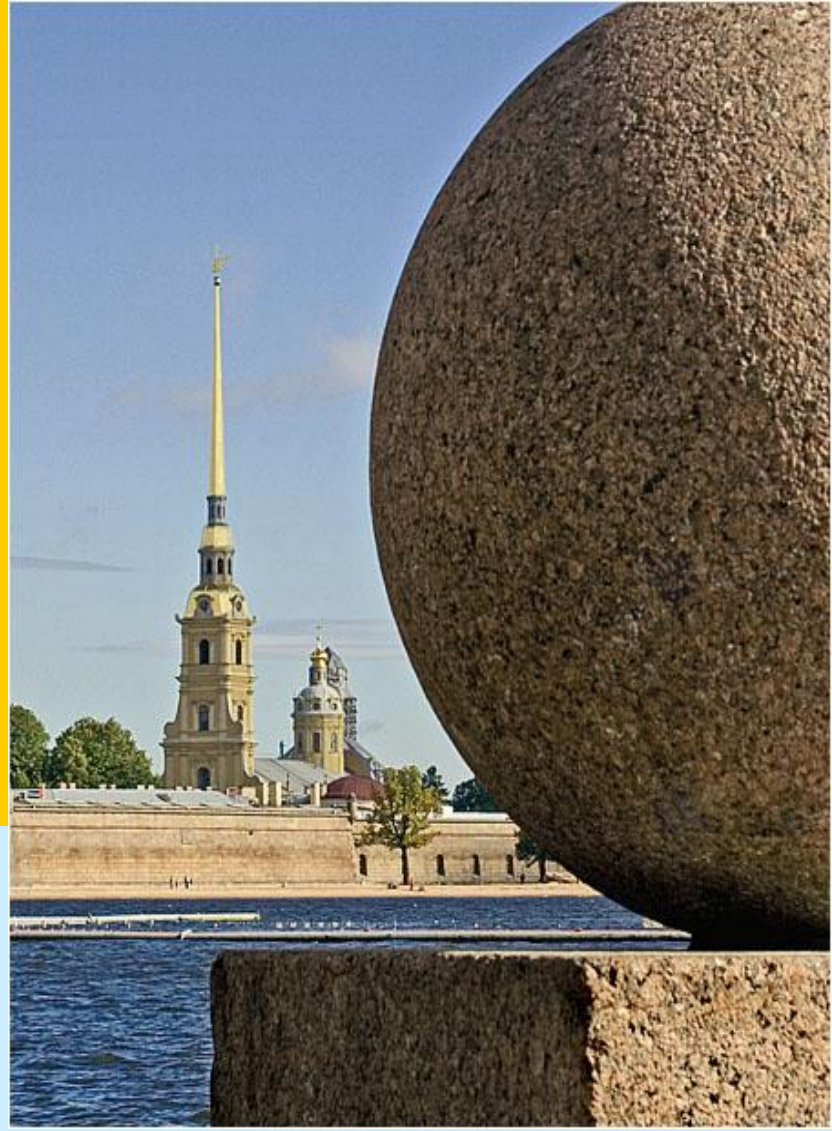
Проблема сужения множества Парето и подходы к ее решению



Владимир Ногин

Д.ф.-м.н., профессор
СПбГУ, ф-т ПМ-ПУ

Содержание

- Исторические аспекты
- Постановка задачи многокритериального выбора
- Принцип Эджворта-Парето
- Эвристические методы поиска «наилучшего» решения
- Основы аксиоматического подхода к решению проблемы сужения множества Парето
- Современное состояние аксиоматического подхода
- Литература

Истоки

J. Borda (1871)

M. Condorcet (1785)

F. Edgeworth (1881)

V. Pareto (1906)

Постановка задачи многокритериального выбора
(в терминах решений)

ЗМКВ: $\langle X, f, P_X \rangle$

X – множество возможных решений

$f = (f_1, \ldots, f_m)$ – векторный критерий

P_X – бинарное отношение строгого предпочтения ЛПР, заданное на X; т.о. $xP_X x'$ означает, что x предпочтительнее x‘

