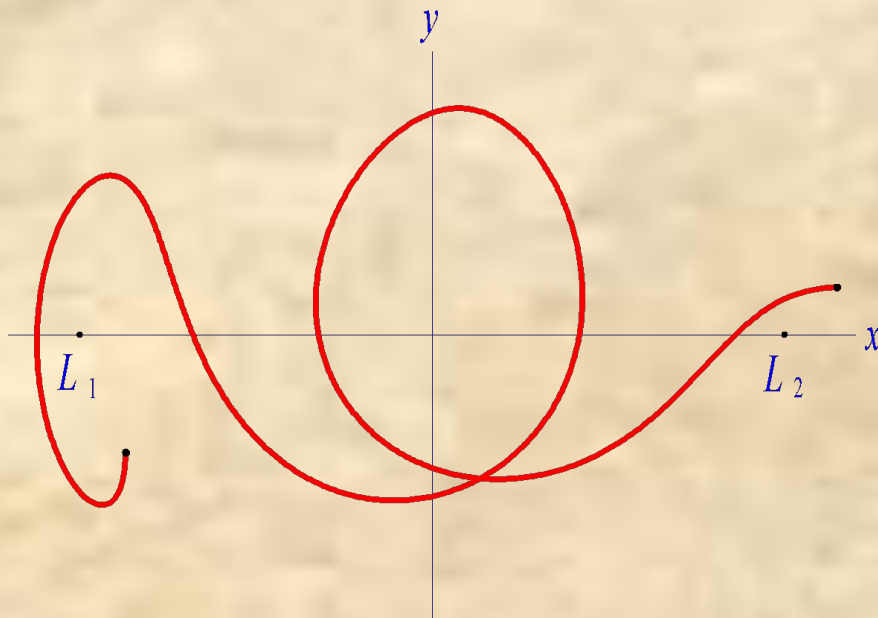


РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ХИЛЛА

А. Суханов

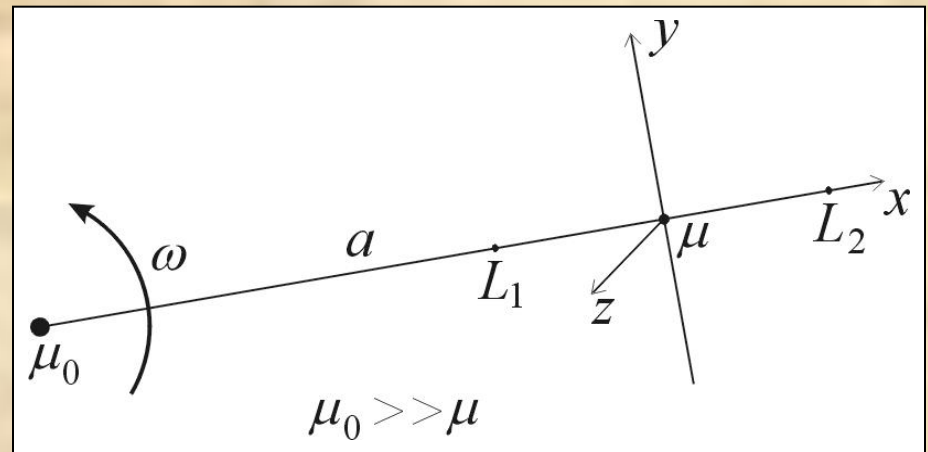


Модель движения Хилла

Уравнения движения:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{r} + 2\omega \mathbf{M} \mathbf{v} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



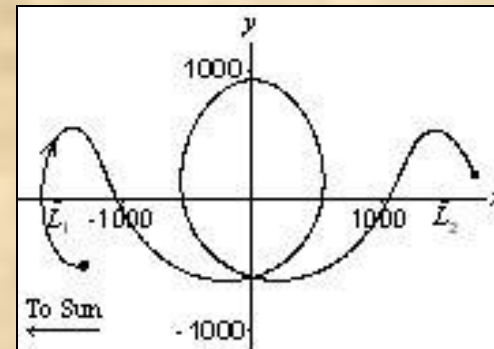
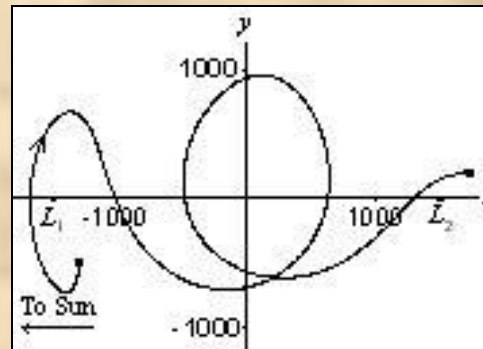
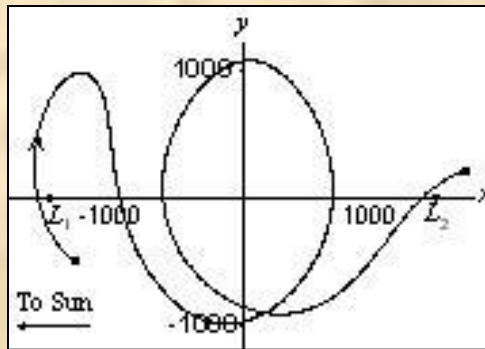
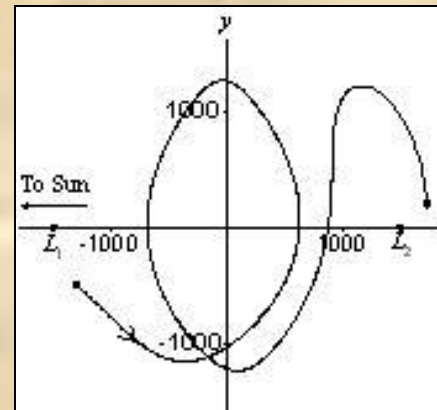
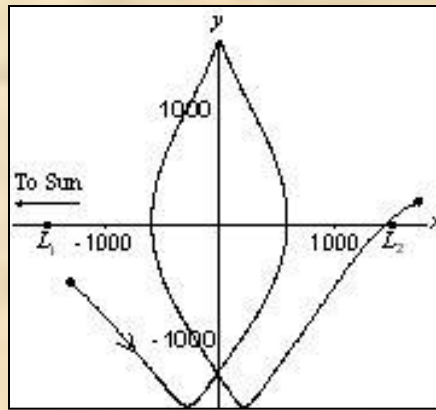
Коллинеарные точки либрации L_1 и L_2 :

