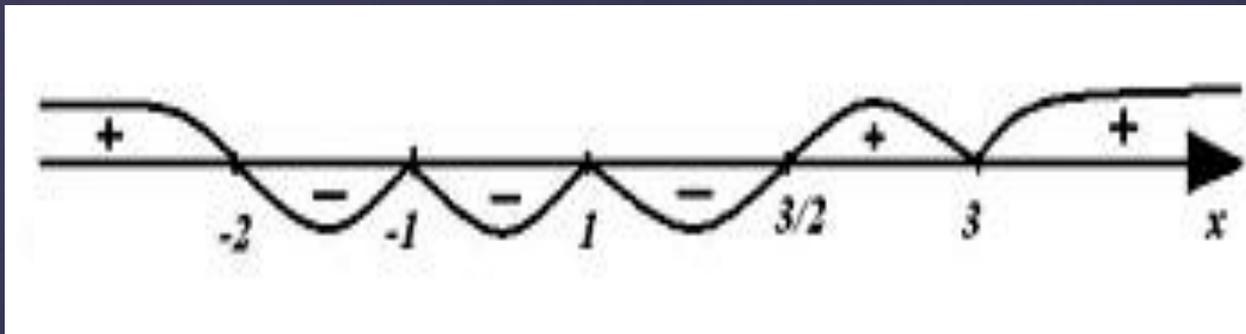


Обобщенный метод интервалов



Учитель математики
высшей категории

Иванова Татьяна Марковна.

Задача №1.

Решим следующее неравенство
методом интервалов:

$$\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{(4-x)x} \geq 0$$

1

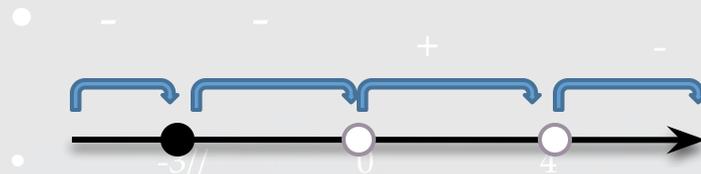
- Определим область допустимых значений
- $x \neq 0$ Знаменатель дроби должен быть отличен от нуля
- $x \neq 4$

2

- Найдем корни числителя и знаменателя
- $(x+3)^2(x^2+x+1)(4-x)x = 0$
- $x = -3$ (корень четной кратности), $x = 4$, $x = 0$
- $x^2 + x + 1 = 0$
- $D < 0$ т.е. $x^2 + x + 1 > 0$ при любом x

3

- Нанесем найденные корни на числовую ось:



- Ответ: $(0;4)$.

Описанный выше метод с небольшими изменениями может быть использован не только для решения рациональных неравенств, но и для произвольных неравенств. Применительно к таким неравенствам этот метод называется *обобщенным методом интервалов*.

Задача №2.

Решим неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-x} + 2x - 1}{x+1} \geq 0$$

Алгоритм решения неравенств:

1. ОДЗ
2. Нули функции (т.е. нули числителя и знаменателя)
3. Расстановка корней на координатной оси с учетом ОДЗ.
4. Определение промежутков знакопостоянства.
5. Ответ.

$$\frac{\sqrt{1-x} + 2x - 1}{x+1} \geq 0$$

1. ОДЗ: $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x+1 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1, \\ x \neq -1. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{1-x}+2x-1}{x+1} \geq 0$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-x} = 1 - 2x, \\ 1 - 2x \geq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - x = (1 - 2x)^2, \\ x \leq \frac{1}{2}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x^2 - 3x = 0, \\ x \leq \frac{1}{2}; \end{array} \right.$$

□

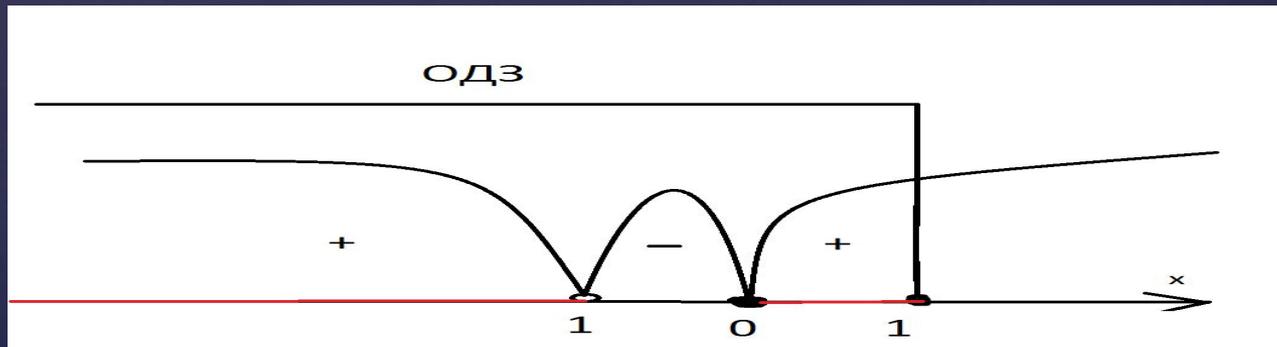
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ x = \frac{3}{4}, \\ x \leq \frac{1}{2}; \end{array} \right. \quad x = 0.$$

3. $x + 1 = 0, \quad x = -1.$

$$\frac{\sqrt{1-x} + 2x - 1}{x+1} \geq 0$$

4. При $x=1$ выражение неравенства имеет знак $(\sqrt{0} + 1)/2 > 0$ (положительный).

