



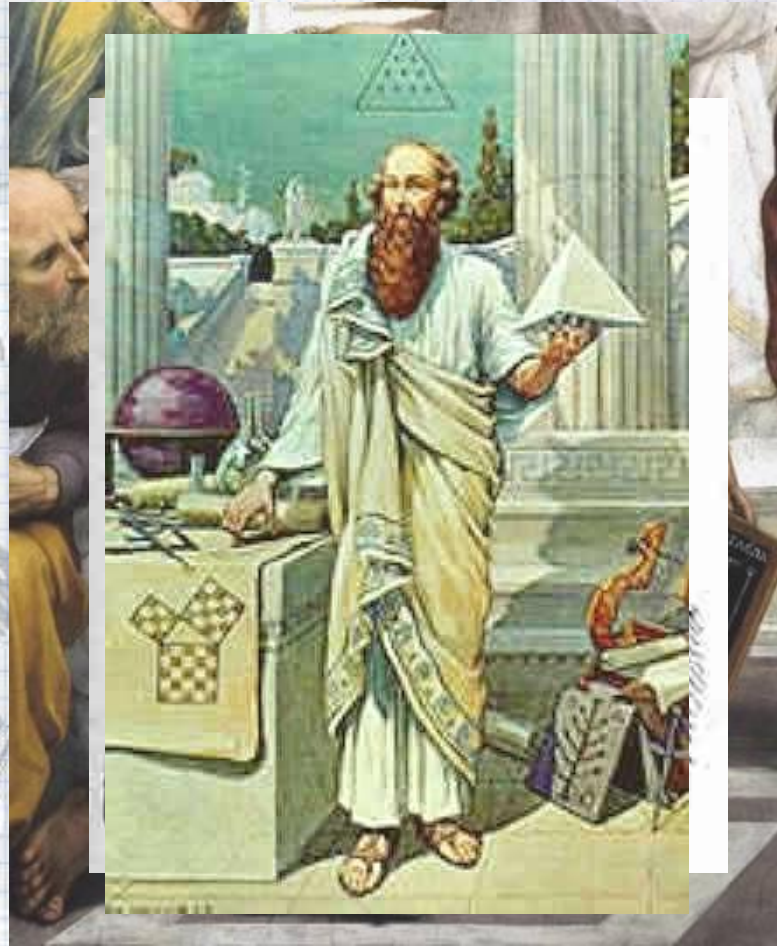
Теорема Пифагора

Презентацию подготовила:

Ученица 9«Б» класса СОШ №25

П.Энем, Тахтамукайского района

Катаева Марианна



*Пифагор Самосский (ок. 580 - ок. 500 до н. э.)
древнегреческий математик и философ-идеалист.*

Геометрическая формулировка.

Изначально теорема была сформулирована следующим образом:



В прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Алгебраическая формулировка.

В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

То есть, обозначив длину гипотенузы треугольника через c , а длины катетов через a и b :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Обратная Теорема Пифагора

Для всякой тройки положительных чисел a , b и c , такой, что $a^2 + b^2 = c^2$, существует прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c .

Доказательства

1) Через подобные треугольники

Пусть ABC есть прямоугольный треугольник с прямым углом C . Проведём высоту из C и обозначим её основание через H . Треугольник AHC подобен треугольнику ABC по двум углам. Аналогично, треугольник CBH подобен ABC . Введя обозначения