$$\mathbf{r}_L = \{x_L, 0, 0\}, \quad x_L = \pm a \left(\frac{\mu}{3\mu_0} \right)^{\frac{1}{3}} = \pm 1496.56 \times 10^3 \text{ км} \quad \text{для с.-з. системы}$$

Матрица изохронных производных Φ :

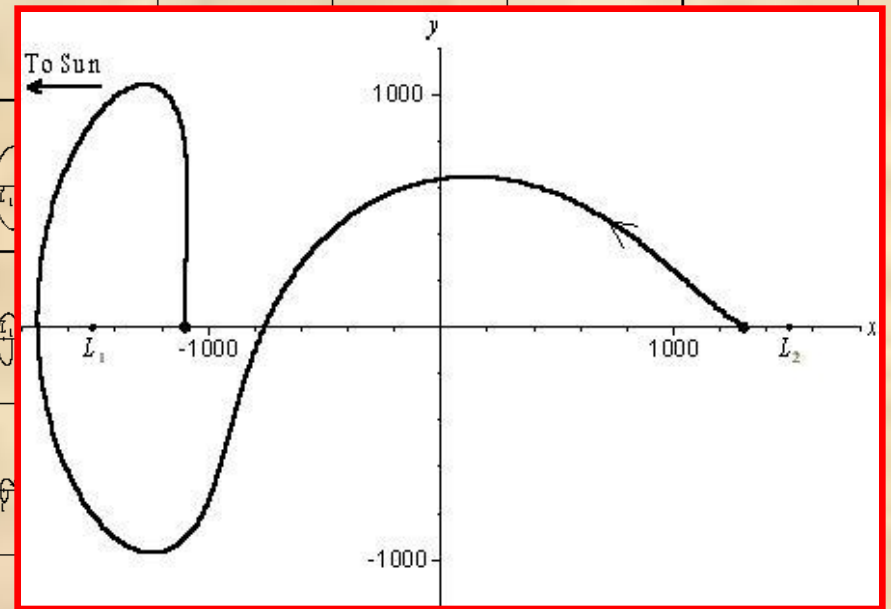
$$\dot{\Phi} = \mathbf{F} \Phi, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_3 \\ \omega^2 \mathbf{N} + \mathbf{G} & 2\omega \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \frac{\mu}{r^3} \left(3 \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}^T}{r^2} - \mathbf{I}_3 \right)$$

Краевая задача: Найти орбиту перелета между двумя (Задача Ламберта) заданными положениями в пространстве за заданное время



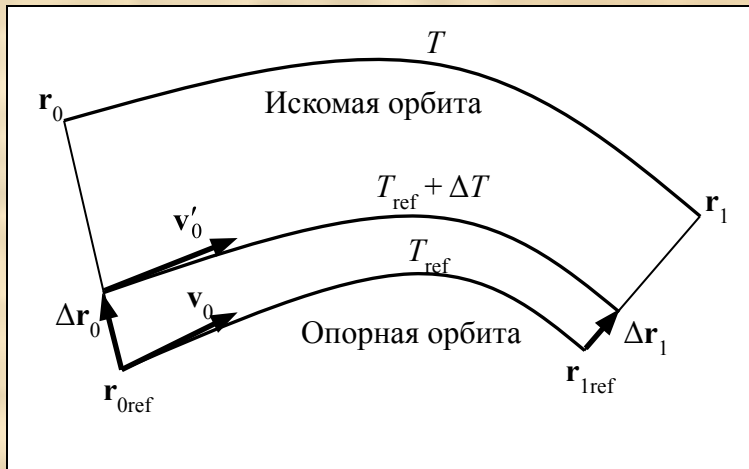
Опорные орбиты

Тип перелета	Число вилок	Тип орбиты								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
EE	0			—	—	—	—	—	—	—
EL	0					—	—	—	—	—
LE	0					—	—	—	—	—
LL	0						—	—	—	—
	1						—	—	—	—
	2							—	—	—



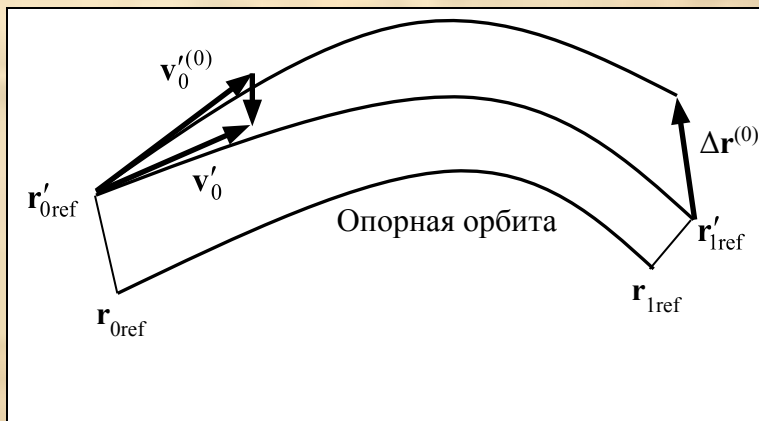
Предлагаемый метод

Шаг: задаются $\Delta \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{r}_1, \Delta T$



$$\mathbf{v}'_0{}^{(0)} = \mathbf{v}_0 + \Phi_{12}^{-1}(\Delta \mathbf{r}_1 - \Phi_{11} \Delta \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_1 \Delta T)$$

