются в остовное дерево до тех пор, пока не включены все вершины
  1. Обе вершины включаемого ребра принадлежат одноэлементным множествам, тогда они объединяются в новое, связное подмножество
  2. Одна из вершин принадлежит связному подмножеству, другая нет, тогда включаем вторую в то мн-во, которому принадлежит первая
  3. Обе вершины принадлежат разным подмножествам, тогда объединяем подмножества
  4. Обе вершины принадлежат одному подмножеству – исключаем ребро



# Задание

- Применить алгоритм Крускала для графов



- Компьютерный практикум: создать проект «Построение остовного связного дерева графа» (на языке Visual Basic или Turbo Delfi – по выбору)
- Д/з: §1.10.1, 1.10.2(1.10.3)