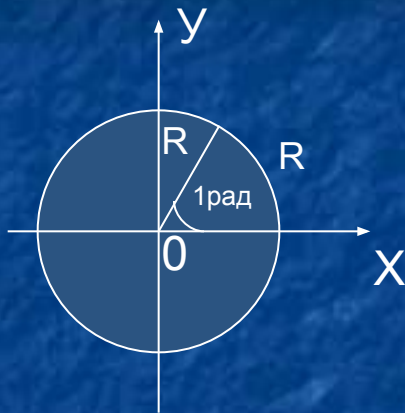


# Справочник по тригонометрии

1. Радианное измерение углов
2. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла
3. Основные формулы тригонометрии:
  - а) основные тригонометрические тождества;
  - б) формулы двойного и половинного аргумента;
  - в) формулы суммы и разности;
  - г) формулы сложения;
  - д) формулы приведения

# Радианное измерение углов



$$\alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180} \alpha_{\text{рад}}$$

$$\alpha_{\text{рад}} = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha^{\circ}$$

№1 Выразите в радианной мере

а)  $30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}$

б)  $90^{\circ}, 120^{\circ}, 135^{\circ}$

№2 Выразите в градусной мере

а)  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

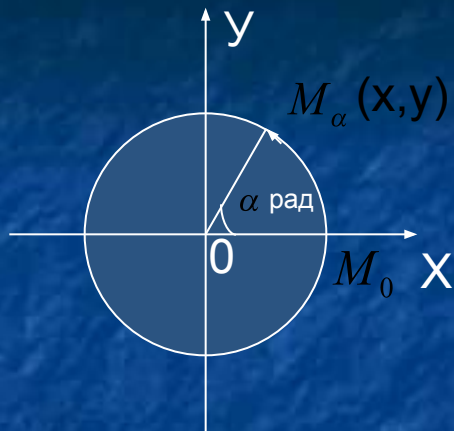
б)  $-\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, -3\pi$

№3 Радианная мера 2-х углов треугольника равна

$$\frac{\pi}{3} \text{ и } \frac{\pi}{6}$$

Найдите градусную меру каждого из углов

# Синус, косинус, тангенс произвольного угла

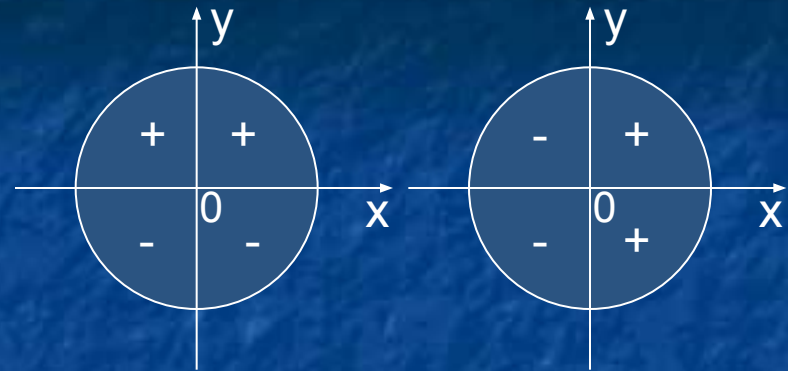


Ордината точки  $M_\alpha$  называется синусом числа  $\alpha$

Косинусом числа  $\alpha$  называется абсцисса точки  $M_\alpha$

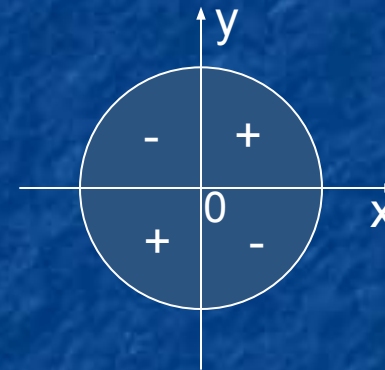
Отношение ординаты к абсциссе называется тангенсом числа  $\alpha$

Котангенсом числа  $\alpha$  называется отношение абсциссы к ординате



Знаки синуса

Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса



# Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Упростите выражения

a)  $1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

b)  $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha$

c)  $\cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha$

d)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$

f)  $(\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \sin^2 \alpha$

# Формулы двойного и половинного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Упростите выражения:

$$a) 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ$$

$$b) \sin^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ$$

$$c) \frac{2\operatorname{tg} 35^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 35^\circ}$$

Преобразуйте выражения:

$$a) \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$b) \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$c) \frac{1 - \cos\frac{\alpha}{2}}{1 + \cos\frac{\alpha}{2}}$$

# Формулы суммы и разности

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\alpha+\sin\beta$$

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\alpha-\sin\beta$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\alpha+\cos\beta$$

$$-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\alpha-\cos\beta$$

Преобразуйте сумму и разность в произведение

a)  $\sin 40^\circ - \sin 30^\circ$

b)  $\cos 28^\circ - \cos 10^\circ$

c)  $\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8}$

d)  $\sin\frac{\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}$



# Формулы сложения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Упростите выражения:

a)  $\cos \alpha \cos 3\alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$

b)  $\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$

c)  $\frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} 3\gamma}{1 - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} 3\gamma}$

Нынче ночью, как, ни странно  
Чей-то голос из чулана  
Сообщил про задачи,  
Подсказав, что при удаче  
Ключ к их верному решению  
Мы найдем из формул приведенья



# Формулы приведения

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$2\pi + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi/2 + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\pi/2 - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$3\pi/2 + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$3\pi/2 - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

## Вариант № 1

	1	2	3	4	5	6
а					$-1\frac{4}{5}$	$30^0$
б						
в						

## Вариант № 2

	1	2	3	4	5	6
а					$-5$	$30^0$
б						
в						

1. Докажите тождество  $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$

Решение:

$$\begin{aligned} & \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \\ & = 2 + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = \\ & = 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = \\ & = 2 + 2 \cos(\alpha - \beta) = 2(1 + \cos(\alpha - \beta)) = \\ & = 2 \cdot 2 \frac{1 + \cos(\alpha - \beta)}{2} = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

---

1. Докажите тождество  $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$

Решение:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{\sin 3\alpha} - \frac{1}{\sin \alpha}}{\cos 3\alpha - \cos \alpha} - \frac{\frac{1}{\cos 3\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha \cos \alpha - \cos 3\alpha \sin \alpha} - \\ & - \frac{1}{\cos 3\alpha \sin \alpha - \sin 3\alpha \cos \alpha} = \frac{\cos 3\alpha \cos \alpha}{\sin(3\alpha - \alpha)} + \frac{\sin 3\alpha \sin \alpha}{\sin(3\alpha - \alpha)} = \\ & = \frac{\cos 3\alpha \cos \alpha + \sin 3\alpha \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos(3\alpha - \alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha \end{aligned}$$