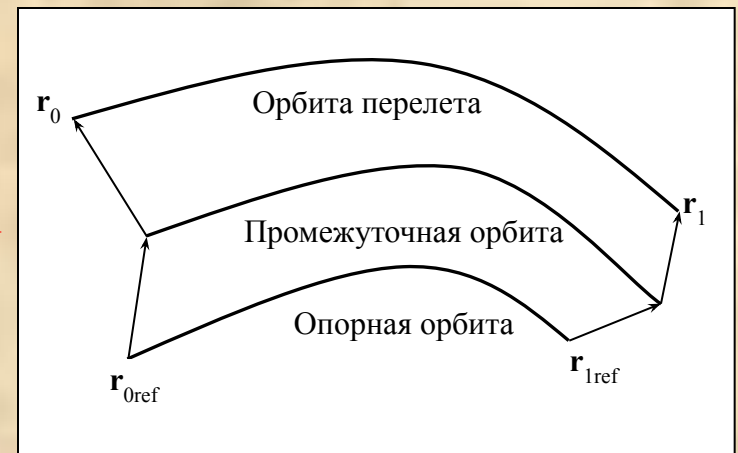
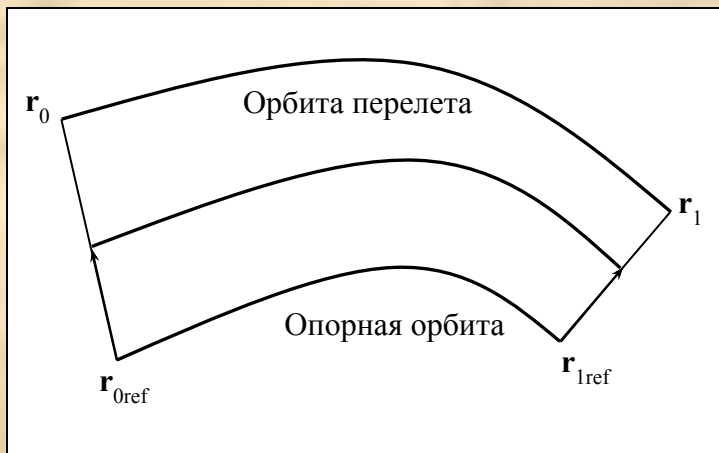
Коррекция методом Ньютона



$$\mathbf{v}'_0{}^{(n+1)} = \mathbf{v}'_0{}^{(n)} - \left(\Phi_{12}^{(n)} \right)^{-1} \Delta \mathbf{r}^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

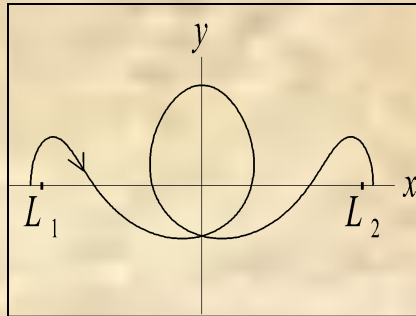
Предложенный метод не приводит к искомому решению, если:

- Перелет данного типа между заданными положениями невозможен
- Перелет данного типа за заданное время невозможен
- Орбита перелета данного типа между заданными положениями за заданное время существует, однако предложенная процедура не обеспечивает сходимость к этой орбите



Примеры: Перелет между двумя заданными положениями за заданное время

Тип:



$$\mathbf{r}_0 = \{-1400, -800, 300\}$$

$$\mathbf{r}_1 = \{1800, -500, -200\}$$

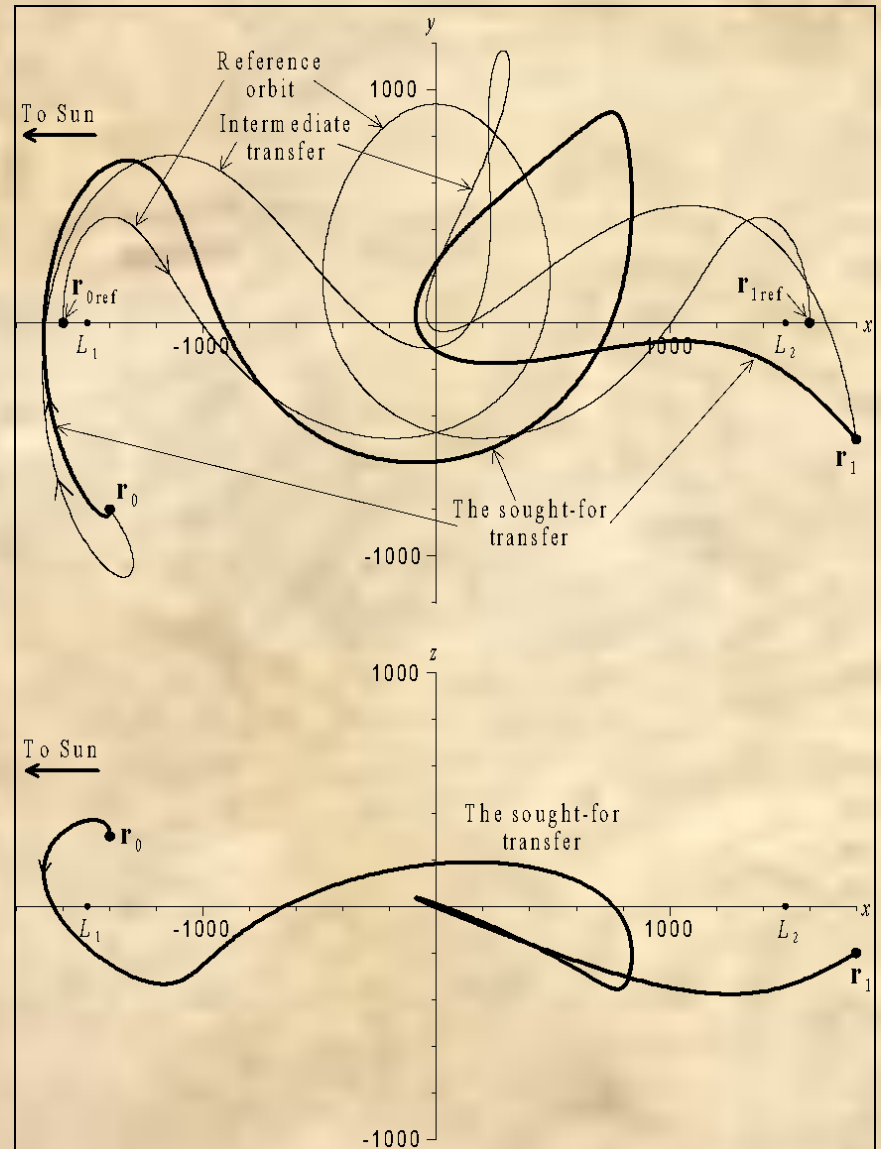
$$T = 300 \text{ дней}$$

Промежуточная орбита:

$$\mathbf{r}_0 = \{-1400, -800, 0\}$$

$$\mathbf{r}_1 = \{1800, -500, 0\}$$

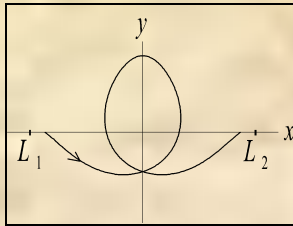
$$T = 260 \text{ дней}$$



Примеры: Построение периодической орбиты

Найти плоскую орбиту вокруг Земли с периодом 5-6 месяцев, проходящую через точку $\{-200, 1200, 0\}$

Опорная орбита:



$T = 330$ дней

$$1. \mathbf{r}_0 = \{-200, 1200, 0\}$$

$$\mathbf{r}_1 = \{200, 1200, 0\}$$

$$T = 300 \text{ дней}$$

$$2. T = 330 \text{ дней}$$

$$3. \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \{-200, 1200, 0\}$$

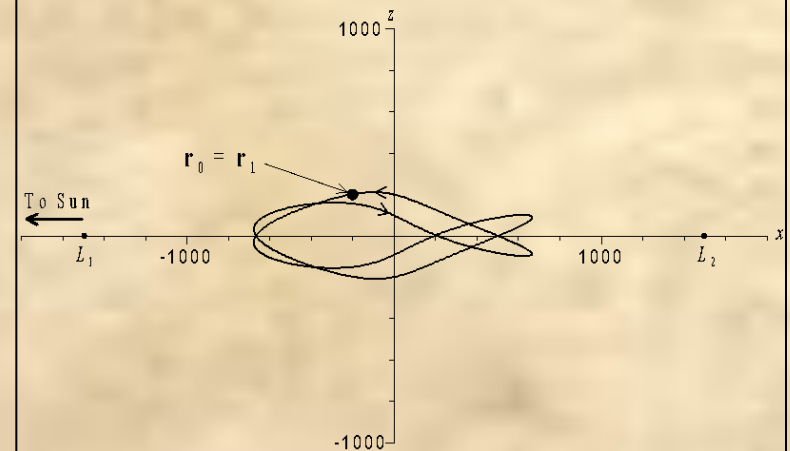
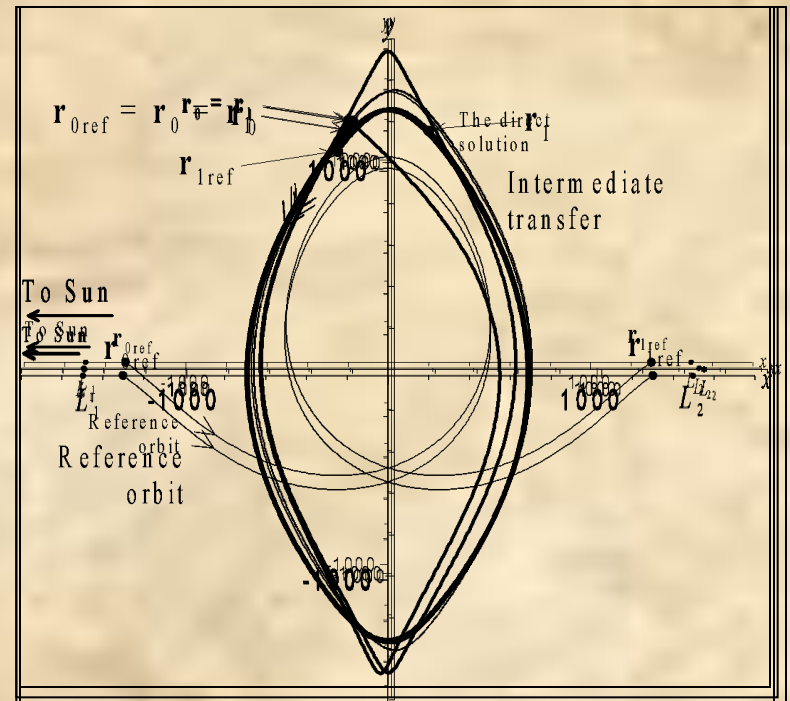
$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1$$

$$P = 167.36 \text{ дней}$$

$$4. \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \{-200, 1200, 200\}$$

$$\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$$

$$P \approx 340 \text{ дней}$$



Примеры: Построение гало-орбиты

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \{x_{L_1} - 200, 0, 0\}$$

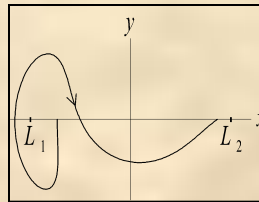
$$= \{-1296.56, 0, 0\}$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1$$

$P \approx 180$ дней

Опорная орбита:

180-суточный фрагмент орбиты



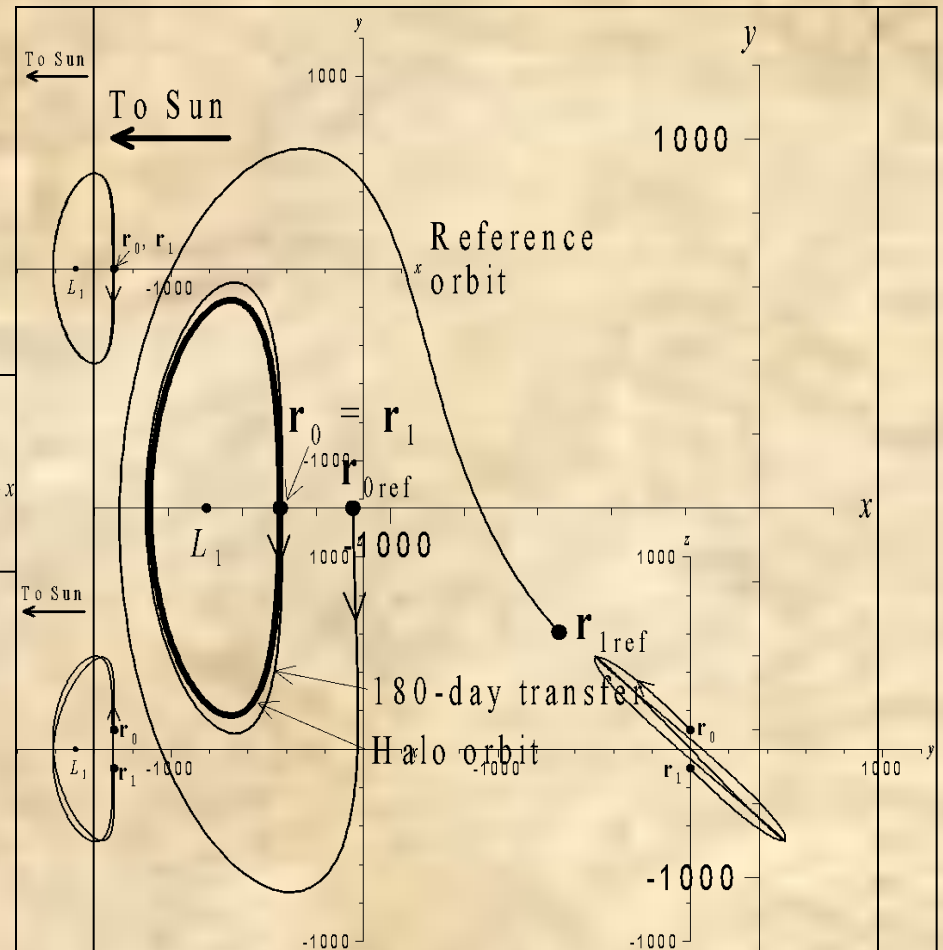
$$P = 178.295 \text{ дней}$$

Пространственная гало-орбита:

$$\mathbf{r}_0 = \{-1296.56, 0, 100\}$$

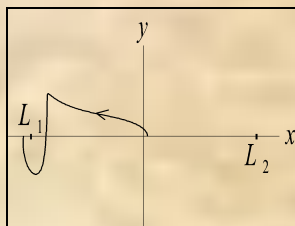
$$\mathbf{r}_1 = \{-1296.56, 0, -100\}$$

$$T_{\text{ref}} = 2P, T = 358 \text{ дней}$$



Примеры: Перелет Земля – гало-орбита

Опорная орбита:



$$\mathbf{r}_0 = \{7, 0, 0\}$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-1350, 800, 0\}$$

