Решение треугольников

Геометрия

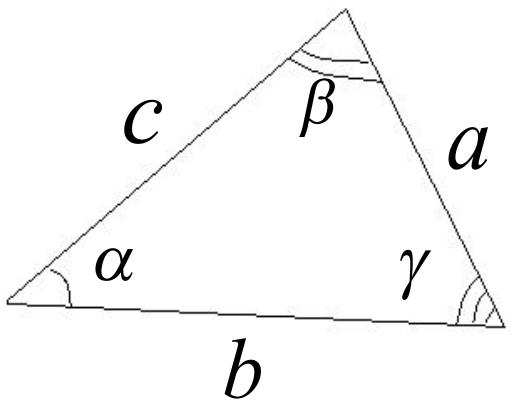
9 класс

по учебнику А.В. Погорелова

Решение треугольников состоит в нахождении неизвестных сторон и углов по известным его сторонам и углам.

Условные обозначения

и основные теоретические сведения



$a,\ b,\ c$ – стороны треугольника

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – противолежащие им углы

Теорема косинусов: Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Теорема синусов: **Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Теорема о сумме углов треугольника:

Сумма углов треугольника равна 180^0

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

*** для любого острого угла выполняются равенства** $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;

**** для любого угла выполняются равенства** $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

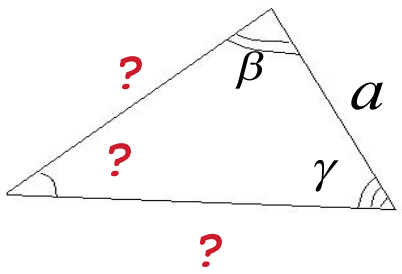
Типы задач

1. Решение треугольников по стороне и двум углам.
2. Решение треугольников по двум сторонам и углу между ними.
3. Решение треугольников по трём сторонам.
4. Решение треугольников по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них.

Решите самостоятельно задачи

- № 26 (5) § 12
- № 27 (6) § 12
- № 28 (4) § 12
- № 29 (4) § 12

1. Решение треугольника по стороне и двум углам.



Дано: $a = 5, \quad \beta = 30^\circ, \quad \gamma = 45^\circ$

Найти: $\alpha = ? \quad b = ? \quad c = ?$

Решение: 1. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$

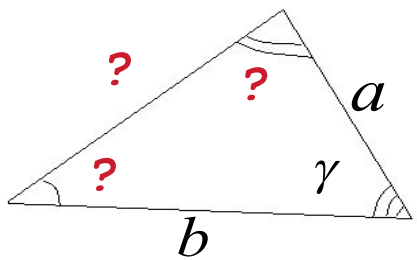
2. По теореме синусов находим стороны: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \Rightarrow$

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0{,}5}{0{,}966} \approx 2{,}59$$

3. $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0{,}707}{0{,}966} \approx 3{,}66$$

Ответ: $\alpha = 105^\circ; \quad b \approx 2{,}59; \quad c \approx 3{,}66;$

2. Решение треугольников по двум сторонам и углу между ними.



Дано: $a = 12, \quad b = 8, \quad \gamma = 45^\circ$

Найти: $\alpha = ? \quad \beta = ? \quad c = ?$

Решение: 1. По теореме косинусов найдём неизвестную сторону c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$c^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 144 + 64 - 2 \cdot 96 \cdot 0{,}5 = 112 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{112} \approx 10{,}6$$

2. По теореме косинусов находим косинус неизвестного угла

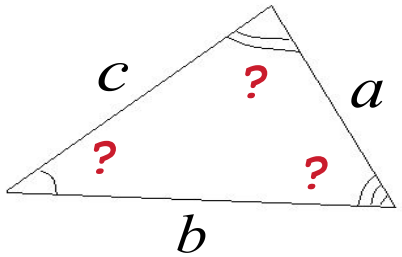
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{8^2 + \left(\sqrt{112}\right)^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10{,}6} = \frac{64 + 112 - 144}{169{,}6} \approx 0{,}19$$

По таблице Брадиса находим угол: $\alpha \approx 79^\circ$

3. $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 79^\circ - 60^\circ \approx 41^\circ$

Ответ: $c \approx 10{,}6; \quad \alpha \approx 79^\circ; \quad \beta \approx 41^\circ;$

3. Решение треугольников по трём сторонам.



