МЫ ХОДИМ ПО ПЛОЩАДЯМ: КАК ИХ ИЗМЕРИТЬ?

Авторы: учащиеся 9 класса.

ЦЕЛИ РАБОТЫ:

- уточнить понятие площади,
- выяснить историю вопроса,
- выстроить теорию «площади фигур» на основе площади треугольника,
- создать алгоритм вычисления площади многоугольника,
- как поступить с кругом?

УТОЧНЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПЛОЩАДИ

<u>Опр. 1.</u> Фигура называется простой, если она разбивается на конечное число плоских треугольников.

<u>Опр. 2.</u> Площадью простой фигуры называется неотрицательная величина, обладающая следующими свойствами:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow S_1 = S_2$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n \Rightarrow S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

$$S_{квадрата(a=1ед.дл.)} = 1\_единице\_площади.$$

Единицы площади:

- *Основные: 1 кв. см., 1 кв. м.;*
- *Производные: 1 кв. мм., 1 кв. дм, 1ар, 1га, …*

1ед.

1 кв. ед.

ИСТОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ

Понятия площадей прямолинейных фигур (треугольника, прямоугольника, параллелограмма и трапеции) являются самыми древними в истории развития геометрии. Еще в XVII в. до н. э. египтяне совершено правильно умели вычислять площадь прямоугольника: длину умножали на ширину. Для вычисления же площади треугольника (равнобедренного) они пользовались приближенной формулой: для этого они брали половину произведения основания треугольника на его высоту. Площадь трапеции египтяне также вычисляли приближенно: при вычислении площади равнобокой трапеции они брали произведение полусуммы ее оснований на боковую сторону.

Например, на папирусе Райнда приводится такая задача «Если тебе дан участок в поле с боковой стороной в 20 хет, с основаниями в 6 и 4 хет, то какова его площадь?» и ее решение:

$$\frac{1}{2}\cdot(4+6)\cdot 20=100.$$

Основоположники геометрии.

АРХИМЕД

ок. 287-212 до н. э.

- древнегреческий математик и механик

Математические труды.

При доказательстве теорем о площадях фигур, ограниченных кривыми линиями, Архимед постоянно использует метод, известный как «метод исчерпывания». Доказательство с помощью метода исчерпывания, в сущности, представляет собой косвенное доказательство от противного. Иначе говоря, если теорема записана в форме отношения «А равно В», она считается истинной в том случае, когда принятие противоположного отношения «А не равно В» ведет к противоречию. Основная идея метода исчерпывания заключается в том, что в фигуру, площадь которой требуется найти, вписывают правильные фигуры. Площадь вписанных фигур увеличивают до тех пор, пока разность между площадью, которую требуется найти, и площадью вписанной фигуры не становится меньше заданной величины. Пользуясь различными вариантами метода исчерпывания, Архимед смог доказать различные теоремы, эквивалентные в современной записи соотношениям S = pr2 для площади круга, S = 4pr2 для поверхности шара и V = 4/3pr3 для его объема, теореме о том, что площадь сегмента параболы равна 4/3 площади треугольника, имеющего те же основание и высоту, что и сегмент, а также многие другие интересные теоремы.

Основоположники геометрии.

ЕВКЛИД

конец IV-III в. до н. э.

- древнегреческий математик

Автор труда «Начала» в 13 книгах, в котором изложены основы геометрии, теории чисел, метод определе-ния площадей и объёмов, включающий элементы теории пределов; оказал огромное влияние на развитие математики.

Основоположники геометрии.

ГЕРОН

АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\dfrac{a+b-c}{2}$

и a, b, c - стороны треугольника

около I века

- древнегреческий математик и механик

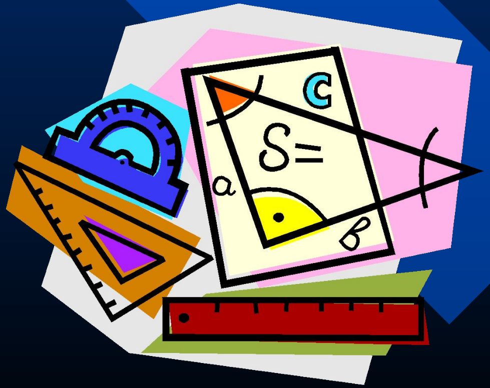
Дал систематическое изложение основных достижений античности в математике и механике. Нашел формулы для определения площади геометрических фигур.

