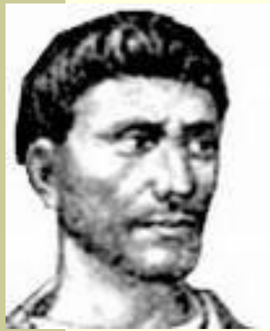
Презентация

Подготовила ученица 9 «Б» класса
Кискина Алёна

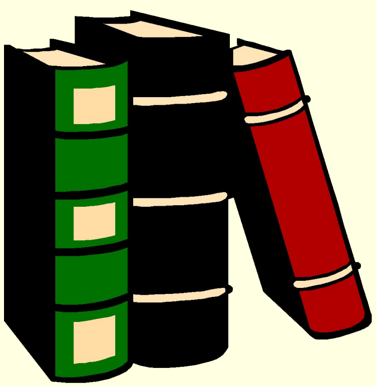
Уравнения первой степени

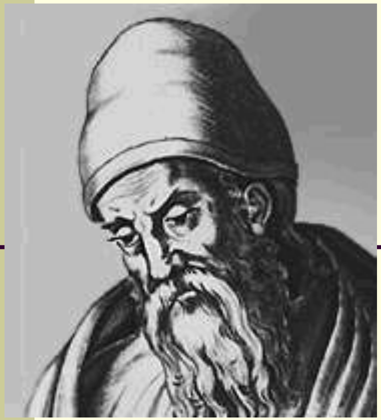
- Довольно часто возникают задачи, сводящиеся к алгебраическим уравнениям с целыми коэффициентами, для которых имеют смысл только целочисленные решения.
- Например, в магазине продают тетради по **3 р.** и **5 р.** каждая; мальчик затратил на покупку тетрадей **22 р.** Сколько и каких тетрадей он купил? Пусть мальчик купил **x** тетрадей по **3 р.** и **y –** по **5 р.**; задача сводится к решению уравнения
- $$3x+5y=22.$$
- Очевидно, $x=4$, $y=2$. Простым перебором убеждаемся, что это единственное решение задачи. Легко найти бесконечную последовательность целочисленных решений **(4+5s; 2-3s)** данного уравнения (но не задачи), заставив **s** пробегать множество целых чисел. Правда, пока неизвестно, все ли целочисленные решения получаются таким способом.
- Поскольку решение линейного уравнения с одним неизвестным не представляет интереса, остановимся на уравнении с двумя неизвестными
- $$ax + by = c \qquad (1)$$
- Существует несколько способов решения уравнения.



Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, решаемые во множестве целых (реже рациональных) чисел, называются *диофантовыми* по имени древнегреческого математика Диофанта (III в. н. э.), Посвятившего решению задач в целых и рациональных числах свой знаменитый трактат «Арифметика». Точнее, шесть дошедших до нас книг; содержание остальных семи книг этого трактата нам не известно. Часто рассматриваются **неопределённые уравнения** или их системы, т.е. такие, в которых количество переменных больше числа уравнений. Наиболее изучены диофатовы уравнения 1 и 2 степени. Начнем с уравнения первой степени.

- Поскольку решение линейного уравнения с одним неизвестным не представляет интереса, остановимся на уравнении с двумя неизвестными
- **$ax + by = c$ (1)**
- Существует несколько способов решения уравнения.





Способ 1.

Он основывается на применении к числам *a* и *b* алгоритма Евклида. Слово «алгоритм» образованно от имени узбекского математика ал-Хорезми (IX в.), познакомившего арабов с индийской десятичной системой счисления. Первоначально *алгоритмом (алгорифмом)* называлась сама система счисления, а сейчас – последовательность операций, приводящая к решению поставленной задачи.

- **Алгоритм Евклида для целых чисел**
- Пусть a и b суть целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел
  -
- определена тем, что каждое rk это остаток от деления пред-предыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, т. е.
  - $a = bq0 + r1$
  - $b = r1q1 + r2$
  - $r1 = r2q2 + r3$
  -
  - $rn - 1 = rnqn$
- Тогда (a,b), наибольший общий делитель a и b, равен rn, последнему ненулевому члену этой последовательности.
- **Существование** таких $r1,r2,...$, то есть возможность деления с остатком m на n для любого целого m и целого , доказывается индукцией по m.
- **Корректность** этого алгоритма вытекает из следующих двух утверждений:
- Пусть $a = bq + r$, тогда $(a,b) = (b,r)$.
- $(0,r) = r$. для любого ненулевого r.
- **Расширенный алгоритм Евклида и соотношение Безу**
- Формулы для ri могут быть переписаны следующим образом:
  - $r1 = a + b(- q0)$
  - $r2 = b - r1q1 = a(- q1) + b(1 + q1q0)$
  -
  - $(a,b) = rn = as + bt$
- здесь s и t целые. Это представление наибольшего общего делителя называется **соотношением Безу**, а числа s и t — **коэффициентами Безу**. Соотношение Безу является ключевым в доказательстве основной теоремы арифметики.

Упражнение.

- **Упражнение.** Докажите, что rn = НОД (a,b).
- Таким образом, если d = НОД(a,b), то найдутся такие целые числа A и B разных знаков, что $Aa + Bb = d$. Если a и d взаимно простые, то $Aa + Bb = 1$. Как числа A и B, видно из алгоритма Евклида.
- Применим полученный результат к решению уравнения (1). Возможны два случая: либо число c не делится на d = НОД (a,b), либо делится. В первом случае уравнение не имеет целочисленных решений: при любых x и y левая часть делится на d, правая – нет. Во втором - можно разделить обе части уравнения на d и прийти к уравнению, коэффициенты которого взаимно просты. Поэтому будем сразу считать числа a и b взаимно простыми. Тогда, как мы только что видели, найдутся такие целые числа A и B, что $aA+bB=1$
- Обозначим $x_0= Ac$, $y_0=Bc$, пара (x_0,y_0) удовлетворяет уравнению (1). Вместе с ней этому уравнению удовлетворяет бесконечное множество пар (x,y), где
- $$x=x_0+b_0,\ y=y_0-at,$$
- t- любое число.

КОНЕЦ