5. Отмечаем промежутки знакопостоянства на координатной оси:



Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup [0; 1]$

Задача № 3

Пусть x_0 – наибольшее целое число, являющееся решением неравенства.

$$\frac{2 \cdot 5^x - 250}{x^2 - 4x + 4} < 0$$

□ Найти $(x_0 + 2)(x_0^2 + 1)$

1. ОДЗ

$$x^2 - 4x + 4 \neq 0$$

$$(x - 2)^2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

2. Нули числителя:

$$2 \cdot 5^x - 250 = 0$$

$$5^x = 125$$

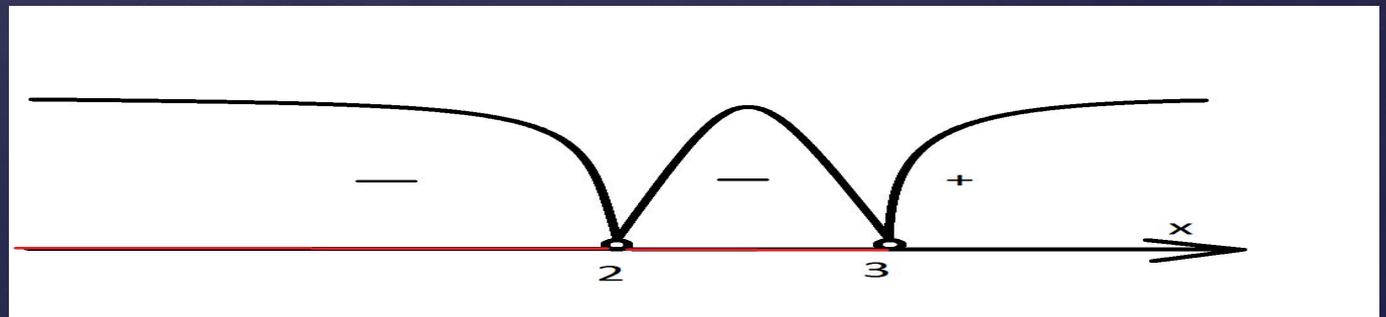
$$x = 3$$

□

3. Нули знаменателя

$$x = 2$$

4. Отмечаем промежутки знакопостоянства на координатной оси: $f(4) > 0$



Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3)$

Исходя из этого мы можем заключить, что наибольшее целое решение неравенства будет равно единице.

$$x_0 = 1$$

$$\square \text{ Найдем } (x_0 + 2)(x_0^2 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$$

Ответ: 6.

Задача №4.

Найти все значения x , для которых точки графика функции

$$y = \frac{7 \cdot 49^x - 50 \cdot 7^x}{15 - 2x}$$

лежат выше соответствующих точек графика функции

$$y = -\frac{7}{15 - 2x}.$$

Решение: условие данной задачи можно записать с помощью неравенства

$$\frac{7 \cdot 49^x - 50 \cdot 7^x}{15 - 2x} > -\frac{7}{15 - 2x},$$

$$\frac{7 \cdot 49^x - 50 \cdot 7^x}{15 - 2x} + \frac{7}{15 - 2x} > 0,$$

$$\frac{7 \cdot 49^x - 50 \cdot 7^x + 7}{15 - 2x} > 0.$$

Решение

1. УДР. АТТД

2. Обозначим $7^x = a$

$$7a^2 - 50a + 7 = 0$$

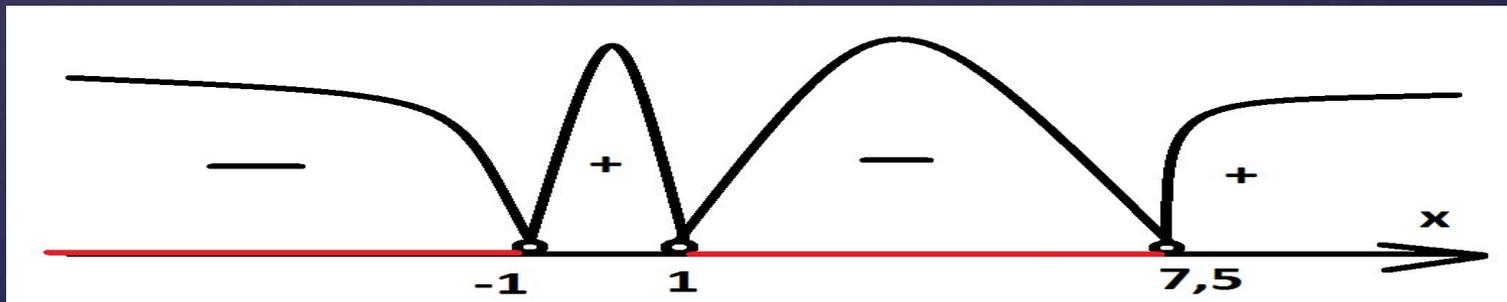
$$D = 625 - 49 = 576 = 24^2$$

$$a = \frac{25 \pm 24}{7} \quad a_1 = 7 \quad a_2 = 1/7$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

3. Нули знаменателя $x = 7,5$

4. . Отмечаем промежутки знакопостоянства на координатной оси: $f(2) < 0$



Ответ:

$(-\infty; -1) \cup (1; 7,5) \cup (7,5; +\infty)$