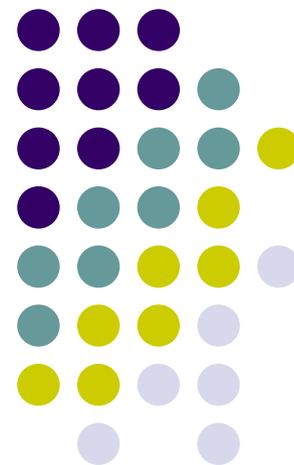
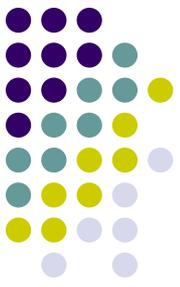


Тема урока:

Определение арифметической прогрессии. Формула N-го члена арифметической прогрессии

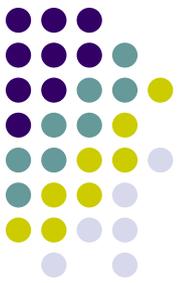




Устная работа:

1. Последовательность u_n задана формулой n -го члена $u_n = 5n + 1$. Найти u_1 , u_4 , u_{20} , u_{100} .
2. Найти второй, пятый члены последовательности (a_n) , заданной формулой: а) $a_n = 2n - 1$; б) $a_n = \underline{n - 2}$
2
в) $a_n = n^2 - 3$;
3. Последовательность задана формулой: $a_n = 15 - 3n$. Найти номер члена последовательности, равного 6; 0; -3; -9.
4. Найти среднее арифметическое чисел 2 и 10; 3 и -5; 2, 3 и 7.

Прогрессии.



Термин «прогрессия» имеет латинское происхождение (progression, что означает «движение вперед») и был введен римским автором Боэцием (VI в.). Этим термином в математике прежде именовали всякую последовательность чисел, построенную по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении. В настоящее время термин «прогрессия» в первоначально широком смысле не употребляется. Два важных частных вида прогрессий – арифметическая и геометрическая – сохранили свои названия.

Выпишем последовательность, соответствующую условию задачи:



Джентльмен получил наследство. В первый месяц он истратил 100 долларов, а каждый следующий месяц он тратил на 50 долларов больше, чем в предыдущий. Сколько долларов он истратил за второй? За третий? За восьмой? За десятый?

последовательность:

100; 150; 200; 450; 550

Как получается второй член последовательности? третий? четвертый? и т. д.



Мастерская изготовила в январе 106 изделий, а каждый следующий месяц изготовляла на 12 изделий больше, чем в предыдущий. Сколько изделий изготовила мастерская в феврале? В марте? В августе? В декабре?

последовательности:

106; 118; 130; 190; 238

Как получается второй член последовательности? третий? четвертый? и т. д.



Тело в первую секунду движения прошло 27 м, а за каждую следующую секунду – на 3 м меньше, чем за предыдущую. Какое расстояние прошло за вторую, третью, восьмую, десятую секунду?

последовательности:

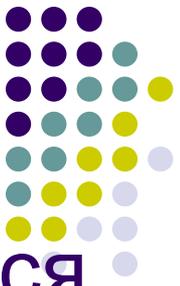
27; 24; 21; 3; -3

Как получается второй член последовательности? третий? четвертый? и т.д.



**Выписанные
последовательности
называются арифметическими
прогрессиями.**

Определение:



Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

То есть, последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие $a_{n+1} = a_n + d$, где d – некоторое число.

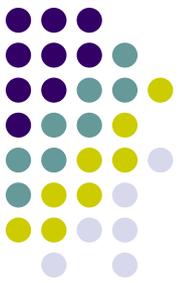


Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым ее членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна d , т.е. при любом натуральном n верно равенство

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

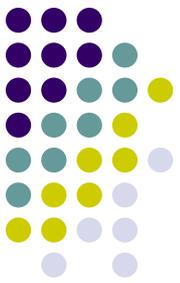
Число d называют разностью арифметической прогрессии.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и разность.

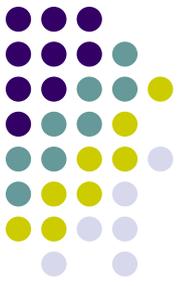


Примеры:

1. Если $a_1 = 1$ и $d = 1$, то получим арифметическую прогрессию: 1; 2; 3; 4; 5; ...
2. Если $a_1 = 1$ и $d = 2$, то получим арифметическую прогрессию: 1; 3; 5; 7; 9; ...
3. Если $a_1 = -2$ и $d = -2$, то получим арифметическую прогрессию: -2; -4; -6; -8; -10; ...
4. Если $a_1 = 7$ и $d = 0$, то получим арифметическую прогрессию: 7; 7; 7; 7; 7; ...



Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой ее член, вычисляя последовательно второй, третий, четвертый и т.д. члены. Но для нахождения члена прогрессии с большим номером такой способ неудобен.



По определению арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d,$$

$$a_6 = a_1 + 5d,$$

Чтобы найти a_n нужно к a_1 прибавить $d(n - 1)$, т.е.

$$a_n = a_1 + d(n - 1) -$$

формула **n** -го члена арифметической прогрессии

Примеры:



Пример 1. Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия, в которой $c_1 = 0,62$ и $d = 0,24$. Найдем пятидесятый член этой прогрессии.

► Имеем

$$c_{50} = 0,62 + 0,24 \cdot (50 - 1) = 12,38. \triangleleft$$

Пример 2. Выясним, является ли число -122 членом арифметической прогрессии (x_n) :

$$23; 17,2; 11,4; 5,6; \dots$$

► В данной арифметической прогрессии $x_1 = 23$ и $d = x_2 - x_1 = 17,2 - 23 = -5,8$. Запишем формулу n -го члена прогрессии:

$$x_n = 23 - 5,8(n - 1), \text{ т. е.}$$

$$x_n = 28,8 - 5,8n.$$

Число -122 является членом арифметической прогрессии (x_n) , если существует такое натуральное число n , при котором значение выражения $28,8 - 5,8n$ равно -122 .

Решим уравнение $28,8 - 5,8n = -122$:

$$5,8n = 150,8, \quad n = 26.$$

Значит, число -122 является 26-м членом данной арифметической прогрессии. \triangleleft

Отметим важное свойство арифметической прогрессии



Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов

- Действительно, если последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, то

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n, \quad \text{т. е.}$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \quad \circ$$



формулу n -го члена арифметической прогрессии

$a_n = a_1 + d(n - 1)$, можно записать иначе:

$a_n = dn + (a_1 - d)$, отсюда следует, что любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида

$$a_n = kn + b,$$

где k и b некоторые числа.