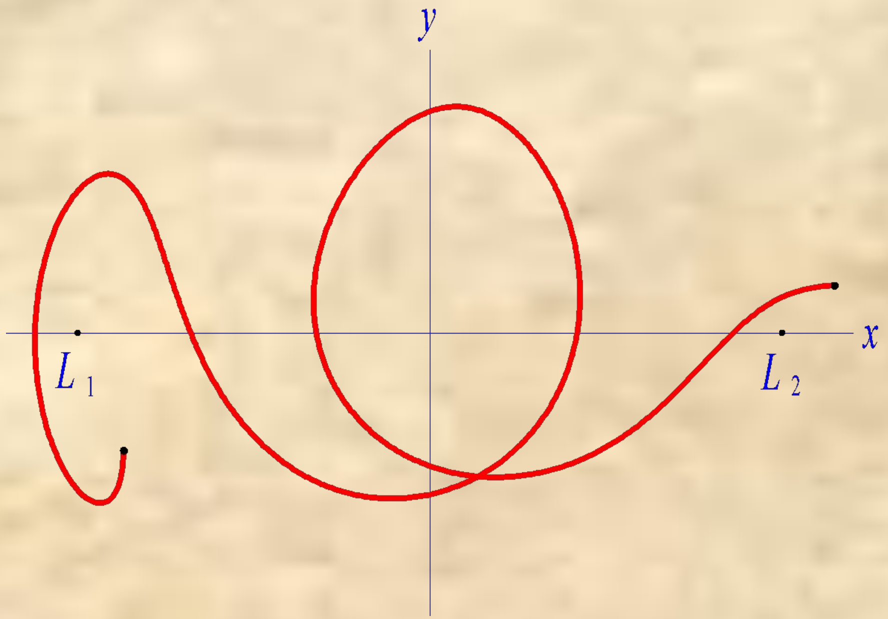
РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ХИЛЛА



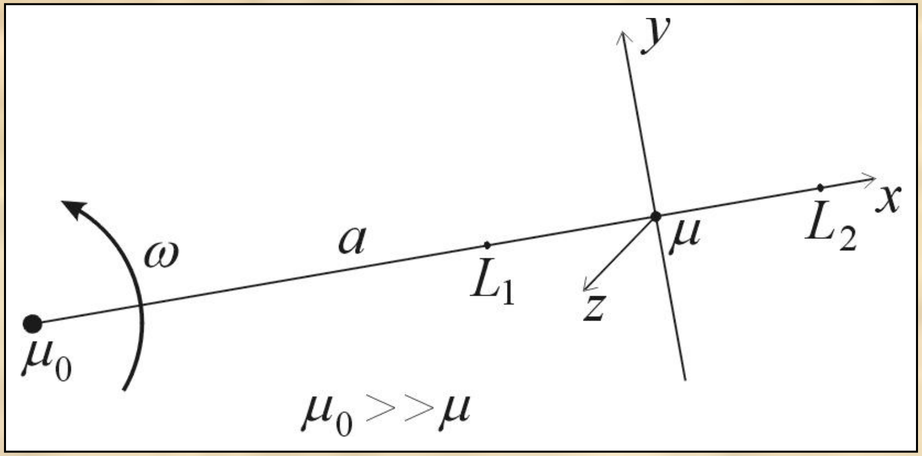
А. Суханов

Модель движения Хилла

Уравнения движения:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \omega^2 \mathbf{N}\mathbf{r} + 2\omega \mathbf{M}\mathbf{v} - \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



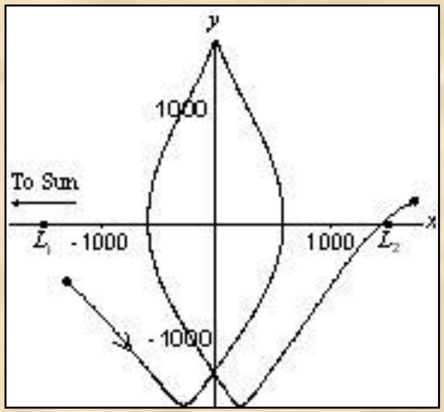
Коллинеарные точки либрации L_1 и L_2:

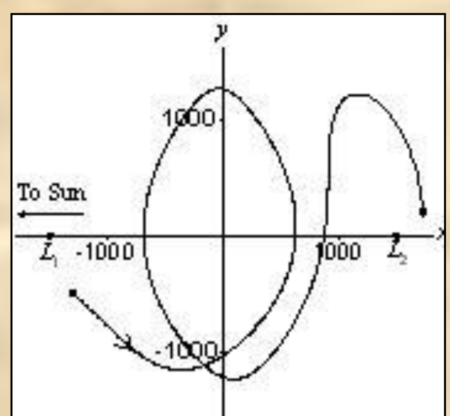
$$\mathbf{r}_L = \{x_L, 0, 0\}, \quad x_L = \pm a\left(\frac{\mu}{3\mu_0}\right)^{\frac{1}{3}} = \pm 1496.56 \times 10^3 \text{ км} \quad \text{для с.-з. системы}$$

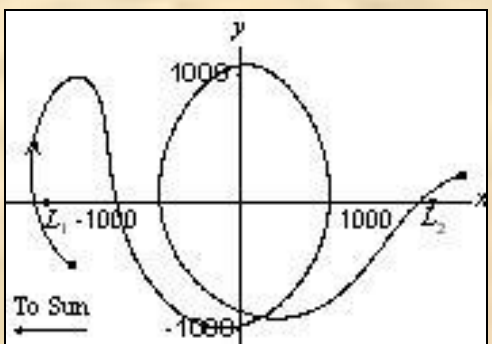
Матрица изохронных производных Φ:

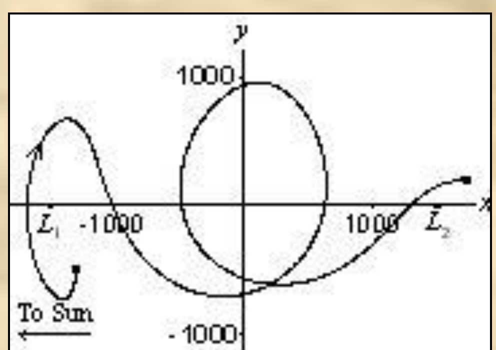
$$\dot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{F}\mathbf{\Phi}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_3 \\ \omega^2\mathbf{N} + \mathbf{G} & 2\omega\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \frac{\mu}{r^3}\left(3\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}^T}{r^2} - \mathbf{I}_3\right)$$

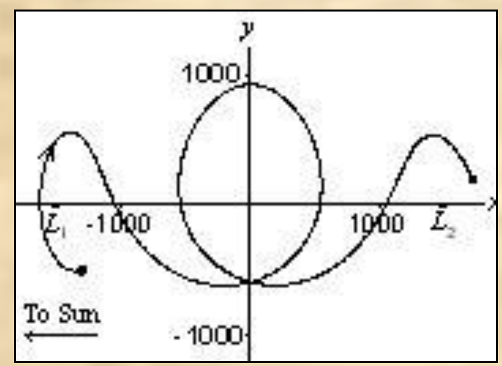
Краевая задача: (Задача Ламберта) **Найти орбиту перелета между двумя заданными положениями в пространстве за заданное время**





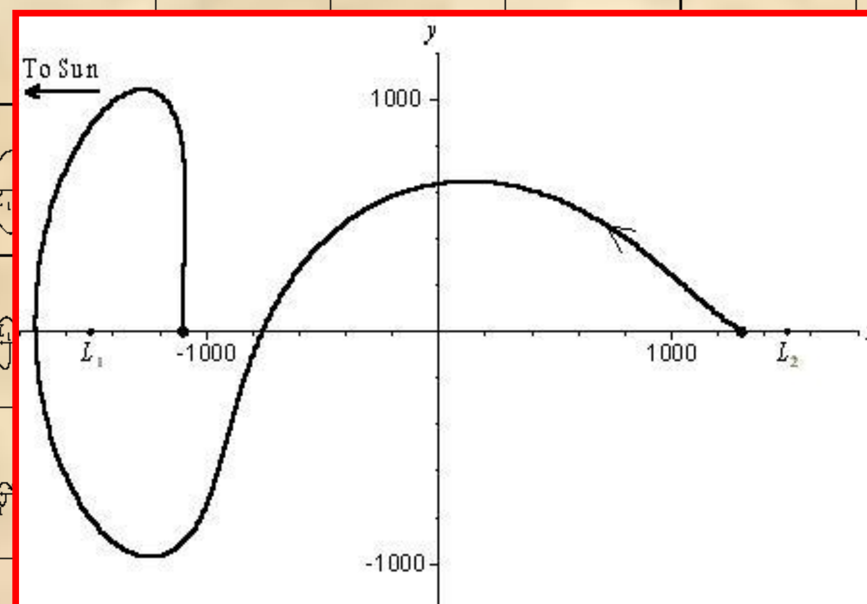






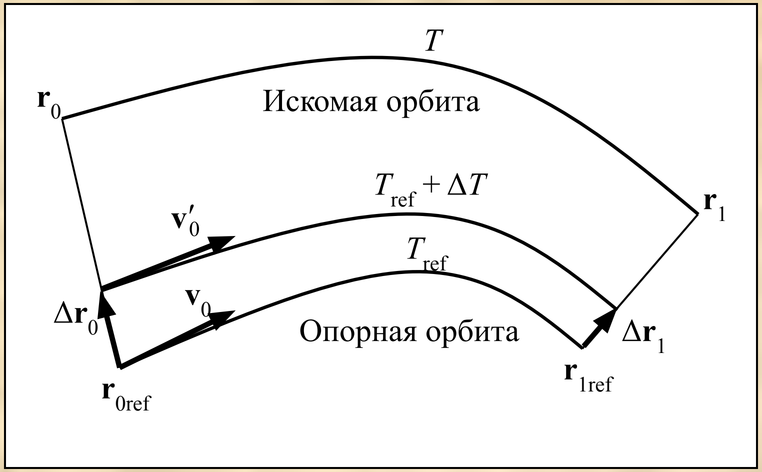
Опорные орбиты

Тип перелета	Число витков	Тип орбиты								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
EE	0			–	–	–	–	–	–	–
EL	0					–	–	–	–	–
LE	0									
LL	0									
	1									
	2									



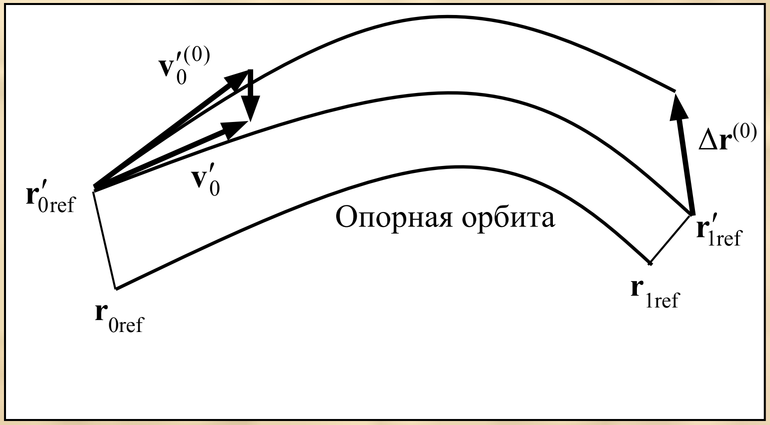
Предлагаемый метод

Шаг: задаются $\Delta\mathbf{r}_0$, $\Delta\mathbf{r}_1$, ΔT



$$\boxed{\mathbf{v}_0'^{(0)}=\mathbf{v}_0+\mathbf{\Phi}_{12}^{-1}\left(\Delta\mathbf{r}_1-\mathbf{\Phi}_{11}\Delta\mathbf{r}_0-\mathbf{v}_1\Delta T\right)}$$