C(X) (Sel(X)) – множество выбираемых решений

$C(X) \subset X$

Постановка задачи многокритериального выбора
(в терминах векторов)

ЗМКВ: $\langle Y, P_Y \rangle$

$Y = f(X)$ – множество возможных векторов

P_Y – отношение строгого предпочтения на Y

$xP_X x' \leftrightarrow yP_Y y'$, где $y = f(x)$, $y' = f(x')$

$C(Y)$ ($Sel(Y)$) – множество выбираемых векторов

$C(Y) = f(C(X)) \subset Y$

Множество Парето

$P_f(X) = \{x^* \in X |$ не существует $x^* \in X : f(x) \geq f(x^*)\}$

$P(Y) = \{y^* \in Y \mid$ не существует $y^* \in Y : y \geq y^*\}$

$y \geq y^* \leftrightarrow y_i \geq y_i^*$, $i=1,\ldots,m$; $y \neq y^*$

$P(Y) = f(P_f(X))$

Аксиомы «разумного» выбора

Аксиома 1 (аксиома исключения доминируемых векторов)

$$y^1, y^2 \in Y: \quad y^1 P_Y y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 \notin C(Y).$$

Аксиома 2 (аксиома Парето):

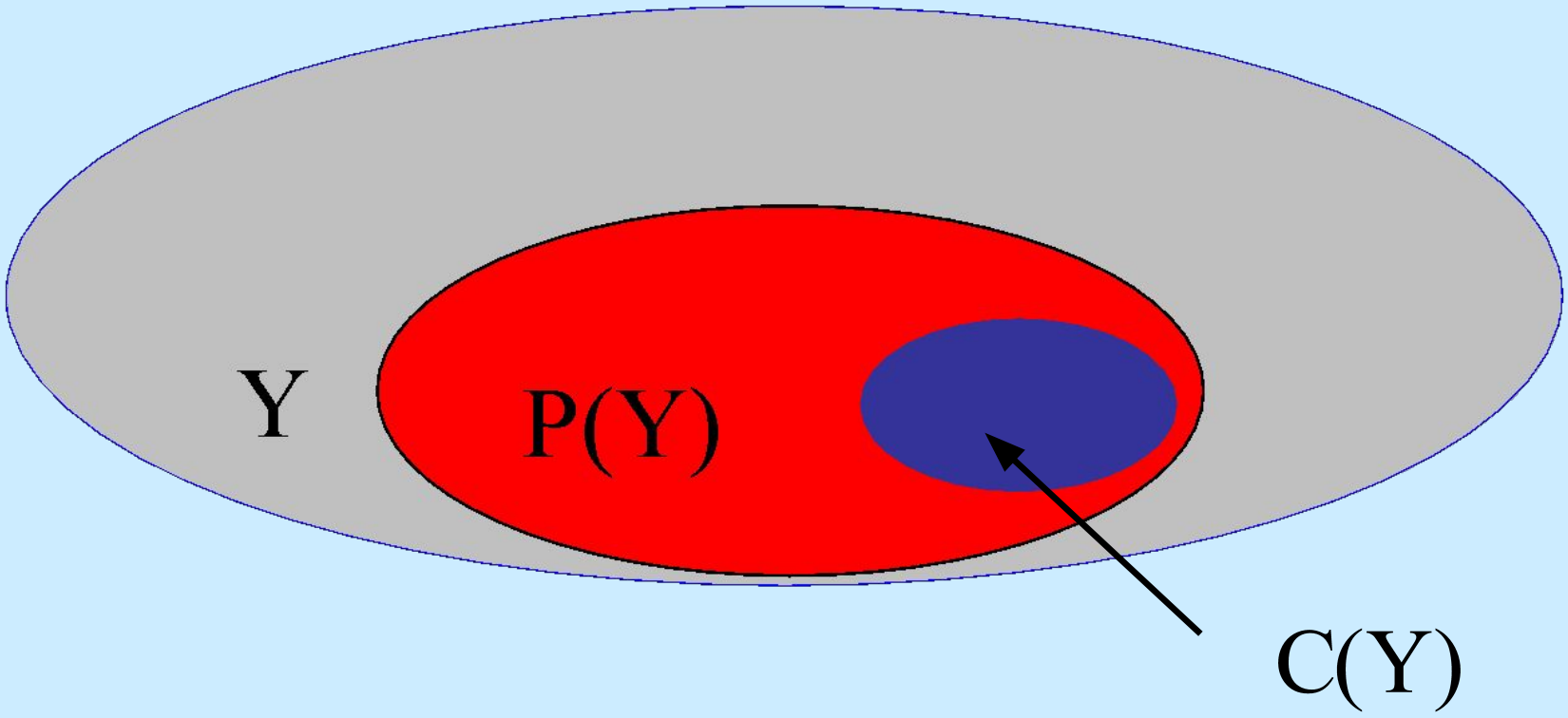
$$y^1, y^2 \in Y: \quad y^1 \geq y^2 \quad \Rightarrow \quad y^1 \; P_Y \; y^2.$$

