**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра уравнений математической физики

**Мотевич Антон Викторович**

# ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ

**Кандидатская диссертация**

Руководитель:
профессор кафедры уравнений математической физики,
доктор физ.-мат. наук
ЛОМОВЦЕВ Федор Егорович

**Минск, 2010**

Вы
ход

# СОДЕРЖАНИЕ

# АКТУАЛЬНОСТЬ

Математической моделью многих физических процессов являются гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка . Вопрос устойчивости этих процессов сводится к исследование о корректной разрешимости соответствующего уравнения при заданных начальных и граничных условиях.

# ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ:

- ✔ Обобщение известного метода сглаживающих операторов для исследования дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения на двумерные гиперболические дифференциально-операторные уравнения

- ✔ Доказательство существования, единственности и устойчивости сильных решений задачи Гурса для дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторов

# ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ:

Двумерные гиперболические дифференциально-операторные уравнения с переменными областями определения

# ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ:

Корректность задачи Гурса для двумерных гиперболических дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения операторных коэффициентов

Вы
ход

# НУЧНАЯ ГИПОТЕЗА:

Пусть *H* - гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. На ограниченном прямоугольнике $]0,T_1[\times]0,T_2[\subset R^2$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_2 dt_1} + A_1(t)\frac{\partial u(t)}{\partial t_1} + A_2(t)\frac{\partial u(t)}{\partial t_2} + A(t)u(t) = f(t),$$

$$u(t_1,0)=\varphi_1(t_1), \quad u(0,t_2)=\varphi_2(t_2), \quad \varphi_1(0)=\varphi_2(0),$$

где $f(t)$ и $u(t)$ функции переменной *t* со значениями в *H*, $A(t)$ и $A_i(t)$ – линейные самосопряженные неограниченные операторы в *H* с зависящими от *t* соответственно областями определения $D(A(t))$ и

$$D(A_i(t)), \quad i=1,2, \quad t=\{t_1,t_2\}.$$

Вы
ход

Предполагаем, что операторы $A(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$ удовлетворяют условиям 1- 6.

1. При каждом t для операторов $A(t)$ выполняется оценка
$$\left(A(t)u,u\right)\geq c_1|u|^2, \quad \forall u\in D\left(A(\underline{t})\right) \quad c_1>0$$
2. Обратные операторы $A^{-1}(t) \in B\left(\overline{T}, L(H)\right)$ операторов $A(t)$ сильно непрерывны по $t$ в $H$ и при всех t имеют в $H$ сильную частную производную, которая удовлетворяет неравенству
$$\left|\left((\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)g,g\right)\right|\leq c_2\left(A^{-1}(t)g,g\right) \quad \forall g\in H, \quad c_2\geq 0,\ i=1,2.$$
3. При всех $t$ операторы $A_i(t)$ подчинены квадратному корню $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$ и имеет место оценка
$$-\mathrm{Re}\left(A_1(t)v_1+A_2(t)v_2, v_1+v_2\right)\leq c_3\left(|v_1|^2+|v_2|^2\right), c_3>0.$$

Вы
ход

4. При всех t для операторов $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i$, $i = 1, 2,$ выполняются неравенства

$$\left|\left((\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)g, h\right)\right| \le c_4\left(A^{-1}(t)h, h\right)|g| \quad \forall g, h \in H, \quad c_4 \ge 0,\ i = 1, 2.$$

5. Существует постоянная $c_5 > 0$ такая, что

$$-\mathrm{Re}\left(A_1(t)v_1 + A_2(t)v_2, A(t)\left(v_1 + v_2\right)\right) \le c_5\left(\left|A^{1/2}(t)v_1\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)v_2\right|^2\right), \quad c_5 > 0.$$

6. При почти всех t существует ограниченная сильная смешанная производная, удовлетворяющая неравенству

$$\left|\left((\partial^2 A^{-1}(t)/\partial t_1 \partial t_2)g, h\right)\right| \le c_6\left(A^{-1}(t)h, h\right)|g| \quad \forall g, h \in H, \quad c_6 \ge 0.$$

# НАУЧНАЯ НОВИЗНА:

- ✔Усовершенствованы технические приемы исследования дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения
- ✔Получены новые и имеющие большое научное значение результаты в теории дифференциально-операторных уравнений

# ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ:

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

***Теорема 1.*** *Если выполняются условия 1 -3 и множество* $D(L)$ *плотно в* $\mathbf{H}$ *,*

*то имеет место следующее неравенство*

$$\|u\|_E \le c_7 \|\overline{L}u\|_F \quad \forall u \in D(\overline{L}), \quad c_7 = Exp\left(\left(T_1 + T_2\right)\max\left\{c_2, 2c_3\right\}\right).$$

# ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

**Теорема 2.** *Если выполняются условия предыдущей теоремы и предположения 4 - 6, то для каждого* $f \in F$ *сильное решение* $u \in E$ *поставленной задачи Гурса существует, единственно и*

$$\|u\|_E \le c_7 \|f\|_F \, .$$

Вы
ход

В области $G = \left]0,l\right[ \times \left]0,T_1\right[ \times \left]0,T_2\right[$ переменных $x$ и $t$ рассматривается гиперболическое уравнение в частных производных

$$u_{t_1t_2} + a_1(x,t)u_{xt_1} + a_2(x,t)u_{xt_2} = f(x,t)$$

с переменными по времени граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \beta(t)u(l,t), \quad t \in \overline{T},$$

и однородными начальными условиями

$$u(x,0,t_2) = \varphi_1(t_1), \quad u(x,t_1,0) = \varphi_2(t_2), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0), x \in [0,l].$$

Вы ход

Здесь коэффициенты уравнения $a(x) \geq a_0 > 0$, $\forall x \in [0,l]$,

$b_1(0) = 0, \quad b_1(l) \geq 0, \qquad a(x),\ b_1(x) \in C^{(1)}\left[0,l\right], \quad b_2(x) \in C^{(2)}\left[0,l\right],$

$b_3(x,t), a_i(x,t) \in C\left(\overline{G}\right), i = 1,2$, и граничных условий

$\beta(t) \in C^{(2)}\left[0,l\right].$

Вы
ход

**Теорема 3.** ***Если коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют указанным выше требованиям, то для любой функции*** $f \in L_2\left(G\right)$ ***поставленная начально-краевая задача имеет единственное сильное решение*** $u \in E\left(G\right)$***, для которого справедлива оценка***

$$\int_G \left|u_t(x,t)\right|^2 dxdt + \int_T \left\|A^{1/2}(t)u\right\| dt \le c_8 \int_G \left|f(x,t)\right|^2 dxdt, \; c_8 > 0.$$

Вы
ход

# ПОЛОЖЕНИЯ ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ:

- ✔Доказательство теорем существования, единственности и устойчивости сильных решений задачи Гурса для двумерных дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторов

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Вы
ход