



Решение треугольников

Геометрия

9 класс

по учебнику А.В. Погорелова



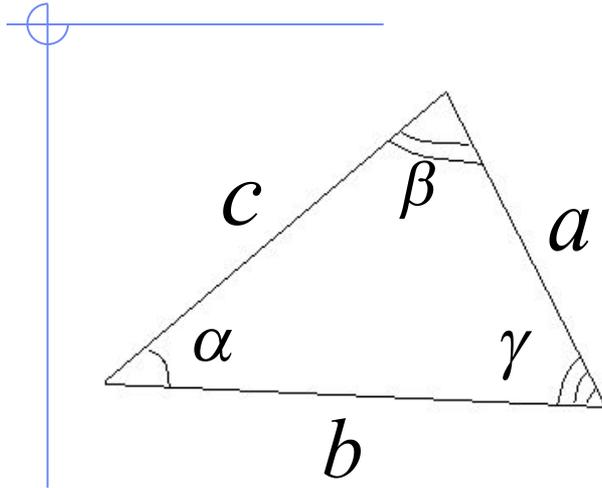


**Решение треугольников
состоит в нахождении
неизвестных сторон и
углов по известным его
сторонам и углам.**



Условные обозначения

и основные теоретические сведения



a, b, c – стороны
треугольника
 α, β, γ –
противолежащие им
углы

Теорема косинусов: Квадрат любой стороны
треугольника равен сумме квадратов
двух других сторон без удвоенного
произведения этих сторон на косинус
угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Теорема синусов: Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Теорема о сумме углов
треугольника:

Сумма углов треугольника равна 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

* для любого острого угла выполняются равенства $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;

** для любого угла выполняются равенства $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$; $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

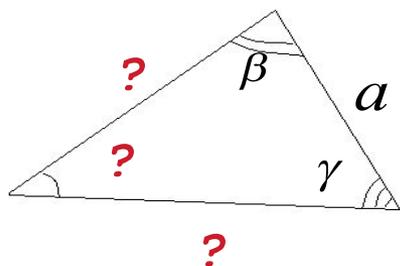
Типы задач

1. Решение треугольников по стороне и двум углам.
2. Решение треугольников по двум сторонам и углу между ними.
3. Решение треугольников по трём сторонам.
4. Решение треугольников по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них.

Решите самостоятельно задачи

- № 26 (5) § 12
- № 27 (6) § 12
- № 28 (4) § 12
- № 29 (4) § 12

1. Решение треугольника по стороне и двум углам.



Дано: $a = 5$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$

Найти: $\alpha = ?$ $b = ?$ $c = ?$

Решение: 1. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$

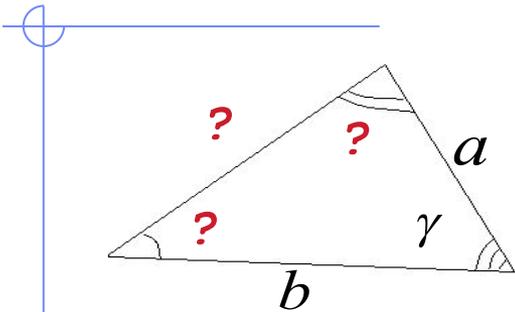
2. По теореме синусов находим стороны: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow$

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0,5}{0,966} \approx 2,59$$

$$3. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0,707}{0,966} \approx 3,66$$

Ответ: $\alpha = 105^\circ$; $b \approx 2,59$; $c \approx 3,66$;

2. Решение треугольников по двум сторонам и углу между ними.



Дано: $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 45^\circ$

Найти: $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $c = ?$

Решение: 1. По теореме косинусов найдём неизвестную сторону c :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$c^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 144 + 64 - 2 \cdot 96 \cdot 0,5 = 112 \Rightarrow c = \sqrt{112} \approx 10,6$$

2. По теореме косинусов находим косинус неизвестного угла

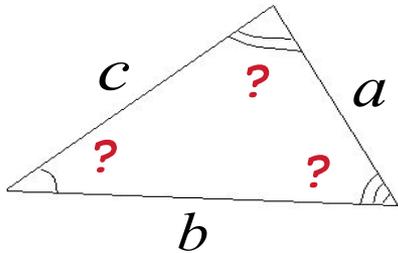
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{8^2 + (\sqrt{112})^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 10,6} = \frac{64 + 112 - 144}{169,6} \approx 0,19$$

По таблице Брадиса находим угол: $\alpha \approx 79^\circ$

$$3. \quad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 79^\circ - 60^\circ \approx 41^\circ$$

Ответ: $c \approx 10,6$; $\alpha \approx 79^\circ$; $\beta \approx 41^\circ$;

3. Решение треугольников по трём сторонам.