ГЕРОНА ФОРМУЛА - выражает площадь ***S*** треугольника через длины трех его сторон ***a***, ***b*** и ***c*** и полупериметр ***p***.

Точные даты рождения и смерти этого древнегреческого ученого и изобретателя из города Александрии неизвестны, поскольку арабские списки его трудов были переведены на современные языки только через 2000 лет после его смерти.

ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ «ПЛОЩАДИ ФИГУР» НА ОСНОВЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

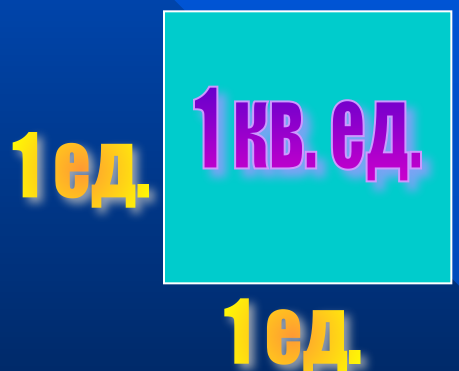
- Поскольку фигура называется простой, если она разбивается на конечное число плоских треугольников, то и формула площади любой простой фигуры может быть получена на основе площади треугольника. Сделаем это.



ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ «ПЛОЩАДИ ФИГУР» НА ОСНОВЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

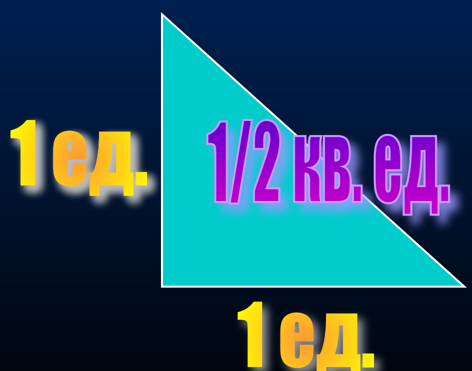
1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Так как площадь квадрата со стороной в 1 ед. равна S=1*1 кв. ед. (св-во 3),



S=1*1 кв. ед.

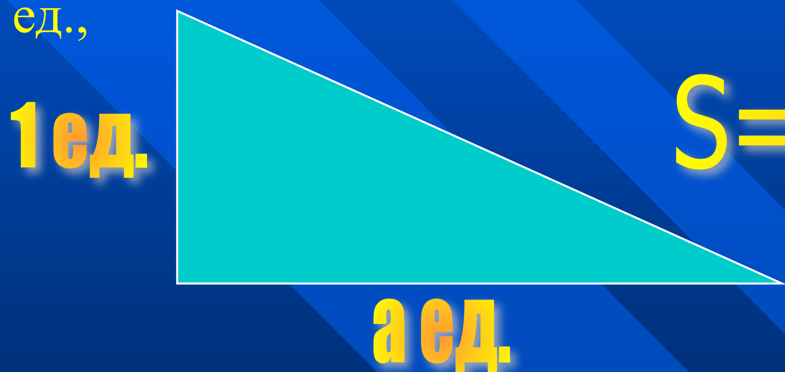
то площадь прямоугольного треугольника с катетами 1 и 1 ед. будет равна S= ½*1*1 кв. ед. (св-во 2).



S=1/2*1*1 кв. ед.