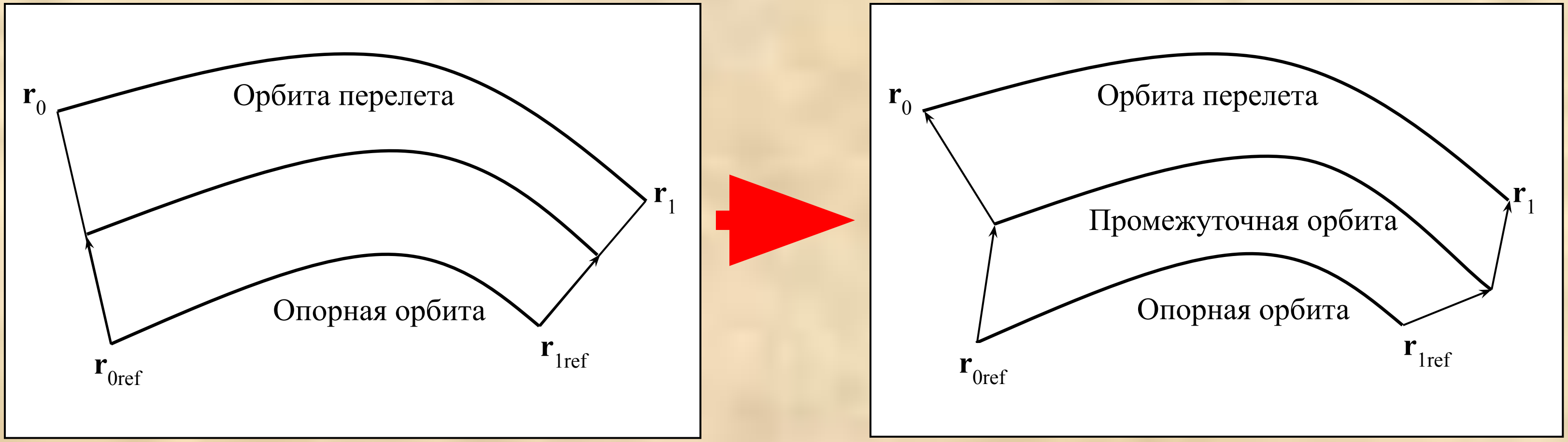
Коррекция методом Ньютона



$$\boxed{\mathbf{v}_0'^{(n+1)}=\mathbf{v}_0'^{(n)}-\left(\mathbf{\Phi}_{12}^{(n)}\right)^{-1}\Delta\mathbf{r}^{(n)},\; n=0,1,\ldots}$$

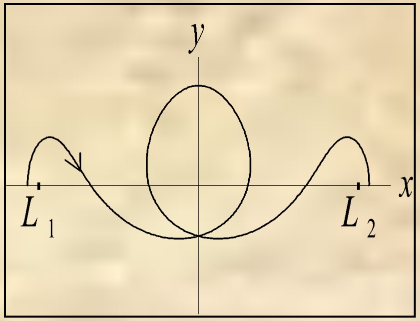
Предложенный метод не приводит к искомому решению, если:

- Перелет данного типа между заданными положениями невозможен
- Перелет данного типа за заданное время невозможен
- Орбита перелета данного типа между заданными положениями за заданное время существует, однако предложенная процедура не обеспечивает сходимость к этой орбите



Примеры: Перелет между двумя заданными положениями за заданное время

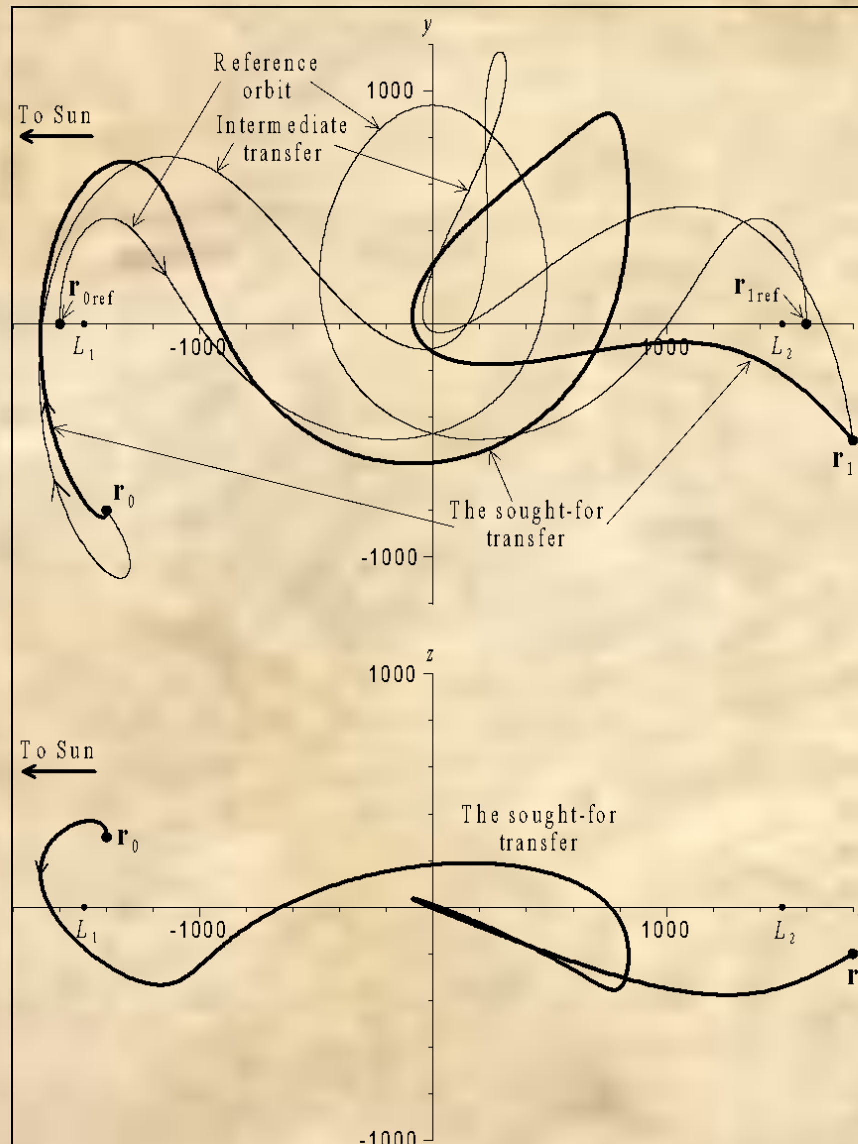
Тип:



$\mathbf{r}_0 = \{-1400, -800, 300\}$
$\mathbf{r}_1 = \{1800, -500, -200\}$
$T = 300$ дней

Промежуточная орбита:

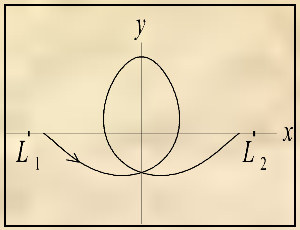
$\mathbf{r}_0 = \{-1400, -800, 0\}$
$\mathbf{r}_1 = \{1800, -500, 0\}$
$T = 260$ дней



Примеры: Построение периодической орбиты

Найти плоскую орбиту вокруг Земли с периодом 5-6 месяцев, проходящую через точку {–200, 1200, 0}

Опорная орбита:



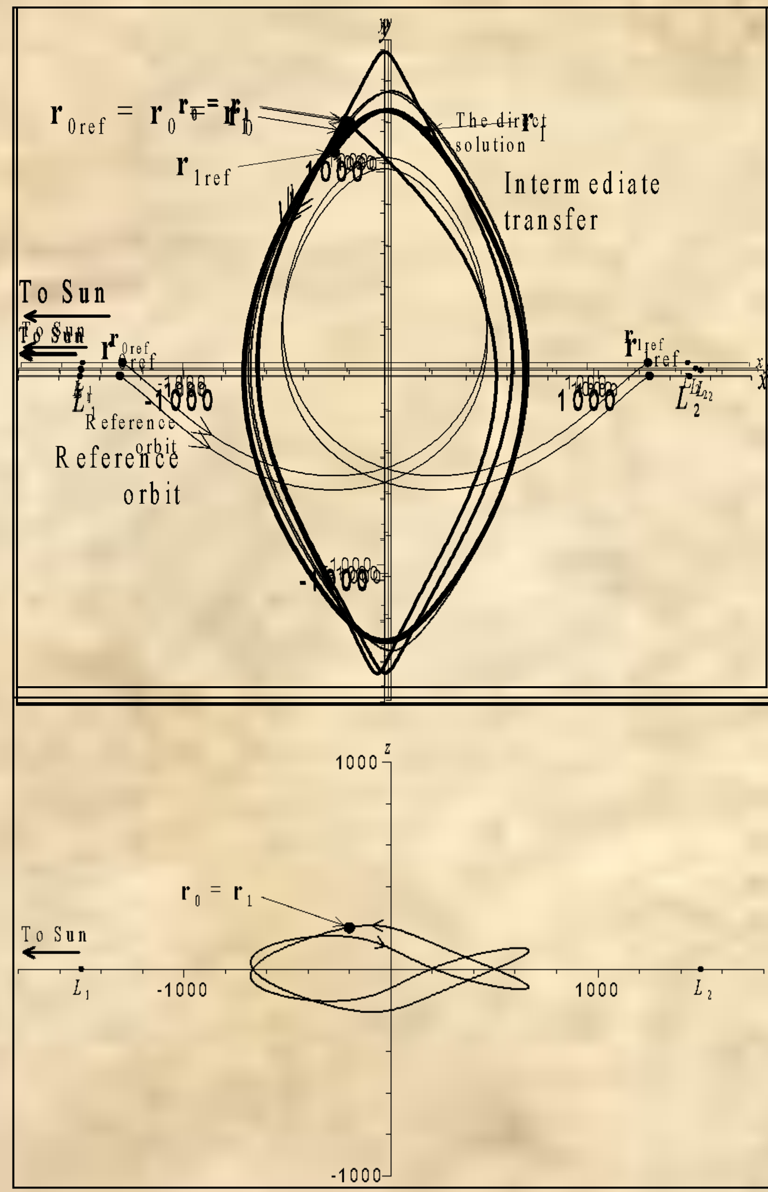
, $T = 330$ дней

1. $\mathbf{r}_0 = \{-200, 1200, 0\}$
   $\mathbf{r}_1 = \{200, 1200, 0\}$
   $T = 300$ дней

2. $T = 330$ дней

3. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \{-200, 1200, 0\}$
   $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1$
   $P = 167.36$ дней

4. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \{-200, 1200, 200\}$
   $\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$
   $P \approx 340$ дней



Примеры: Построение гало-орбиты

$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 \quad = \{x_{L1} - 200, 0, 0\}$ =

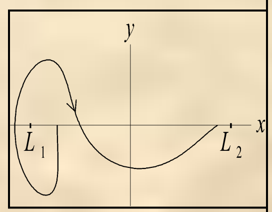
$= \{-1296.56, 0, 0\}$

$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1$

$P \approx 180$ дней

Опорная орбита:

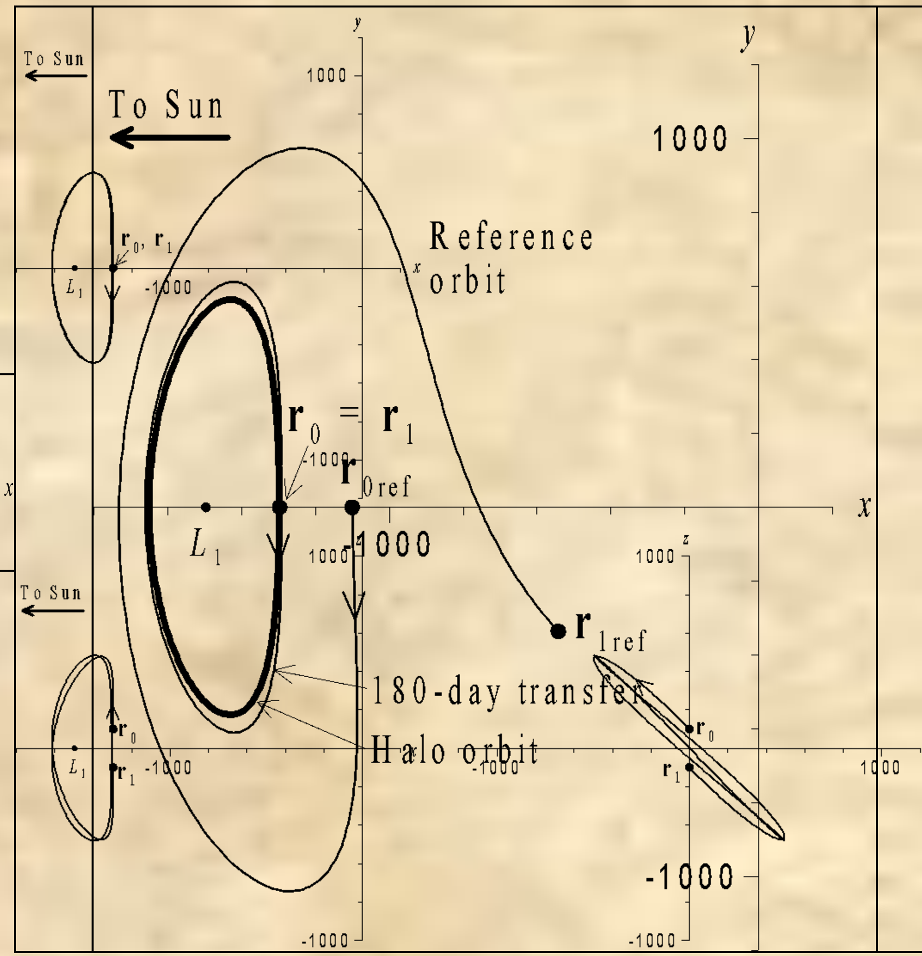
180-суточный фрагмент орбиты



$P = 178.295$ дней

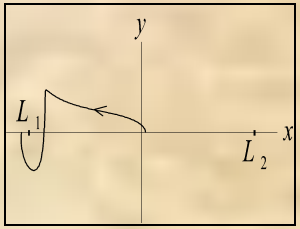
Пространственная гало-орбита:

$\mathbf{r}_0 = \{-1296.56, 0, 100\}$
$\mathbf{r}_1 = \{-1296.56, 0, -100\}$
$T_{\text{ref}} = 2P$, $T = 358$ дней



Примеры: Перелет Земля – гало-орбита

Опорная орбита:

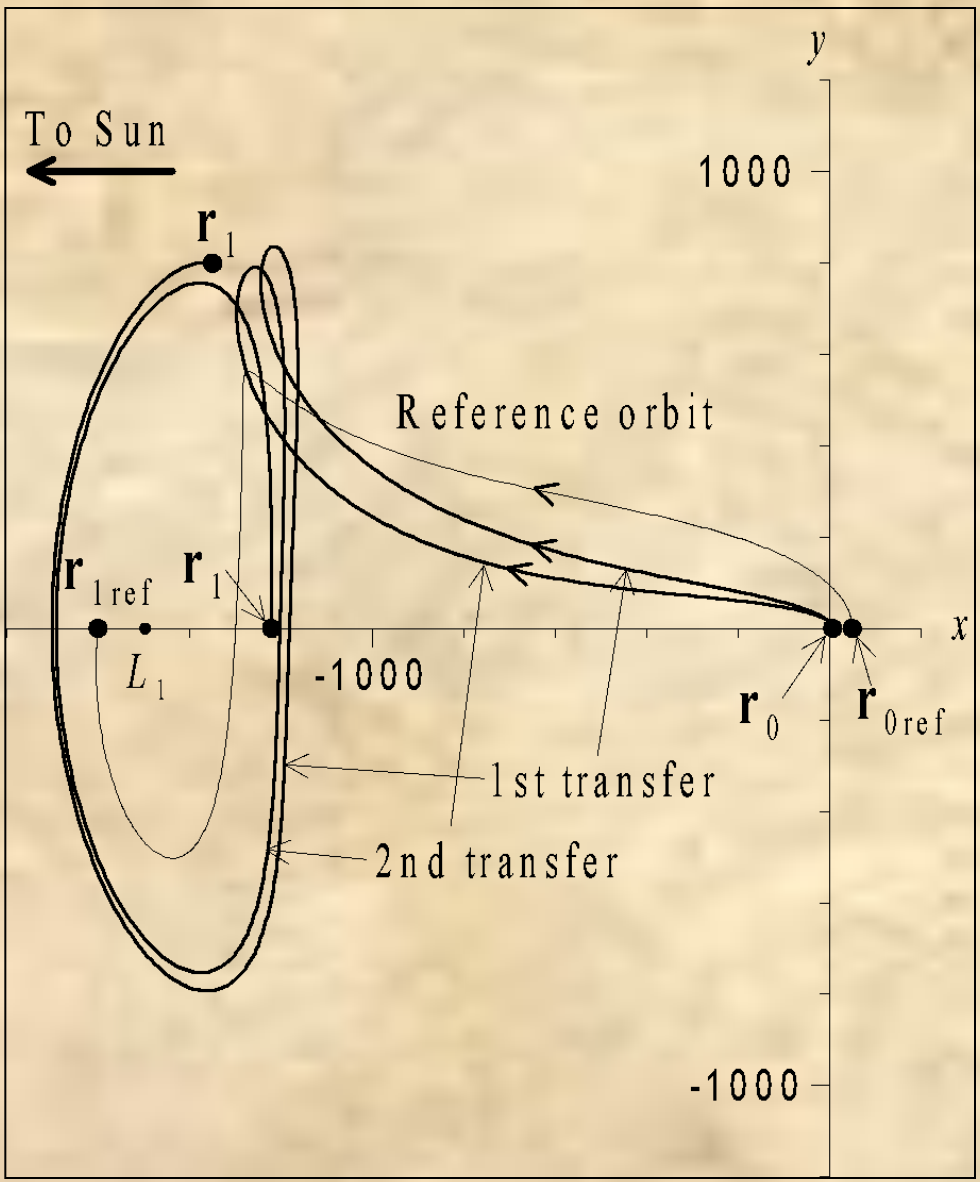


$\mathbf{r}_0 = \{7, 0, 0\}$
$\mathbf{r}_1 = \{–1350, 800, 0\}$
$T = 235$ дней

Затем:

$\mathbf{r}_1 = \{–1220, 0, 0\}$
$T = 280$ дней

И т.д.



Примеры: Перелет между гало-орбитами вокруг L_1

Гало-орбиту зададим вектором состояния

$$\mathbf{x}_0 = \{x_L - \Delta x_0,\ 0,\ z_0,\ 0,\ -v_0\cos\phi_0,\ v_0\sin\phi_0\}$$

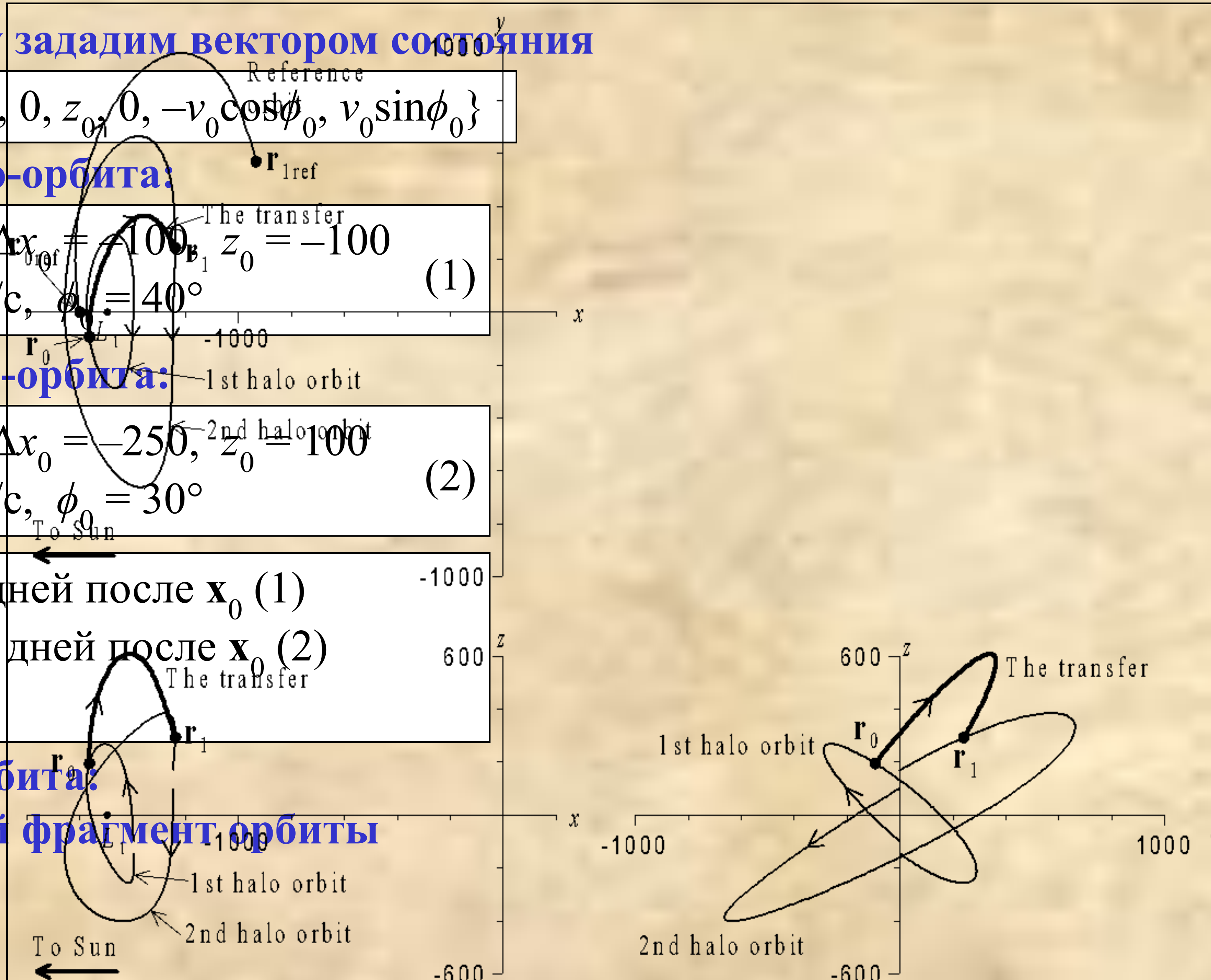
Первая гало-орбита:

$$x_L = -1500,\ \Delta x_0 = -100,\ z_0 = -100$$
$$v_0 = 155.1 \text{ м/с},\ \ \phi_0 = 40° \qquad (1)$$