Дано: $a = 2, \quad b = 3, \quad c = 4$

Найти: $\alpha = ? \quad \beta = ? \quad \gamma = ?$

Решение: 1. По теореме косинусов найдём меньший из углов:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

По таблице Брадиса находим угол: $\alpha \approx 29^\circ$

2. По теореме косинусов найдём средний из углов:

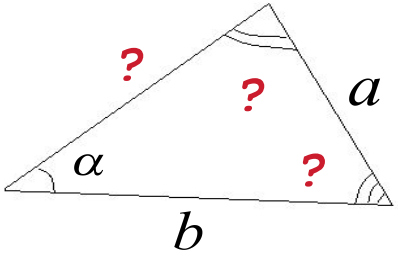
$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos\beta = \frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{16 + 4 - 9}{16} = \frac{11}{16} \approx 0{,}688$$

По таблице Брадиса находим угол: $\beta \approx 47^\circ$

3. $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 29^\circ - 47^\circ \approx 104^\circ$

Ответ: $\alpha \approx 29^\circ; \ \beta \approx 47^\circ; \ \gamma \approx 104^\circ$

4. Решение треугольников по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них.



Дано: $a = 6, \quad b = 8, \quad \alpha = 30^\circ$

Найти: $c = ? \quad \beta = ? \quad \gamma = ?$

Решение: 1. По теореме синусов найдём $\sin\beta$:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\beta = \frac{8\cdot\sin 30^\circ}{6} = \frac{8\cdot 0{,}5}{6} \approx 0{,}67$$

Этому значению синуса соответствуют два угла, т.к. $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$. Значит $\beta_1 \approx 42^\circ$ и $\beta_2 \approx 138^\circ$.

Рассмотрим сначала I случай: $\beta \approx 42^\circ$

2. Находим $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 42^\circ = 108^\circ$

По теореме синусов находим третью сторону:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}\Rightarrow$$

$$c=\frac{6\cdot\sin 108^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{6\cdot\sin\left(180^\circ-72^\circ\right)}{0{,}5}=\frac{6\cdot\sin 72^\circ}{0{,}5}=12\cdot 0{,}95\approx 11{,}4$$

Рассмотрим II случай: $\beta\approx 138^\circ$

3. Находим $\gamma=180^\circ-\alpha-\beta=180^\circ-30^\circ-138^\circ=12^\circ$

4. По теореме синусов находим третью сторону:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}\Rightarrow c=\frac{6\cdot\sin 12^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{6\cdot\sin 12^\circ}{0{,}5}=12\cdot 0{,}21\approx 2{,}49$$

Ответ: 1. $\beta\approx 42^\circ,\gamma\approx 108^\circ,c\approx 11{,}4$

2. $\beta\approx 138^\circ,\gamma\approx 12^\circ,c\approx 2{,}49$

Решите самостоятельно задачи:

§ 12, п.112,

№ 26 (5), № 27 (6),

№ 28 (4), № 29 (4)

Ответы:

№ 26 2) $\gamma = 45^{\circ}$; $b \approx 17{,}94$; $c \approx 14{,}43$

5). $\gamma = 68^{\circ}$; $a \approx 13{,}7$; $b \approx 11{,}26$

№ 27 2). $c \approx 28$; $\alpha \approx 11^{\circ}$; $\beta \approx 39^{\circ}$

6). $b \approx 7{,}87$; $\alpha \approx 132^{\circ}$; $\gamma \approx 33^{\circ}$

№ 28 2). $c \approx 19{,}6$; $\beta \approx 39^{\circ}$; $\gamma \approx 29^{\circ}$

4). $\sin\beta \approx 1{,}74 \Rightarrow$

треугольника с такими сторонами не существует

№29 2). $\alpha \approx 54^{\circ}$; $\beta \approx 13^{\circ}$; $\gamma \approx 113^{\circ}$

4). $\alpha \approx 39^{\circ}$; $\beta \approx 92^{\circ}$; $\gamma \approx 49^{\circ}$

Домашнее задание:

§12, п.112

№ 26(3),
№ 27(3),
№ 28 (3),
№ 29 (3)