



# *Решение треугольников*

*Геометрия*

*9 класс*

*по учебнику А.В. Погорелова*



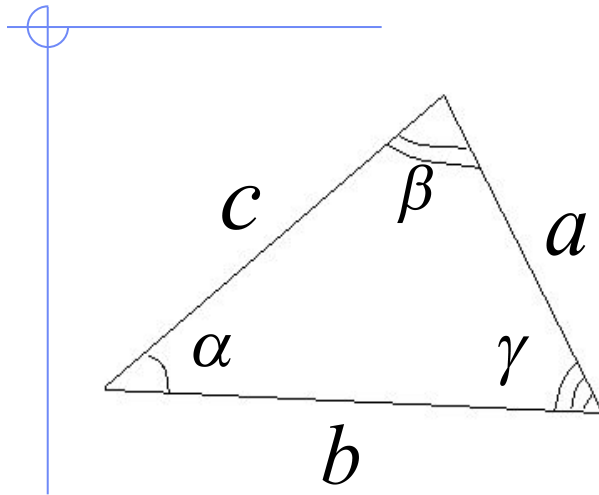


**Решение треугольников  
состоит в нахождении  
неизвестных сторон и  
углов по известным его  
сторонам и углам.**



# Условные обозначения

и основные теоретические сведения



$a, b, c$  – стороны  
треугольника  
 $\alpha, \beta, \gamma$  –  
противолежащие им  
углы

**Теорема косинусов**: Квадрат любой стороны  
треугольника равен сумме квадратов  
двух других сторон без удвоенного  
произведения этих сторон на косинус  
угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

**Теорема синусов:** Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

**Теорема о сумме углов**  
**треугольника:**

Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

\* для любого острого угла выполняются равенства  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ;  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ;

\*\* для любого угла выполняются равенства  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ;  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

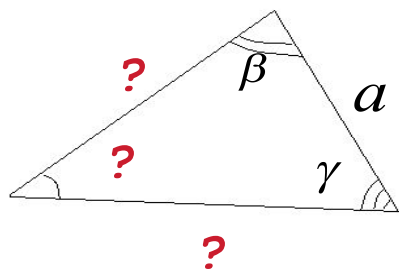
# Типы задач

1. Решение треугольников по стороне и двум углам.
2. Решение треугольников по двум сторонам и углу между ними.
3. Решение треугольников по трём сторонам.
4. Решение треугольников по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них.

# Решите самостоятельно задачи

- № 26 (5) § 12
- № 27 (6) § 12
- № 28 (4) § 12
- № 29 (4) § 12

# 1. Решение треугольника по стороне и двум углам.



**Дано:**  $a = 5$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$

**Найти:**  $\alpha = ?$   $b = ?$   $c = ?$

**Решение:** 1.  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$

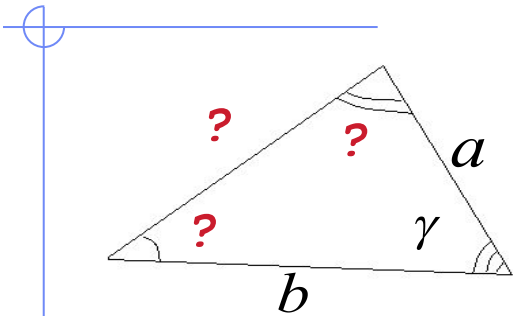
2. По теореме синусов находим стороны:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow$

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0,5}{0,966} \approx 2,59$$

$$3. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0,707}{0,966} \approx 3,66$$

**Ответ:**  $\alpha = 105^\circ$ ;  $b \approx 2,59$ ;  $c \approx 3,66$ ;

## 2. Решение треугольников по двум сторонам и углу между ними.



Дано:  $a = 12$ ,  $b = 8$ ,  $\gamma = 45^\circ$

Найти:  $\alpha = ?$   $\beta = ?$   $c = ?$

Решение: 1. По теореме косинусов найдём неизвестную сторону  $c$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$c^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 144 + 64 - 2 \cdot 96 \cdot 0,5 = 112 \Rightarrow c = \sqrt{112} \approx 10,6$$

2. По теореме косинусов находим косинус неизвестного угла

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{8^2 + (\sqrt{112})^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10,6} = \frac{64 + 112 - 144}{169,6} \approx 0,19$$

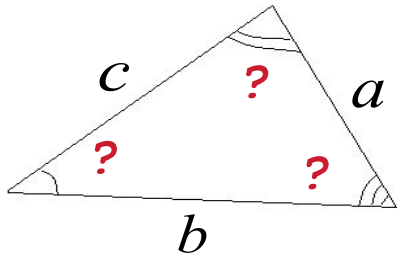
По таблице Брадиса находим угол:  $\alpha \approx 79^\circ$

$$3. \quad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 79^\circ - 60^\circ \approx 41^\circ$$