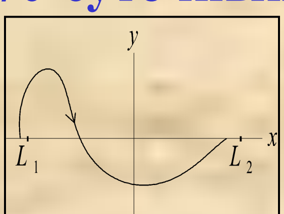
Вторая гало-орбита:

$$x_L = -1500,\ \Delta x_0 = -250,\ z_0 = 100$$
$$v_0 = 254.3 \text{ м/с},\ \ \phi_0 = 30° \qquad (2)$$

$\mathbf{r}_0$ через 80 дней после $\mathbf{x}_0$ (1)
$\mathbf{r}_1$ через 170 дней после $\mathbf{x}_0$ (2)
$T = 70$ дней



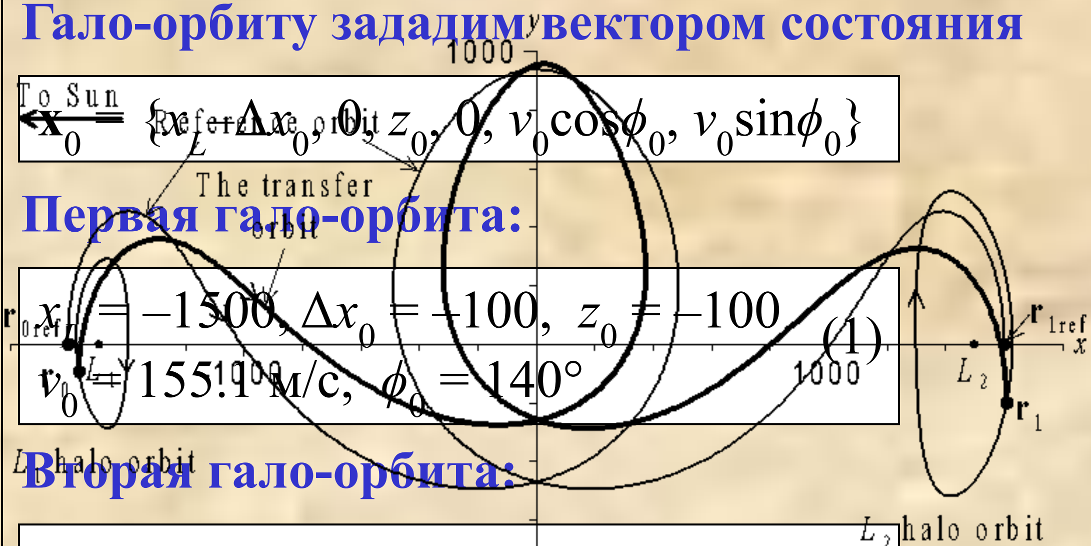
Опорная орбита:
70-суточный фрагмент орбиты



Примеры: Перелет между гало-орбитами вокруг L_1 и L_2

Гало-орбиту зададим вектором состояния

$$\mathbf{x}_0 = \{x_L - \Delta x_0,\ 0,\ z_0,\ 0,\ v_0\cos\phi_0,\ v_0\sin\phi_0\}$$

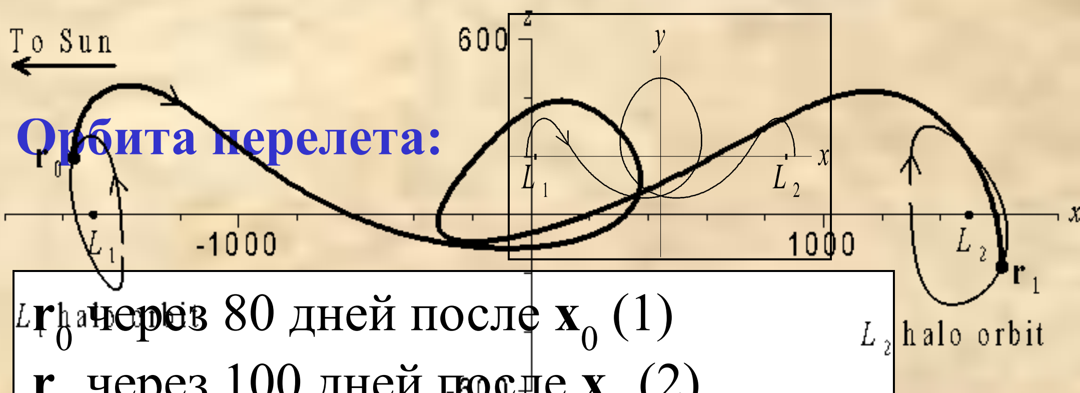


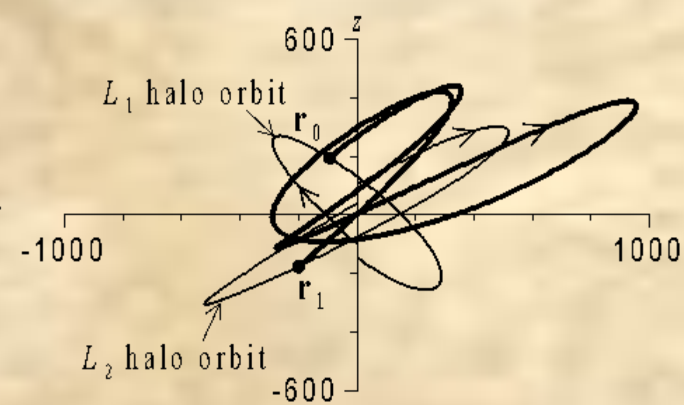
Первая гало-орбита:

$$x_L = -1500,\ \Delta x_0 = -100,\ z_0 = -100 \qquad (1)$$
$$v_0 = 155.1 \text{ м/с},\ \phi_0 = 140°$$

Вторая гало-орбита:

$$x_L = 1500,\ \Delta x_0 = 250,\ z_0 = 100 \qquad (2)$$
$$v_0 = 254.3 \text{ м/с},\ \phi_0 = 30°$$





Орбита перелета:

$\mathbf{r}_0$ через 80 дней после $\mathbf{x}_0$ (1)

$\mathbf{r}_1$ через 100 дней после $\mathbf{x}_0$ (2)