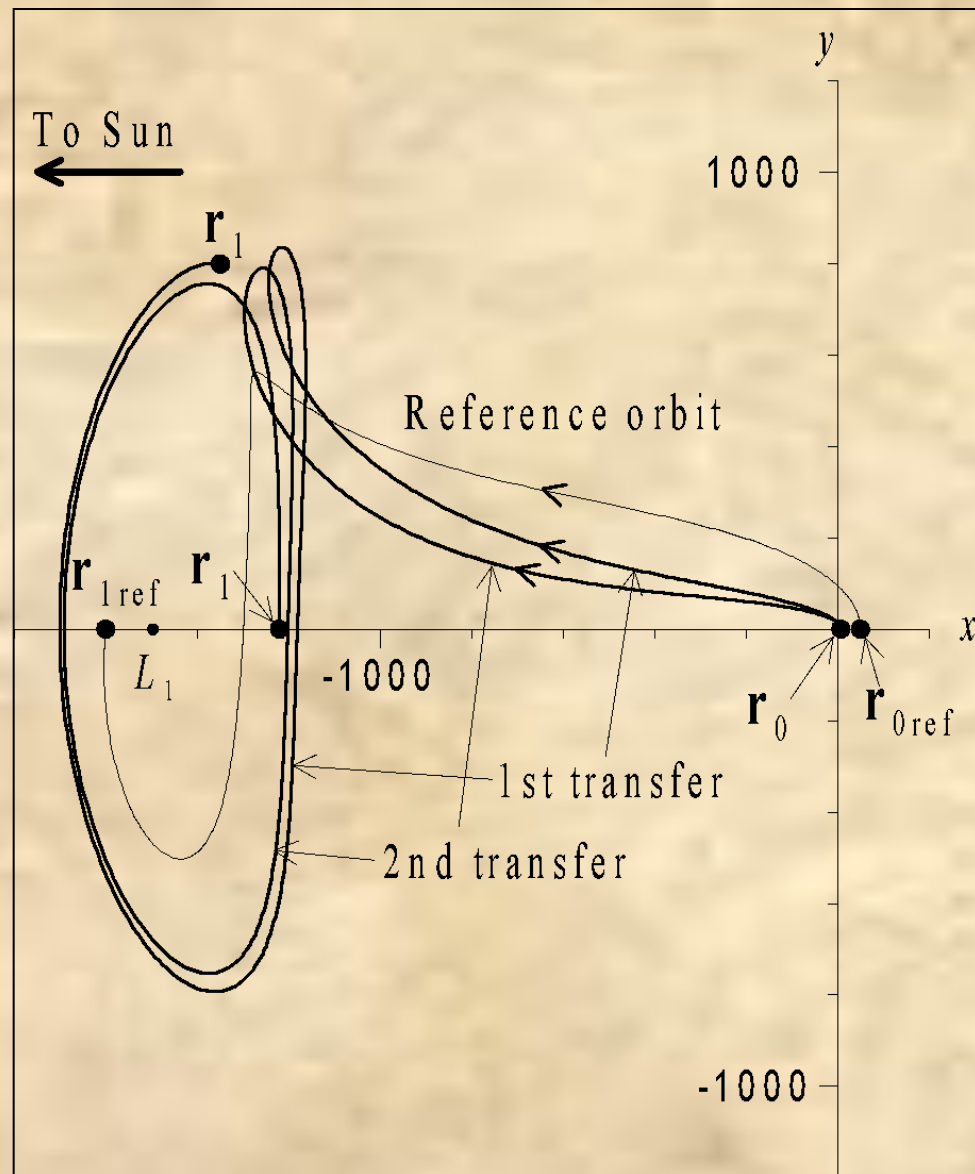
$$T = 235 \text{ дней}$$

Затем:

$$\mathbf{r}_1 = \{-1220, 0, 0\}$$

$$T = 280 \text{ дней}$$

И т.д.



Примеры: Перелет между гало-орбитами вокруг L_1

Гало-орбиту зададим вектором состояния

$$\mathbf{x}_0 = \{x_L - \Delta x_0, 0, z_0, 0, -v_0 \cos \phi_0, v_0 \sin \phi_0\}$$

Первая гало-орбита:

$$\begin{aligned} x_L &= -1500, \Delta x_0 = 100, z_0 = -100 \\ v_0 &= 155.1 \text{ м/с}, \phi_0 = 40^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

Вторая гало-орбита:

$$\begin{aligned} x_L &= -1500, \Delta x_0 = -250, z_0 = 100 \\ v_0 &= 254.3 \text{ м/с}, \phi_0 = 30^\circ \end{aligned} \quad (2)$$

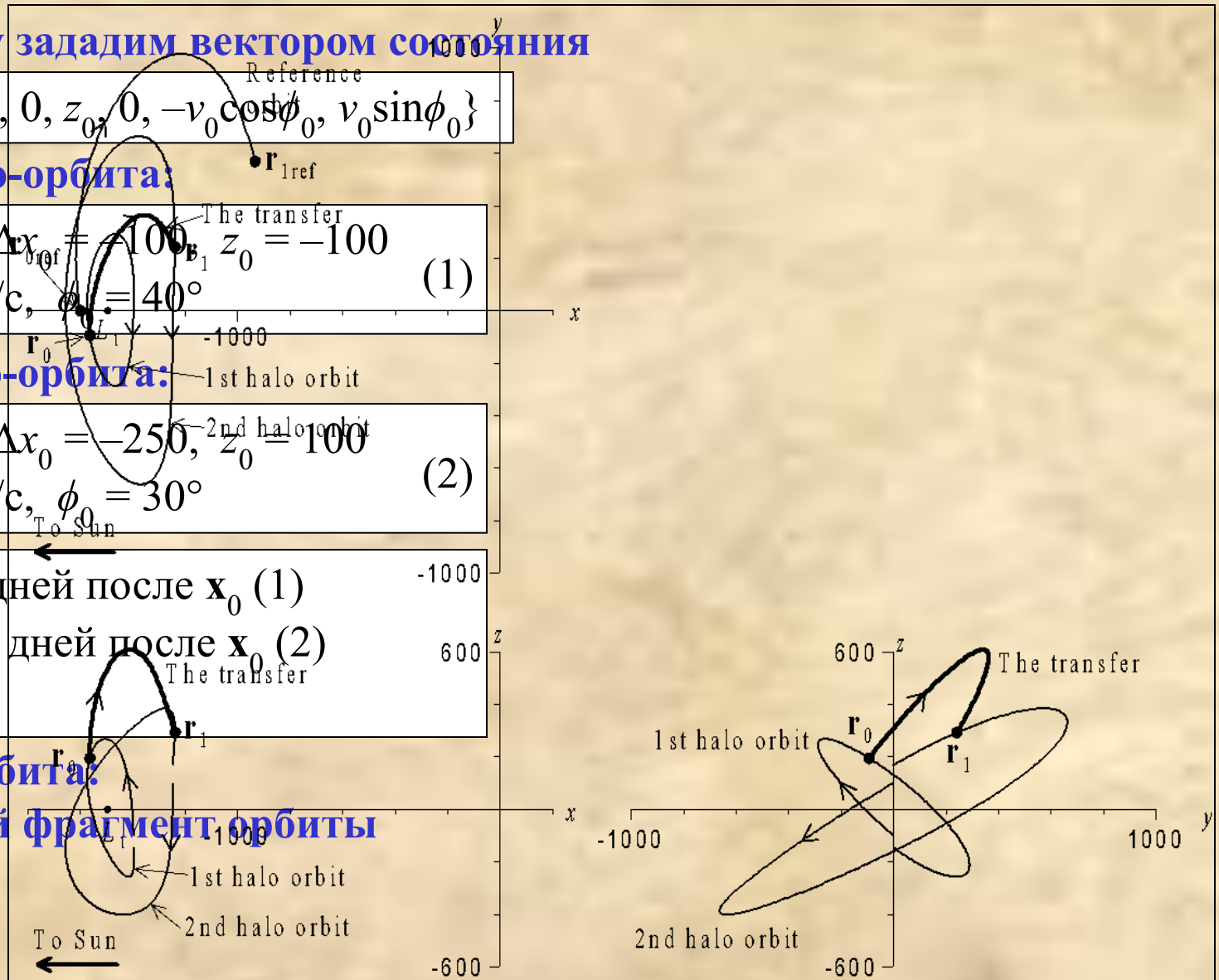
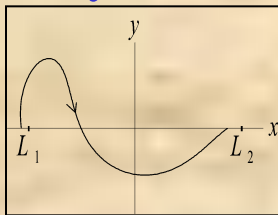
\mathbf{r}_0 через 80 дней после \mathbf{x}_0 (1)