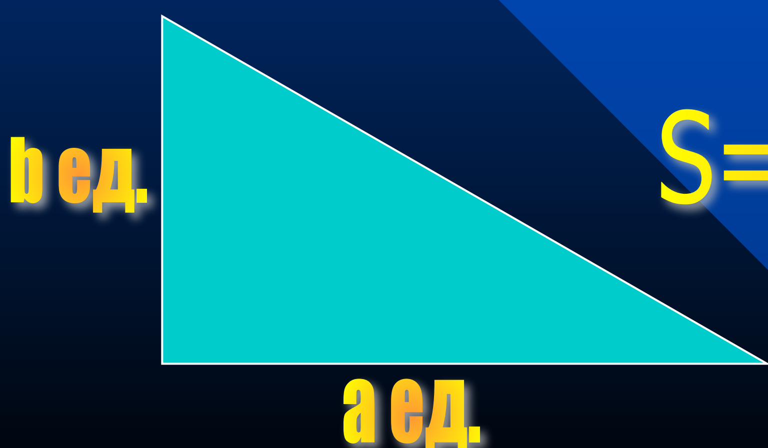
ВЫВОД ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Нетрудно доказать, что с увеличением одного из катетов в *а* раз площадь треугольника так же увеличится в *а* раз, т. е. станет равной S=1/2**а**1 кв. ед.,



S=1/2*a*1 кв. ед.

Тогда с увеличением другого катета полученного треугольника в *b* раз его площадь увеличится еще и в *b* раз и станет равной S=1/2**a***b* кв. ед.



S=1/2*a*b кв. ед.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Тогда площадь произвольного треугольника будет равна сумме площадей двух прямоугольных треугольников, на которые он разбивается высотой, опущенной на основание, т. е.

S = S1 + S2 =

= 1/2*a1*h + 1/2*a2*h =

= 1/2*(a1 + a2)*h = 1/2*a*h.

Таким образом, площадь любого треугольника вычисляется по формуле

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$$

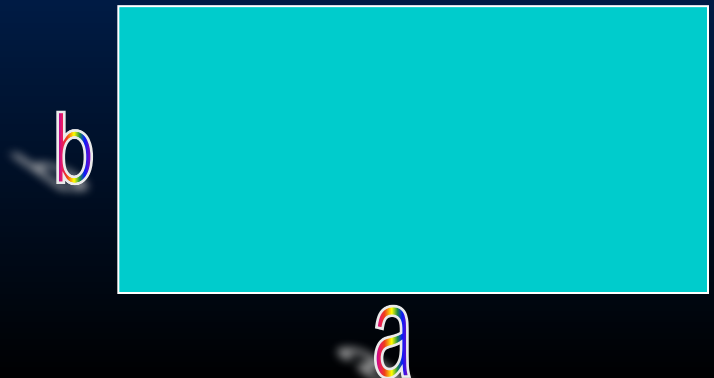
ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ «ПЛОЩАДИ ФИГУР» НА ОСНОВЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

2. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА равна сумме площадей двух равных треугольников, на которые он разбивается его диагональю, т. е.

$$S = 2*S1 = 2*\ 1/2ah = ah.$$

Таким образом, $S_{пар} = ah.$

И ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, как частный случай параллелограмма, вычисляется по формуле:



$S_{пр} = ab.$

ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ «ПЛОЩАДИ ФИГУР» НА ОСНОВЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

3. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ равна сумме площадей треугольников с основаниями *a* и *b* и общей высотой *h*, на которые она разбивается одной из ее диагоналей:

$$S = 1/2*ah + 1/2*bh =$$

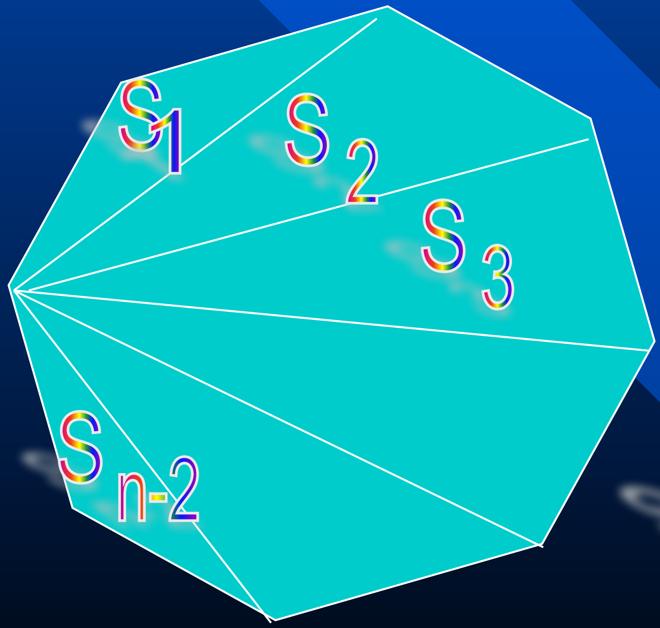
$$= 1/2*(a + b)h.$$

Таким образом, площадь трапеции вычисляется по формуле:

$$S_{трап} = \frac{a+b}{2}h.$$

ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ «ПЛОЩАДИ ФИГУР» НА ОСНОВЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

4. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА (выпуклого) равна сумме площадей треугольников, на которые он разбивается диагоналями, проведенными из какой-либо его вершины:



$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2}.$$

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКА

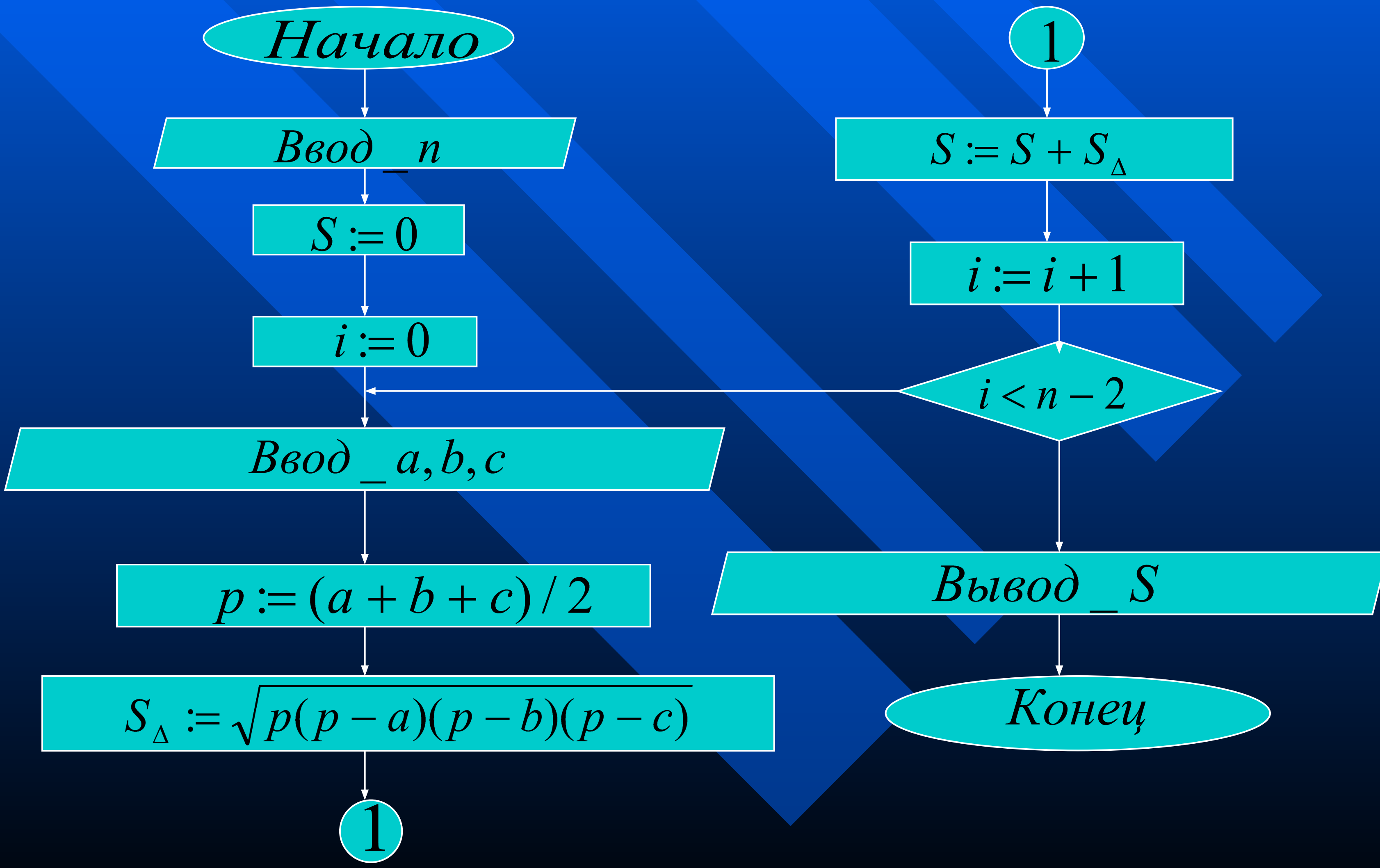


ТАБЛИЦА ФОРМУЛ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

- Треугольник

$$S = \frac{1}{2}ah$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где *a, b, c – стороны треугольника, p – полупериметр, r и R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей, γ – угол между сторонами a и b.*

ТАБЛИЦА ФОРМУЛ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

- Параллелограмм

$$S = ah$$

$$S = ab\sin\gamma$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$$

- Ромб

$$S = ah$$

$$S = a^2\sin\gamma$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

Формулы площади ромба видоизменяются по сравнению с формулами площади параллелограмма в связи с тем, что стороны ромба равны и диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

ТАБЛИЦА ФОРМУЛ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

- Трапеция

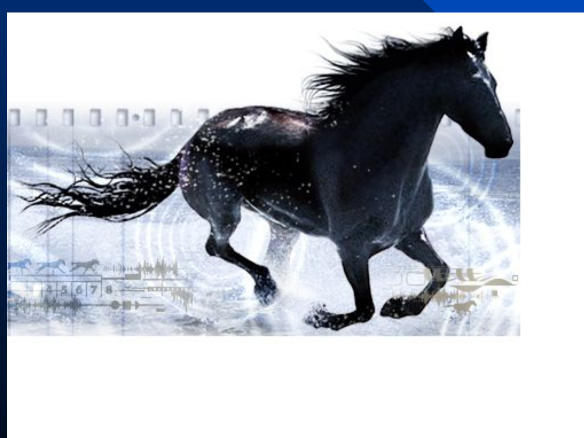
$$S = \frac{a+b}{2}h \qquad S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$$

- Произвольный четырехугольник

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$$

где d – диагональ трапеции (четырехугольника).

А КАК ПОСТУПИТЬ С КРУГОМ?



Круг не является простой фигурой, поэтому формула его площади имеет иррациональное число π:

$$S = \pi R^2$$

и его части: круговой сектор

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

и круговой сегмент

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} - S_\Delta$$

СЛЕДУЕТ ОТДАТЬ ДОЛЖНОЕ ДРЕВНЕГРЕЧЕСКИМ МАТЕМАТИКАМ!

МЫ ХОДИМ ПО ПЛОЩАДЯМ

И УМЕЕМ ИХ ВЫЧИСЛЯТЬ!

- 1-я гр. *Понятие площади (Макаров А.).*
- 2-я гр. *Формулы площади треугольника (Маслова О., Борисов А.).*
- 3-я гр. *Формулы площад… четы… гольника (Прыгунов В., Мякотина Л., Ливади…).*
- 4-я гр. *Вычисление пло… и про… вольного многоугольника (Поладов М., Киря…).*
- 5-я гр. *Формулы пл… тей (Иванисова А., Избирян М.).*

6-я гр. *Основопо… дей (Литвинов В., Кременева А., Ш…*

ИСТОЧНИКИ:

- материалы Internet,
- В.Д.Чистяков «Исторические экскурсы на уроках математики в средней школе»,
- Учебник по геометрии,
- А.И.Азевич «Задачи по геометрии. 7-9 классы. Дидактические материалы и контрольные работы.»