$|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$ получаем

$$\frac{a}{c} = \frac{|HB|}{a}, \frac{b}{c} = \frac{|AH|}{b}.$$

Что эквивалентно

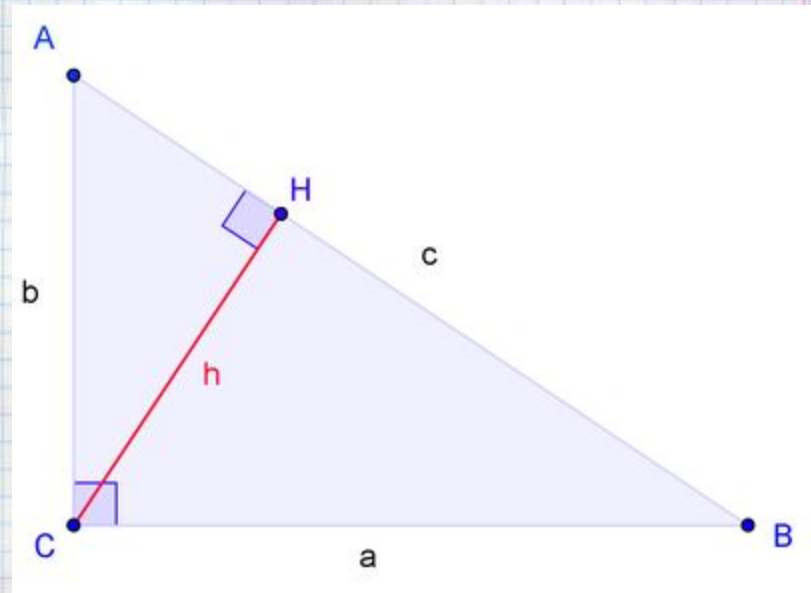
$$a^2 = c \cdot |HB|; b^2 = c \cdot |AH|.$$

Сложив, получаем

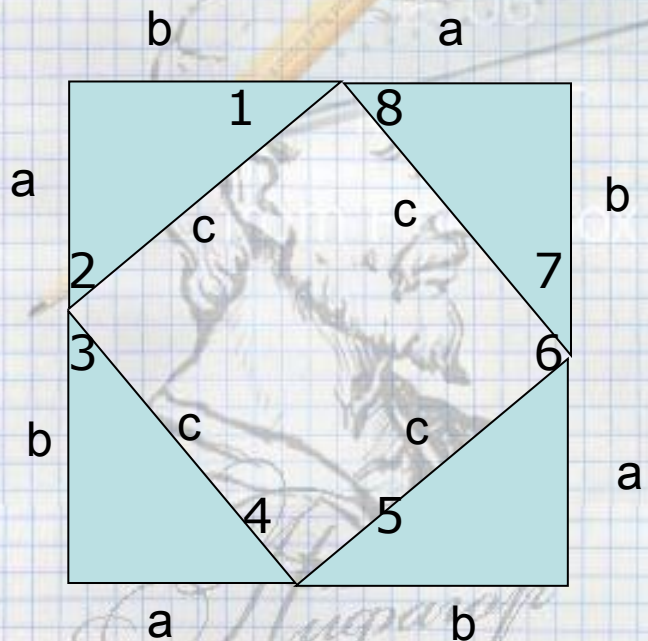
$$a^2 + b^2 = c \cdot (|HB| + |AH|) = c^2.$$

или

$$a^2 + b^2 = c^2$$



2) Доказательство методом площадей



Дано: Прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c .

Доказательство:

Достроим этот треугольник до квадрата со стороной $a+b$.

У этого квадрата сторона $a+b$, а его площадь равна $S_{\text{кв}} = (a+b)^2$

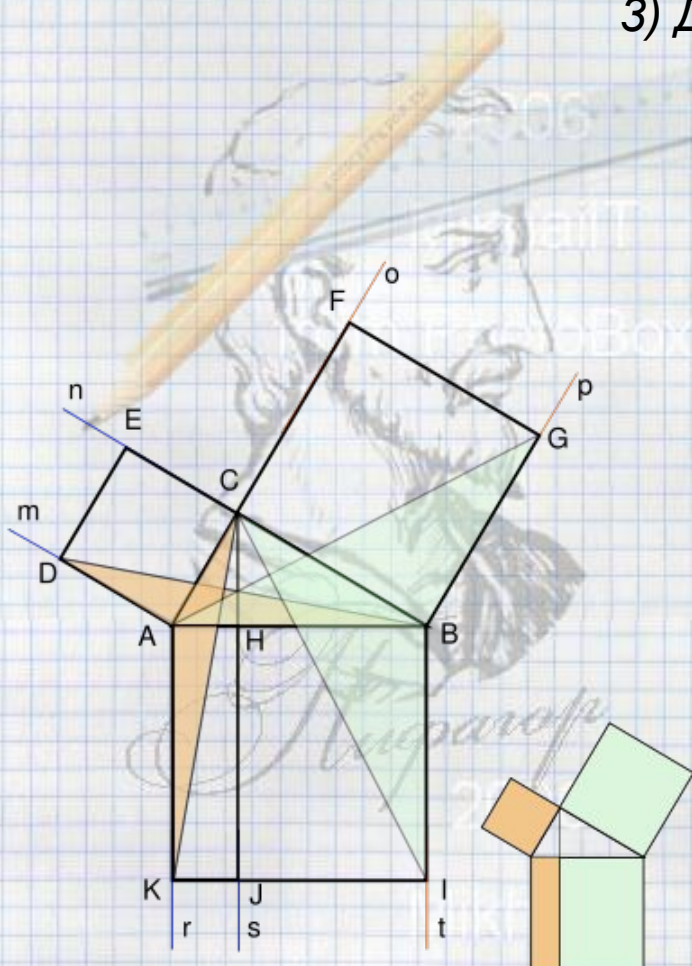
С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников и четырёхугольника со стороной c , который является квадратом, т.к. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 5 = \sphericalangle 7$ и $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4 = \sphericalangle 6 = \sphericalangle 8 \Rightarrow \sphericalangle 1 + \sphericalangle 8 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 5 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 6 = \sphericalangle 4 + \sphericalangle 7 = 90^\circ$.