Дано: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

Найти: $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = ?$

Решение: 1. По теореме косинусов найдём меньший из углов:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{7}{8} = 0,875$$

По таблице Брадиса находим угол: $\alpha \approx 29^\circ$

2. По теореме косинусов найдём средний из углов:

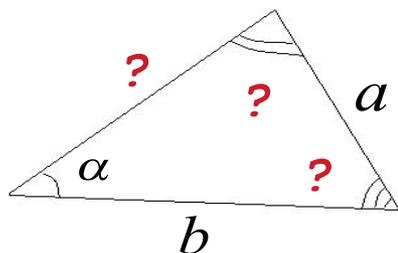
$$\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos \beta = \frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{16 + 4 - 9}{16} = \frac{11}{16} \approx 0,688$$

По таблице Брадиса находим угол: $\beta \approx 47^\circ$

3. $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 29^\circ - 47^\circ \approx 104^\circ$

Ответ: $\alpha \approx 29^\circ$; $\beta \approx 47^\circ$; $\gamma \approx 104^\circ$

4. Решение треугольников по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них.



Дано: $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30^\circ$
Найти: $c = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = ?$

Решение: 1. По теореме синусов
найдем $\sin \beta$:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \Rightarrow \sin \beta = \frac{8 \cdot \sin 30^\circ}{6} = \frac{8 \cdot 0,5}{6} \approx 0,67$$

Этому значению синуса соответствуют два угла, т.к.
 $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$. Значит $\beta_1 \approx 42^\circ$ и $\beta_2 \approx 138^\circ$.

Рассмотрим сначала I случай: $\beta \approx 42^\circ$

2. Находим $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 42^\circ = 108^\circ$

По теореме синусов находим третью сторону:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$c = \frac{6 \cdot \sin 108^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{6 \cdot \sin(180^\circ - 72^\circ)}{0,5} = \frac{6 \cdot \sin 72^\circ}{0,5} = 12 \cdot 0,95 \approx 11,4$$

Рассмотрим II случай: $\beta \approx 138^\circ$

3. Находим $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 138^\circ = 12^\circ$

4. По теореме синусов находим третью сторону:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{6 \cdot \sin 12^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{6 \cdot \sin 12^\circ}{0,5} = 12 \cdot 0,21 \approx 2,49$$

Ответ: 1. $\beta \approx 42^\circ, \gamma \approx 108^\circ, c \approx 11,4$

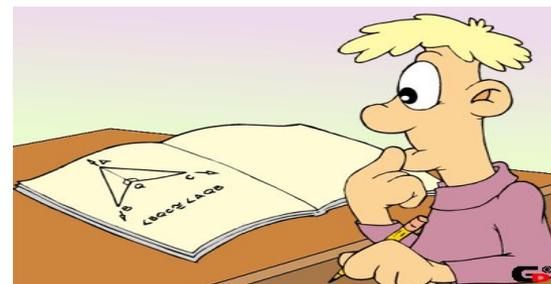
2. $\beta \approx 138^\circ, \gamma \approx 12^\circ, c \approx 2,49$

Решите самостоятельно задачи:

§ 12, п. 112,

№ 26 (5), № 27 (6),

№ 28 (4), № 29 (4)



Ответы:

№ 26 2) $\gamma = 45^\circ$; $b \approx 17,94$; $c \approx 14,43$

5) $\gamma = 68^\circ$; $a \approx 13,7$; $b \approx 11,26$

№ 27 2) $c \approx 28$; $\alpha \approx 11^\circ$; $\beta \approx 39^\circ$

6) $b \approx 7,87$; $\alpha \approx 132^\circ$; $\gamma \approx 33^\circ$

№ 28 2) $c \approx 19,6$; $\beta \approx 39^\circ$; $\gamma \approx 29^\circ$

4) $\sin \beta \approx 1,74 \Rightarrow$

треугольника с такими сторонами не существует

№29 2) $\alpha \approx 54^\circ$; $\beta \approx 13^\circ$; $\gamma \approx 113^\circ$

4) $\alpha \approx 39^\circ$; $\beta \approx 92^\circ$; $\gamma \approx 49^\circ$



Домашнее задание :

§12, п.112

№ 26 (3) ,

№ 27 (3) ,

№ 28 (3) ,

№ 29 (3)