Ответ:  $c \approx 10,6$ ;  $\alpha \approx 79^\circ$ ;  $\beta \approx 41^\circ$ ;



### 3. Решение треугольников по трём сторонам.



**Дано:**  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$

**Найти:**  $\alpha = ?$   $\beta = ?$   $\gamma = ?$

**Решение:** 1. По теореме косинусов найдём меньший из углов:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{7}{8} = 0,875$$

По таблице Брадиса находим угол:  $\alpha \approx 29^\circ$

2. По теореме косинусов найдём средний из углов:

$$\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos \beta = \frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{16 + 4 - 9}{16} = \frac{11}{16} \approx 0,688$$

По таблице Брадиса находим угол:  $\beta \approx 47^\circ$

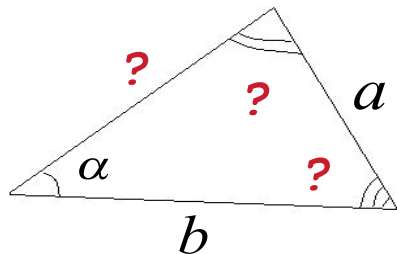
3.  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 29^\circ - 47^\circ \approx 104^\circ$

**Ответ:**  $\alpha \approx 29^\circ$ ;  $\beta \approx 47^\circ$ ;  $\gamma \approx 104^\circ$

## 4. Решение треугольников

по двум сторонам и углу,

лежащему напротив одной из них.



**Дано:**  $a = 6$ ,  $b = 8$ ,  $\alpha = 30^\circ$

**Найти:**  $c = ?$   $\beta = ?$   $\gamma = ?$

**Решение:** 1. По теореме синусов найдём  $\sin \beta$  :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{8 \cdot \sin 30^\circ}{6} = \frac{8 \cdot 0,5}{6} \approx 0,67$$

Этому значению синуса соответствуют два угла, т.к.

$\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$  . Значит  $\beta_1 \approx 42^\circ$  и  $\beta_2 \approx 138^\circ$  .

Рассмотрим сначала I случай:  $\beta \approx 42^\circ$

2. Находим  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 42^\circ = 108^\circ$

По теореме синусов находим третью сторону:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$c = \frac{6 \cdot \sin 108^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{6 \cdot \sin(180^\circ - 72^\circ)}{0,5} = \frac{6 \cdot \sin 72^\circ}{0,5} = 12 \cdot 0,95 \approx 11,4$$

Рассмотрим II случай:  $\beta \approx 138^\circ$

3. Находим  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 138^\circ = 12^\circ$

4. По теореме синусов находим третью сторону:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{6 \cdot \sin 12^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{6 \cdot \sin 12^\circ}{0,5} = 12 \cdot 0,21 \approx 2,49$$

Ответ: 1.  $\beta \approx 42^\circ, \gamma \approx 108^\circ, c \approx 11,4$

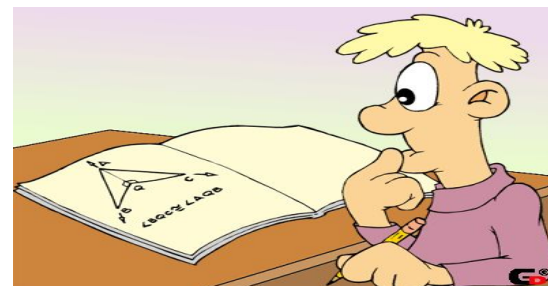
2.  $\beta \approx 138^\circ, \gamma \approx 12^\circ, c \approx 2,49$

## Решите самостоятельно задачи:

§ 12, п. 112,

№ 26 (5), № 27 (6),

№ 28 (4), № 29 (4)



### **Ответы:**

№ 26 2)  $\gamma = 45^\circ$ ;  $b \approx 17,94$ ;  $c \approx 14,43$

5)  $\gamma = 68^\circ$ ;  $a \approx 13,7$ ;  $b \approx 11,26$

№ 27 2)  $c \approx 28$ ;  $\alpha \approx 11^\circ$ ;  $\beta \approx 39^\circ$

6)  $b \approx 7,87$ ;  $\alpha \approx 132^\circ$ ;  $\gamma \approx 33^\circ$

№ 28 2)  $c \approx 19,6$ ;  $\beta \approx 39^\circ$ ;  $\gamma \approx 29^\circ$

4)  $\sin \beta \approx 1,74 \Rightarrow$

**треугольника с такими сторонами не существует**

№29 2)  $\alpha \approx 54^\circ$ ;  $\beta \approx 13^\circ$ ;  $\gamma \approx 113^\circ$

4)  $\alpha \approx 39^\circ$ ;  $\beta \approx 92^\circ$ ;  $\gamma \approx 49^\circ$



# Домашнее задание :

§12, п.112

№ 26 (3) ,

№ 27 (3) ,

№ 28 (3) ,

№ 29 (3)