Найдём площадь квадрата: $S_{\text{кв}} = 4S_{\text{тр}} + c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + c^2 = 2ab + c^2$.

Тогда $(a+b)^2 = 2ab + c^2$,

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2, \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

3) Доказательство Евклида



Рассмотрим чертеж слева. На нём мы построили квадраты на сторонах прямоугольного треугольника и провели из вершины прямого угла C луч s перпендикулярно гипотенузе AB , он пересекает квадрат $ABKI$, построенный на гипотенузе, на два прямоугольника — $BHJI$ и $HAJK$ соответственно. Оказывается, что площади данных прямоугольников в точности равны площадям квадратов, построенных на соответствующих катетах.

Попытаемся доказать, что площадь квадрата $DECA$ равна площади прямоугольника $АНJK$. Для этого воспользуемся вспомогательным наблюдением: Площадь треугольника с той же высотой и основанием, что и данный прямоугольник, равна половине площади заданного прямоугольника. Это следствие определения площади треугольника как половины произведения основания на высоту. Из этого наблюдения вытекает, что площадь треугольника $АСK$ равна площади треугольника $АНK$ (не изображённого на рисунке), которая, в свою очередь, равна половине площади прямоугольника $АНJK$. Докажем теперь, что площадь треугольника $АСK$ также равна половине площади квадрата $DECA$. Единственное, что необходимо для этого сделать, — это доказать равенство треугольников $АСK$ и BDA (так как площадь треугольника BDA равна половине площади квадрата по указанному выше свойству). Равенство это очевидно, треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Именно — $AB=AK, AD=AC$ — равенство углов $САK$ и $ВАD$ легко доказать методом движения: повернём треугольник $САK$ на 90° против часовой стрелки, тогда очевидно, что соответствующие стороны двух рассматриваемых треугольников совпадут (ввиду того, что угол при вершине квадрата — 90°).

Рассуждение о равенстве площадей квадрата $BCFG$ и прямоугольника $BHJI$ совершенно аналогично.

Тем самым мы доказали, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, складывается из площадей квадратов, построенных на катетах.

4) Алгебраическое доказательство

Дано: ABC -прямоугольный треугольник

Доказать: $AB^2=AC^2+BC^2$

Доказательство:

1) Проведем высоту CD из вершины прямого угла C .

2) По определению косинуса угла $\cos A = AD/AC = AC/AB$, откуда следует

$$AB \cdot AD = AC^2.$$

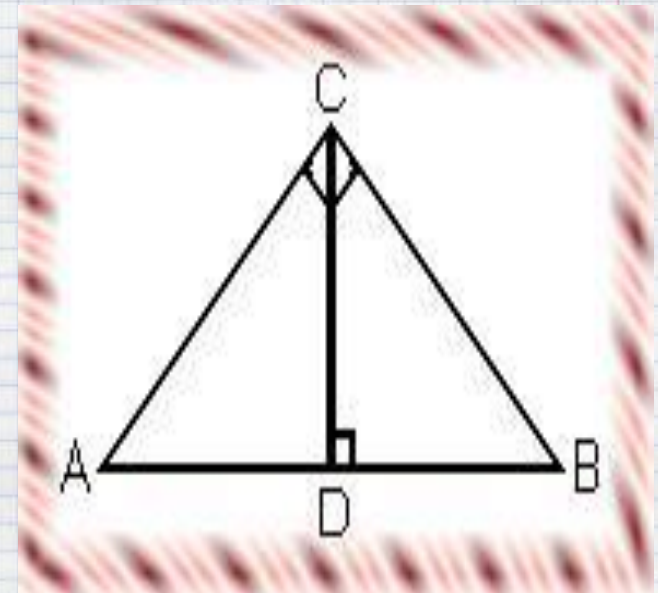
3) Аналогично $\cos B = BD/BC = BC/AB$, значит