Принцип Эджворта-Парето

Предположим, что в процессе выбора ЛПР следует аксиоме Парето. Тогда для любого множества выбираемых им векторов C(Y), подчиненного аксиоме 1, имеет место включение

$$C(Y) \subset P(Y)$$

Геометрическая иллюстрация



Выводы

1. Если ЛПР выбирает хотя бы один вектор за пределами множества Парето P(Y), то оно игнорирует по крайней мере одну из аксиом 1 – 2.
2. Если хотя бы одна аксиома 1 или 2 не принимается, то выбираемый вектор не обязательно должен быть парето-оптимальным.
3. Если используется какой-либо метод выбора того или иного парето-оптимального вектора, то обязательно следует предполагать выполненными обе аксиомы 1 – 2.

Эвристические методы отыскания «наилучшего» решения

- Методы ранжирования (J. Borda, M.Condorcet, A. Copeland), МАИ (T. Saaty), ELECTRE (B. Roy), MACBETH (J. Brans)
- Методы, основанные на построении функции ценности (R. Keeney, H. Raiffa, P. Fishburn)
- Методы скаляризации
- Целевое программирование
- Лексикографическая оптимизация
- Человеко-машинные процедуры

Методология сужения множества Парето

- Гафт М.Г., Озерной В.М.
- Подиновский В.В. и Вик.В.
- Ларичев О.И.
- Ногин В.Д.
- Берман В.П., Наумов Г.Е.
- Барышников Ю.М., Березовский Б.А., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М.

Свойство произвольной пары парето-оптимальных векторов

Пусть $Y \subset R^m$. Для любых двух векторов $y, y' \in P(Y)$ существуют два непустых непересекающихся множества номеров критериев $A, B \subset \{1,2,,\ldots,m\}$, таких, что

1) $y_i > y'_i$ для всех $i \in A$
2) $y'_j > y_j$ для всех $j \in B$
3) $y_s = y'_s$ для всех остальных s (если они найдутся)

«Квант» информации

Самый простой способ сужения множества Парето – это исключение какого-то одного вектора из пары парето-оптимальных векторов после их сравнения;

иначе говоря, − предпочтение одного парето-оптимального вектора другому, т.е.

$$y \, P_Y \, y', \qquad \text{где} \qquad y, y' \in P(Y).$$

Будем говорить, что подобное предпочтение составляет некий «квант» информации об отношении строгого предпочтения P_Y ЛПР.

Развитие идеи

Для того чтобы сужение было «заметным» необходимо ограничить рассмотрение таким классом задач многокритериального выбора, в котором поступление одного указанного «кванта» информации приводило бы к удалению сразу целого ряда других парето-оптимальных векторов.

Существует несколько подходов, которые, в сильной степени зависят и от шкал, в которых измеряются значения критериев.

Предположения

Будем считать, что значения критериев измеряются в количественных шкалах (отношений, разности, интервалов).

Рассматриваемый класс задач ограничим набором из определенных 4 аксиом «разумного» поведения ЛПР в процессе выбора решений.