\mathbf{r}_1 через 170 дней после \mathbf{x}_0 (2)

$T = 70$ дней

Опорная орбита:

70-суточный фрагмент орбиты



Примеры: Перелет между гало-орбитами вокруг L_1 и L_2

Гало-орбиту зададим вектором состояния

$$\mathbf{x}_0 = \left\{ x_L, \Delta x_0, \text{Orbit } z_0, 0, v_0 \cos \phi_0, v_0 \sin \phi_0 \right\}$$

Первая гало-орбита:

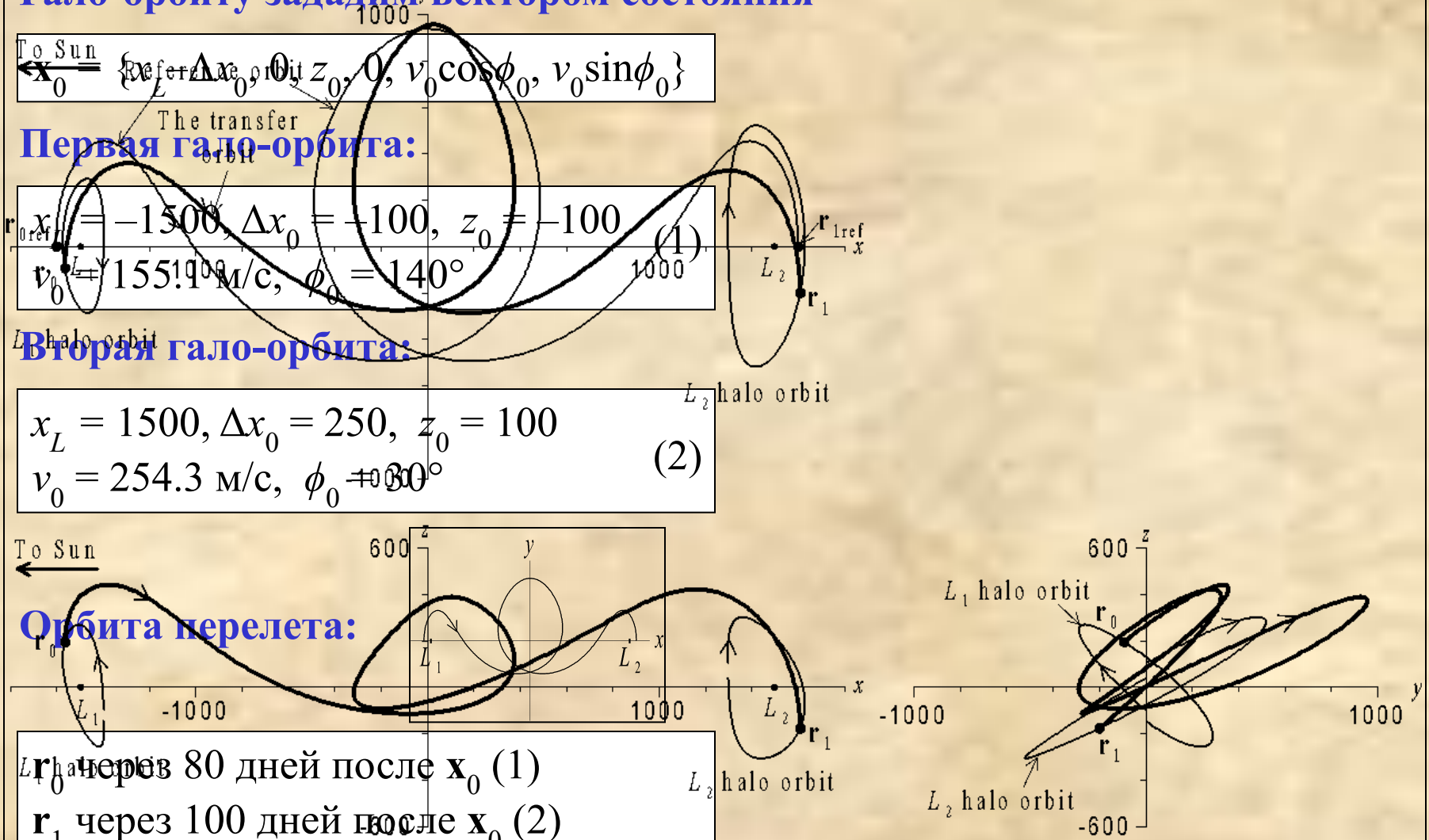
$$\begin{aligned} x_L &= -1500, \Delta x_0 = -100, z_0 = -100 \\ v_0 &= 155.1 \text{ М/с}, \phi_0 = 140^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

Вторая гало-орбита:

$$\begin{aligned} x_L &= 1500, \Delta x_0 = 250, z_0 = 100 \\ v_0 &= 254.3 \text{ м/с}, \phi_0 = 30^\circ \end{aligned} \quad (2)$$

Орбита перелета:

\mathbf{r}_0 через 80 дней после \mathbf{x}_0 (1)
 \mathbf{r}_1 через 100 дней после \mathbf{x}_0 (2)
 $T = 220$ дней

