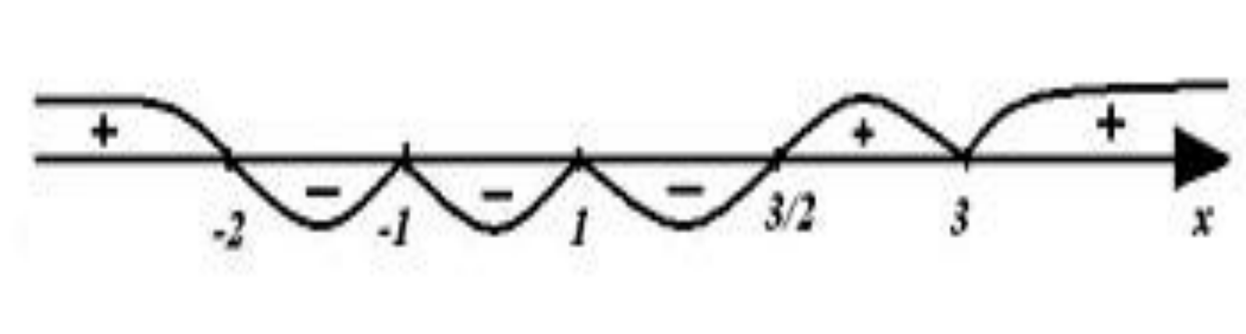
Обобщенный метод интервалов



Учитель математики
высшей категории

Иванова Татьяна Марковна.

Задача №1.

Решим следующее неравенство методом интервалов:

$$\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{(4-x)x} \geq 0$$

1

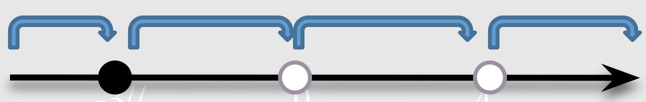
- Определим область допустимых значений
- $x \neq 0$ Знаменатель дроби должен быть отличен от нуля
- $x \neq 4$

2

- Найдем корни числителя и знаменателя
- $(x+3)^2*(x^2+x+1)*(4-x)x = 0$
- $x = -3$ (корень четной кратности), $x = 4$, $x = 0$
- $x^2 + x + 1 = 0$
- $D < 0$ т.е. $x^2 + x + 1 > 0$ при любом x

3

- Нанесем найденные корни на числовую ось:
- \- \- + \-



- -3// 0 4
- Ответ: (0;4).

Описанный выше метод с небольшими изменениями может быть использован не только для решения рациональных неравенств, но и для произвольных неравенств. Применительно к таким неравенствам этот метод называется ***обобщенным методом интервалов***.

Задача №2.

Решим неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-x}+2x-1}{x+1} \geq 0$$

Алгоритм решения неравенств:

1. ОДЗ
2. Нули функции (т.е. нули числителя и знаменателя)
3. Расстановка корней на координатной оси с учетом ОДЗ.
4. Определение промежутков знакопостоянства.
5. Ответ.

$$\frac{\sqrt{1-\mathrm{x}}+2\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1} \geq 0$$

1. ОДЗ: $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x+1 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \mathrm{x} \leq 1, \\ \mathrm{x} \neq -1. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{1-x}+2x-1}{x+1} \geq 0$$

2.

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} = 1-2x, \\ 1-2x \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-x = (1-2x)^2, \\ x \leq \frac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2 - 3x = 0, \\ x \leq \frac{1}{2}; \end{cases}$$

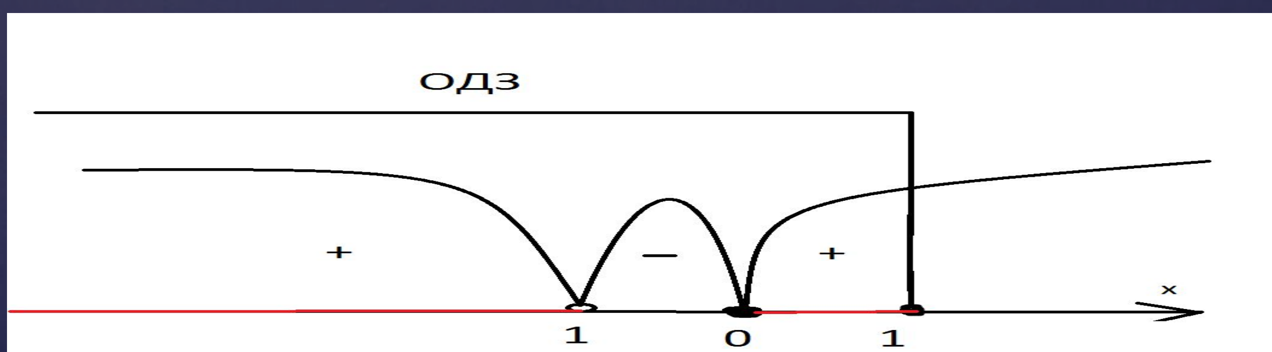
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{3}{4}, \end{array}\right. \\ x \leq \dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad x = 0.$$

3. $x + 1 = 0,$ $x = -1.$

$$\frac{\sqrt{1-x}+2x-1}{x+1} \geq 0$$

4. При x=1 выражение неравенства имеет знак $(\sqrt{0}+1)/2 > 0$ (положительный).