Аксиомы «разумного» выбора

1) Исключение доминируемых векторов
2) Транзитивность отношения предпочтения
3) Согласованность отношения предпочтения с критериями
4) Инвариантность отношения предпочтения относительно положительного линейного преобразования

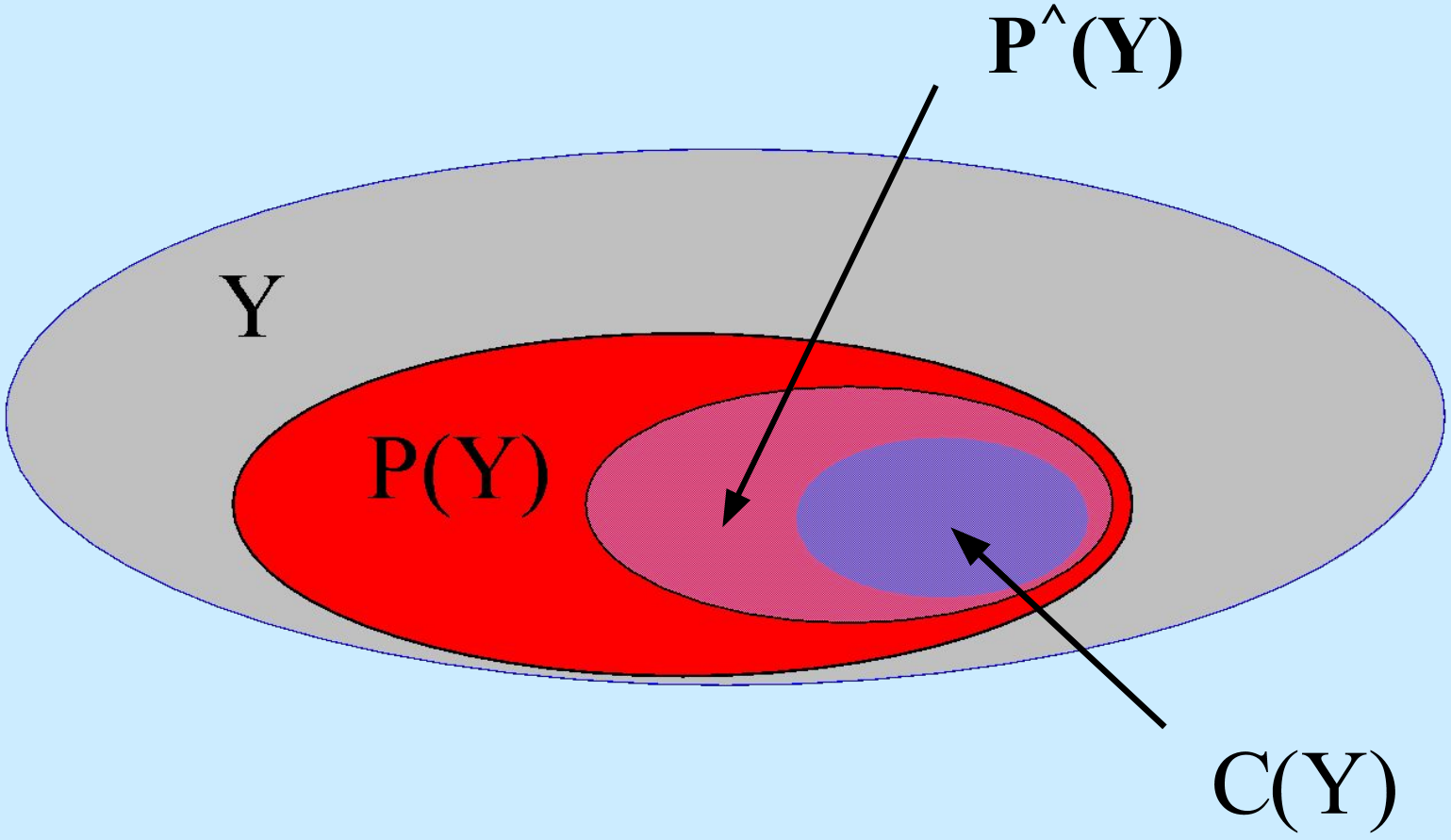
Оценка сверху

При выполнении аксиом 2-4 неизвестное отношение P_Y строгого предпочтения ЛПР является конусным с острым выпуклым конусом.