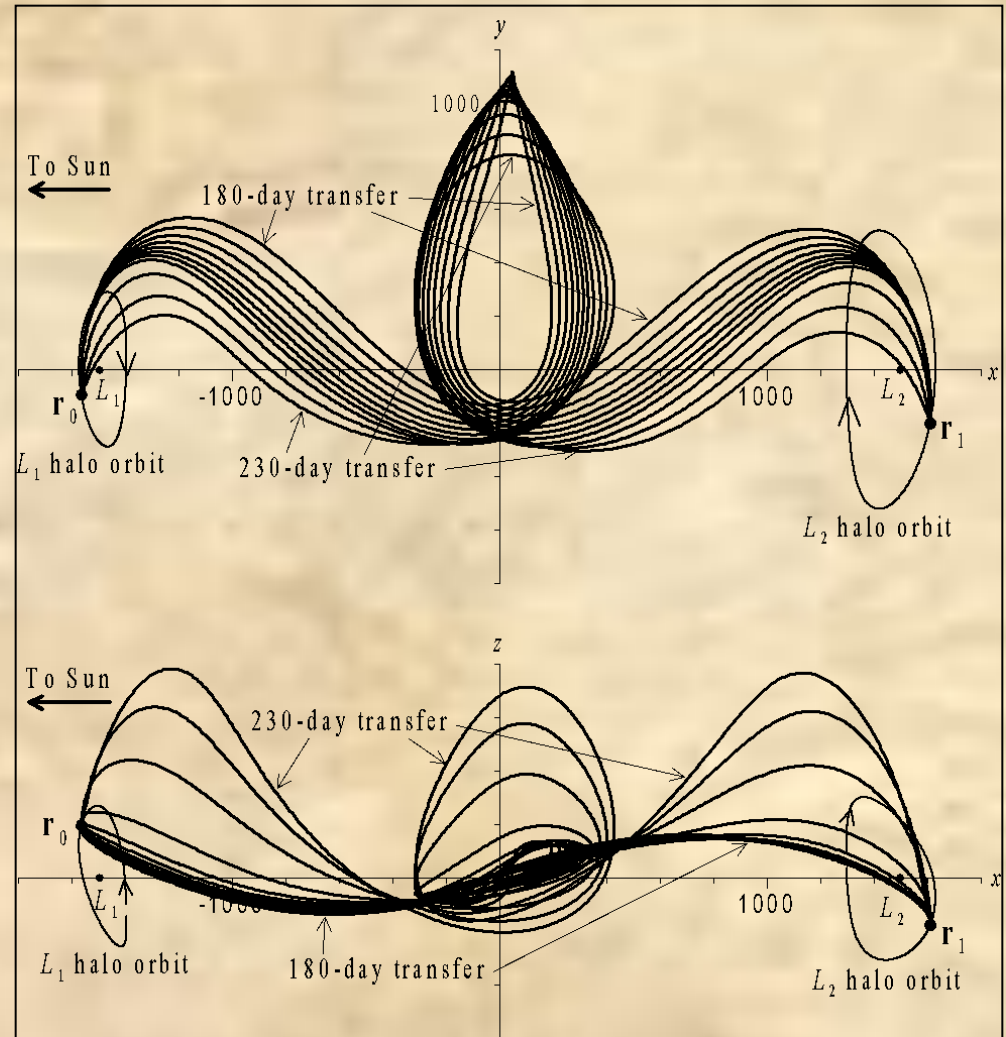
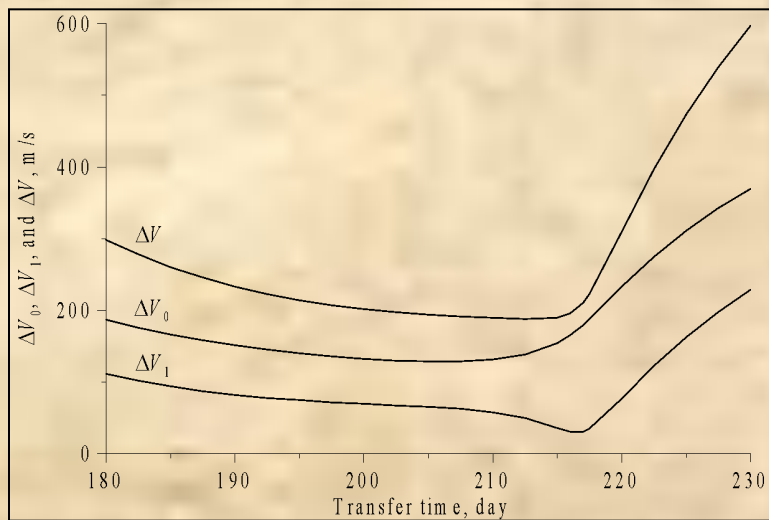


Примеры: Построение семейства орбит перелета

Нахождение орбит перелета между положениями r_0 и r_1 за время $T \in [T_0, T_1]$ с шагом ΔT .

Каждая из орбит служит начальным приближением для следующей орбиты

$T_0 = 180$ дней
 $T_1 = 230$ дней
 $\Delta T = 5$ дней



Заключение

- **Опорные орбиты соответствуют перелетам между Землей и точками либрации, однако позволяют находить перелеты между любыми точками и решать другие задачи**
- **Предложенный метод может использоваться как для расчета траекторий полета КА, так и для численного анализа орбит в задаче трех тел**
- **Вместо уравнений Хилла могут использоваться точные уравнения задачи трех тел, однако упрощенная модель позволяет находить орбиты без привязки к конкретным датам**
- **Метод может использоваться и в других системах небесных тел с другими моделями движения**

Недостатки:

- **В ряде случаев низкое быстродействие**
- **Необходимость промежуточной орбиты в некоторых случаях**
- **Необходимость предварительной подготовки набора опорных орбит**
- **Невозможность использования гравитационных маневров у Луны в данной версии метода**

Достоинства:

- **Простота**
- **Отсутствие необходимости в начальных приближениях**
- **Получение орбиты заданного типа**