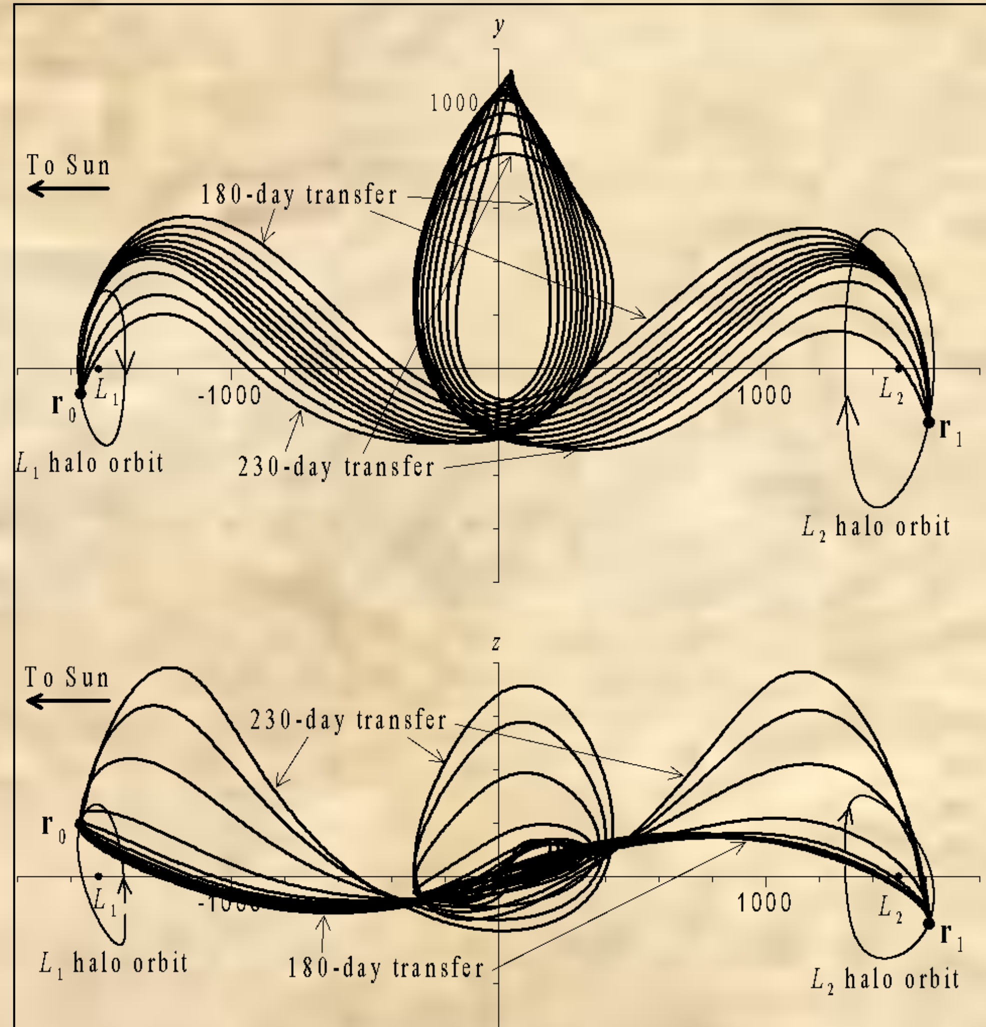
T = 220 дней

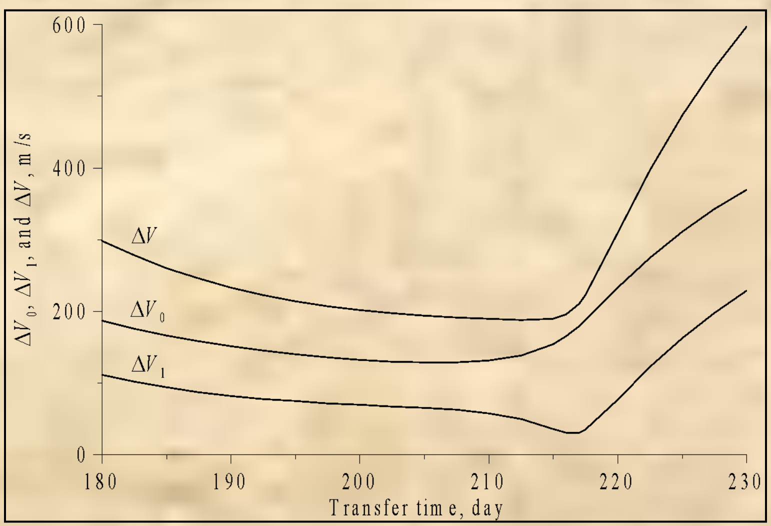
Примеры: Построение семейства орбит перелета

Нахождение орбит перелета между положениями $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ за время $T \in [T_0, T_1]$ с шагом ΔT.

Каждая из орбит служит начальным приближением для следующей орбиты

$T_0 = 180$ дней
$T_1 = 230$ дней
$\Delta T = 5$ дней





Заключение

- Опорные орбиты соответствуют перелетам между Землей и точками либрации, однако позволяют находить перелеты между любыми точками и решать другие задачи
- Предложенный метод может использоваться как для расчета траекторий полета КА, так и для численного анализа орбит в задаче трех тел
- Вместо уравнений Хилла могут использоваться точные уравнения задачи трех тел, однако упрощенная модель позволяет находить орбиты без привязки к конкретным датам
- Метод может использоваться и в других системах небесных тел с другими моделями движения

Недостатки:

- В ряде случаев низкое быстродействие
- Необходимость промежуточной орбиты в некоторых случаях
- Необходимость предварительной подготовки набора опорных орбит
- Невозможность использования гравитационных маневров у Луны в данной версии метода

Достоинства:

- Простота
- Отсутствие необходимости в начальных приближениях
- Получение орбиты заданного типа