5. Отмечаем промежутки знакопостоянства на координатной оси:



Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup [0; 1]$

Задача № 3

Пусть x_0 – наибольшее целое число, являющееся решением неравенства.

$$\frac{2 \cdot 5^x - 250}{x^2 - 4x + 4} < 0$$

Найти $(x_o + 2)(x_o^2 + 1)$

1. ОДЗ

$x^2 - 4x + 4 \neq 0$

$(x - 2)^2 \neq 0$

$x \neq 2$

2. Нули числителя:

$2 \cdot 5^x - 250 = 0$

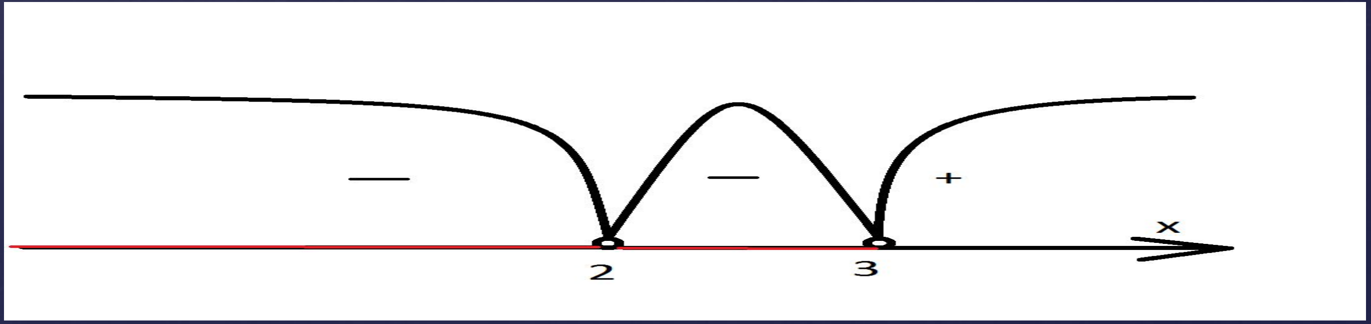
$5^x = 125$

$x = 3$

3. Нули знаменателя

$x = 2$

4. Отмечаем промежутки знакопостоянства на координатной оси: $f(4) > 0$



Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3)$

Исходя из этого мы можем заключить, что наибольшее целое решение неравенства будет равно единице.

$x_0 = 1$

Найдем $(x_o + 2)(x_o^2 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$

Ответ: 6.

Задача №4.

Найти все значения x, для которых точки графика функции

$$y = \frac{7\cdot 49^x - 50\cdot 7^x}{15-2x}$$

лежат выше соответствующих точек графика функции

$y = -\frac{7}{15-2x}$.

Решение: условие данной задачи можно записать с помощью неравенства

$$\frac{7\cdot 49^x - 50\cdot 7^x}{15-2x} > -\frac{7}{15-2x},$$

$$\frac{7\cdot 49^x - 50\cdot 7^x}{15-2x} + \frac{7}{15-2x} > 0,$$

$$\frac{7\cdot 49^x - 50\cdot 7^x + 7}{15-2x} > 0.$$

Решение

1. ОДЗ: $x \neq 7,5$
2. Обозначим $7^x = a$

$7a^2 - 50a + 7 = 0$

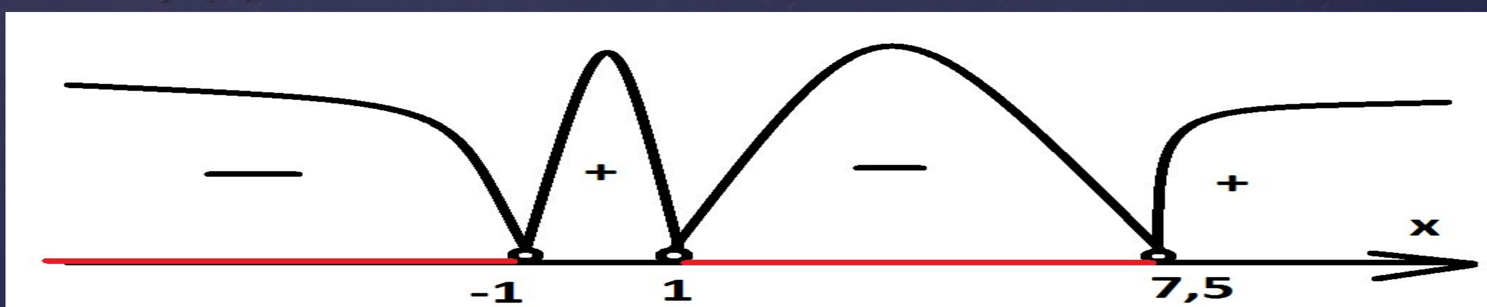
$D = 625 - 49 = 576 = 24^2$

$a = \frac{25 \pm 24}{7}$ $\quad a_1 = 7 \quad a_2 = 1/7$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

3. Нули знаменателя $x = 7,5$

4. . Отмечаем промежутки знакопостоянства на координатной оси: $f(2) < 0$



Ответ:

$(-\infty; -1) \cup (1; 7,5)$