

Примеры комбинаторных задач

- ◆ Перестановки
 - ◆ Размещения
 - ◆ Сочетания
- 

Перебор возможных вариантов

Пример 1. Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека — Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

Составим сначала все пары, в которые входит **Антонов** (для краткости будем писать первые буквы фамилий). Получим три пары:

АГ, АС, АФ.

Пары, в которые входит Григорьев, но не входит Антонов:

ГС, ГФ.

Пары, в которые входит Сергеев, но не входят Антонов и Григорьев: **СФ.**

Других вариантов составления пар нет, так как все пары, в которые входит Федоров, уже составлены.

Итак, мы получили шесть пар:

АГ, АС, АФ, ГС, ГФ, СФ.

Значит, всего существует шесть вариантов выбора тренером пары теннисистов из данной группы.

Способ рассуждений, которым мы воспользовались при решении задачи, называют **перебором возможных вариантов.**



Перестановки

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются *перестановки*.

Пример. Пусть имеются три книги. Обозначим их буквами **a**, **b** и **c**. Эти книги можно расставить на полке по-разному.

Если первой поставить книгу **a**, то возможны такие расположения книг: **abc**, **acb**.

Если первой поставить книгу **b**, то возможными являются такие расположения: **bac**, **bca**.

И наконец, если первой поставить книгу **c**, то получим такие расположения: **cab**, **cba**.

Каждое из этих расположений называют *перестановкой* из трех элементов.



Перестановки

Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.

$$P_n = 1 * 2 * 3 * \dots * (n-2)(n-1) n$$

Задача . Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке ?



Размещения



Пусть имеется 4 шара(обозначим a,b,c,d) и 3 пустые ячейки. Одна из возможных троек:



Выбирая по-разному 1-й, 2-й и 3-й шары, получаем различные упорядоченные тройки шаров, например:



Каждую упорядоченную тройку, которую можно составить из 4-х элементов, называют *размещением из 4-х элементов по 3*.

Размещения

Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n - (k-1))$$

Задача. Учащиеся 2-го класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета ?



Сочетания



Пусть имеются 5 гвоздик разного цвета.
Обозначим их a, b, c, d, e . Требуется составить букет из 3-х цветов.

Если в букет входит цветок a , то можно составить такие букеты:

$abc, abd, abe, acd, ace, ade.$

Если в букет не входит a , но входит гвоздика b , то такие :

$bcd, bce, bde.$

Наконец, если в букет входят ни a , ни b , то возможен только 1 вариант составления букета:

$cde.$

Мы указали все возможные способы составления букетов, в котором по-разному сочетаются 3 гвоздики из данных 5.

Это **сочетания** из 5 элементов по 3.

Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

Задача. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?



Контрольные вопросы

1. Объясните, в чем состоит комбинаторное правило умножения, используемое для подсчета числа возможных вариантов.
2. Что называется перестановкой из n элементов? Запишите правило для вычисления числа перестановок из n элементов. Какой смысл имеет запись $n !$?
3. Что называется размещением из n элементов по k ? Запишите формулу.
4. Что называется сочетанием из n элементов по k ? Запишите формулу.