$$AB \cdot BD = BC^2.$$

4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

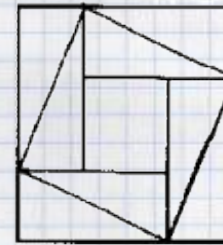
$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

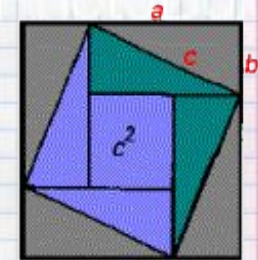


5) Древнекитайское доказательство

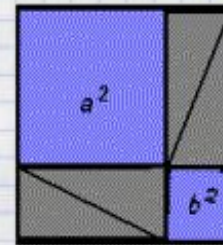
• В IX книге "Математики"- главном из сохранившихся математико-астрономических сочинений Древнего Китая- помещен чертеж (рис. а), доказывающий теорему Пифагора. Четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a , b и гипотенузой c уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной $a+b$ внутренний - квадрат со стороной c , построенный на гипотенузе (рис. б). Если квадрат со стороной c вырезать и оставшиеся 4 затушеванных треугольника уложить в два прямоугольника (рис. в), то ясно, что образовавшаяся пустота, с одной стороны, равна c^2 , а с другой - a^2+b^2 , т.е. $c^2=a^2+b^2$. Теорема доказана.



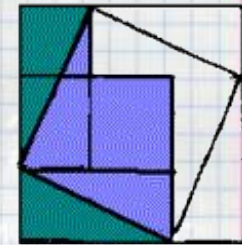
а)



б)

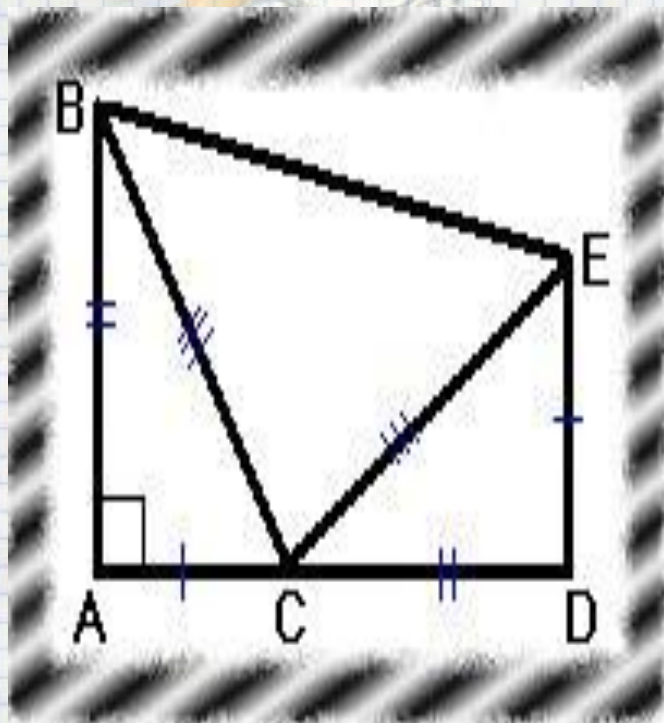


в)



г)

6) Геометрическое доказательство



Дано: ABC -прямоугольный треугольник

Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Доказательство:

1) Построим отрезок CD равный отрезку AB на продолжении катета AC прямоугольного треугольника ABC . Затем опустим перпендикуляр ED к отрезку AD , равный отрезку AC , соединим точки B и E .

2) Площадь фигуры $ABED$ можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED} = 2 \cdot AB \cdot AC / 2 + BC^2 / 2$$

3) Фигура $ABED$ является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED} = (DE + AB) \cdot AD / 2.$$

4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (DE + AB)(CD + AC) / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (AC + AB) \cdot AC / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = AC^2 / 2 + AB \cdot AC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$