Получение «кванта» информации дает возможность выделить некоторую «часть» отношения P_Y, с помощью которой можно построить определенную *оценку сверху* $P^{\wedge}(Y)$ для неизвестного множества выбираемых векторов: $\boxed{C(Y) \subset P^{\wedge}(Y) \subset P(Y)}$

где $P^{\wedge}(Y) = f(P_{f^{\wedge}}(X))$.

Геометрическая иллюстрация



Построение «нового» критерия

Новый критерий $f^\wedge$ отличается от «старого» f лишь компонентами группы B:

- $f_0^\wedge(x) = \min \{ f_i(x)/w_i \mid i \in A \} + \min \{ f_j(x)/w_j \mid j \in B \}$
- $f_{ij}^\wedge(x) = f_i(x)/w_i + f_j(x)/w_j$ для всех $i \in A$, $j \in B$

где

$$w_i = y_i - y'_i, \quad w_j = y'_j - y_j .$$

Использование набора «квантов» информации

Получены условия непротиворечивости подобной информации.

- В случае конечного Y разработан алгоритм построения оценки сверху
- Для бесконечного Y есть ряд результатов, но в общем случае решения нет. Задача выпуклого анализа.

Полнота конечного набора «квантов» информации

Доказано, что с помощью конечного непротиворечивого набора «квантов» информации можно получить сколь угодно точную оценку сверху для неизвестного множества недоминируемых векторов

$$Ndom(Y) = \{ y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y: y \, P_y \, y^* \}$$

Обобщение и развитие

- Более общие шкалы для измерения значений критериев
- Нечеткое отношения предпочтения P_Y и/или нечеткое множество Y
- Использование функций выбора (в том числе и нечеткой) и общей модели теории выбора вариантов
- Решение прикладных задач

Персональная страница в Интернет

На русском языке:

http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/nogin

На английском языке:

http://www.apmath.spbu.ru/en/staff/nogin

Литература

- Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов. Основы теории. – М.: Наука, 1990, 236 с.
- Березовский Б.А., Барышников Ю.М., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М. Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты. – М.: Наука, 1989, 128 с.
- Берман В.П., Наумов Г.Е. Отношение предпочтения с интервальным коэффициентом замещения// Автоматика и телемеханика, 1989, 3 3, С. 139-153.
- Гафт М.Г. Принятие решений при многих критериях. М.: Знание, 1979.
- Гафт М.Г., Подиновский В.В. О построении решающих правил в задачах принятия решений // Автоматика и телемеханика. 1981. № 6. С. 128 – 138.
- Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций, М.: Наука, 1971.
- Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. − М.: Радио и связь, 1981.
- Климова О.Н., Ногин В.Д. Учет взаимно зависимой информации об относительно1й важности критериев в процессе принятия решений// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, т. 46, № 7, С. 2179-2191.

Литература

- Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. – М.: Наука, 1979.
- Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.
- Меньшикова О.Р., Подиновский В.В. Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями// ЖВМиМФ, 1988, 28(5), 647-659.
- Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
- Ногин В.Д. Новый способ сужения области компромиссов// Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, 5.
- Ногин В.Д. и др. Основы теории оптимизации. – М.: Высшая школа, 1986, 384 с.
- Ногин В.Д. Теоремы о полноте в теории относительной важности критериев// Вестник СПбГУ, сер.: мат., мех., астрономия., 2000, 40 (25), 13-18.
- Ногин В.Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002, т. 42, № 7, С. 950-956.

