

Презентация

Подготовила ученица 9 «Б» класса
Кискина Алёна

Уравнения первой степени



- Довольно часто возникают задачи, сводящиеся к алгебраическим уравнениям с целыми коэффициентами, для которых имеют смысл только целочисленные решения.
- Например, в магазине продают тетради по **3 р.** и **5 р.** каждая; мальчик затратил на покупку тетрадей **22 р.** Сколько и каких тетрадей он купил? Пусть мальчик купил **x** тетрадей по **3 р.** и **y** – по **5 р.**; задача сводится к решению уравнения

$$3x+5y=22.$$

- Очевидно, $x=4$, $y=2$. Простым перебором убеждаемся, что это единственное решение задачи. Легко найти бесконечную последовательность целочисленных решений **$(4+5s; 2-3s)$** данного уравнения (но не задачи), заставив **s** пробегать множество целых чисел. Правда, пока неизвестно, все ли целочисленные решения получаются таким способом.
- Поскольку решение линейного уравнения с одним неизвестным не представляет интереса, остановимся на уравнении с двумя неизвестными
- $$ax + by = c \qquad (1)$$
- Существует несколько способов решения уравнения.



Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, решаемые во множестве целых (реже рациональных) чисел, называются *диофантовыми* по имени древнегреческого математика Диофанта (III в. н. э.), Посвятившего решению задач в целых и рациональных числах свой знаменитый трактат «Арифметика». Точнее, шесть дошедших до нас книг; содержание остальных семи книг этого трактата нам не известно. Часто рассматриваются **неопределённые уравнения** или их системы, т.е. такие, в которых количество переменных больше числа уравнений. Наиболее изучены диофантовы уравнения 1 и 2 степени. Начнем с уравнения первой степени.





- Поскольку решение линейного уравнения с одним неизвестным не представляет интереса, остановимся на уравнении с двумя неизвестными
- $ax + by = c \quad (1)$
- Существует несколько способов решения уравнения.



Способ 1.



Он основывается на применении к числам a и b алгоритма Евклида. Слово «алгоритм» образованно от имени узбекского математика ал-Хорезми (IX в.), познакомившего арабов с индийской десятичной системой счисления. Первоначально *алгоритмом* (*алгорифмом*) называлась сама система счисления, а сейчас – последовательность операций, приводящая к решению поставленной задачи.



- **Алгоритм Евклида для целых чисел**

- Пусть a и b суть целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел

- определена тем, что каждое r_k это остаток от деления пред-предыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, т. е.

- $a = bq_0 + r_1$

- $b = r_1q_1 + r_2$

- $r_1 = r_2q_2 + r_3$

-

- $r_{n-1} = r_nq_n$

- Тогда (a, b) , наибольший общий делитель a и b , равен r_n , последнему ненулевому члену этой последовательности.

- **Существование** таких r_1, r_2, \dots , то есть возможность деления с остатком m на n для любого целого m и целого n , доказывается индукцией по m .

- **Корректность** этого алгоритма вытекает из следующих двух утверждений:

- Пусть $a = bq + r$, тогда $(a, b) = (b, r)$.

- $(0, r) = r$ для любого ненулевого r .

- **Расширенный алгоритм Евклида и соотношение Безу**

- Формулы для r_i могут быть переписаны следующим образом:

- $r_1 = a + b(-q_0)$

- $r_2 = b - r_1q_1 = a(-q_1) + b(1 + q_1q_0)$

-

- $(a, b) = r_n = as + bt$

- здесь s и t целые. Это представление наибольшего общего делителя называется **соотношением Безу**, а числа s и t — **коэффициентами Безу**. Соотношение Безу является ключевым в доказательстве основной теоремы арифметики.

Упражнение.

- **Упражнение.** Докажите, что $gn = \text{НОД}(a, b)$.
- Таким образом, если $d = \text{НОД}(a, b)$, то найдутся такие целые числа A и B разных знаков, что $Aa + Bb = d$. Если a и d взаимно простые, то $Aa + Bb = 1$. Как числа A и B , видно из алгоритма Евклида.
- Применим полученный результат к решению уравнения (1). Возможны два случая: либо число c не делится на $d = \text{НОД}(a, b)$, либо делится. В первом случае уравнение не имеет целочисленных решений: при любых x и y левая часть делится на d , правая – нет. Во втором - можно разделить обе части уравнения на d и прийти к уравнению, коэффициенты которого взаимно просты. Поэтому будем сразу считать числа a и b взаимно простыми. Тогда, как мы только что видели, найдутся такие целые числа A и B , что $aA + bB = 1$
- Обозначим $x_0 = Ac$, $y_0 = Bc$, пара (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению (1). Вместе с ней этому уравнению удовлетворяет бесконечное множество пар (x, y) , где
- $$x = x_0 + b_0t, \quad y = y_0 - at,$$
- t - любое число.

КОНЦЕД