Литература

- Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2005, 2-е изд.
- Ногин В.Д. Принцип Эджворта-Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003, т. 43, № 11, с. 1676-1686.
- Ногин В.Д. Обобщенный принцип Эджворта-Парето и границы его применимости// Экономика и математические методы, 2005, т. 41, № 3, С. 128-134.
- Ногин В.Д. Принцип Эджворта-Парето в терминах нечеткой функции выбора// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, т. 46, № 4, С. 582-591.
- Ногин В.Д., Волкова Н.А. Эволюция принципа Эджворта-Парето// Таврический вестник информатики и математики, 2006, № 1, С. 21-33.

Литература

- Озерной В.М., Гафт М.Г. Методологи решения дискретных многокритериальных задач // Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Машиностроение. 1978. С. 14 – 47.
- Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с однородными и равноценными критериями// ЖВМиМФ, 1975, 15 (2), 330-334.
- Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями // Автоматика и телемеханика, 1976, 2, 118-127.
- Подиновский В.В. Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Машиностроение. 1978. С. 48 – 82.
- Подиновский В.В. Принцип гарантированного результата для частичных отношений предпочтения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19. № 6. С. 1436 – 1450.
- Подиновский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. С. 117 – 149.

Литература

- Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. − М.: Наука, 1982, 255 с.
- Салуквадзе М.Е. О задаче линейного программирования с векторным критерием качества// Автоматика и телемеханика, 1972, 5, 99-105.
- Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978, 352 с.
- Berman V.P., Naumov G. E. Podinovski V.V. Interval value tradeoffs methodology and techniques of multi-criteria decision analysis. In User-oriented methodology and techniques of decision analysis and support. Springer-Verlag, Berlin, 1993, P. 144-149.
- Charns A., Cooper W.W., Ferguson R.O. Optimal estimation of execute compensation by linear programming// Management Science, 1955, 1 (2).
- Geoffrion A.M., Dyer J.S., Fienberg A. An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department// Management Science, 1972, v. 19, No. 4, Part 1.
- Figueira J., Greco S., Ehrgott M. Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys. Springer, 2005.

Литература

- Miettinen K. Nonlinear multiobjective optimization. Kluver, 1999.
- Noghin V.D. Estimation of the set of nondominated solutions// Numerical Functional Analysis and Applications, 1991, 12 (5&6), 507-515.
- Noghin V.D. Upper estimate for a fuzzy set of nondominated solutions// Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67, 303-315.
- Noghin V.D. Relative importance of criteria: a quantitative approach// J. Multi-Criteria Decision Analysis, 1997, 6, 355-363.
- Noghin V.D. What is the relative importance of criteria and how to use it in MCDM. - In “Multiple Criteria Decision Making in the New Millenium”, Proceedings of the XV International Conference on MCDM (ed. by M Köksalan, S. Zionts) in Ankara, Turkey (July, 2000), Springer, 2001, pp. 59-68.
- Noghin V.D. The Edgeworth-Pareto principle in decision making. Российско-финская школа-семинар «Динамические игры и многокритериальная оптимизация». Сентябрь 2006г., Петрозаводск, Россия. Ресурс ИНТЕРНЕТ: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/nogin/Edgeworth_Pareto_Principle.pdf

Литература

- Noghin V.D. An Axiomatization of the Generalized Edgeworth-Pareto Principle in Terms of Choice Function// Mathematical Social Sciences, 2006, v. 52, No 2, pp. 210-216.
- Podinovski V.V. Multicriteria optimization problems involving importance-ordered criteria// Elster K.H. (ed.) Modern mathematical methods of optimization, Berlin, Akademie Verlag, 1993,, P 254-267.
- Podinovski V.V. Criteria importance theory// Mathematical social sciences, 1994, vol. 27, No 3, P. 237-252.
- Podinovski Vic. V. A DSS for multiple criteria analysis with imprecisely specified trade-offs// European Journal of Operational Research, 1999, vol. 113, P. 261-270.
- Saaty T.L. Multicriteria decision making. The analytic hierarchy process. – Pittsburgh: RWS Publications, 1990, 287 pp.
- Yu P.L. Multiple-criteria decision making: concepts, techniques, and extensions. – New-York – London: Plenum Press, 1985, 388 pp.