БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра уравнений математической физики

Ходос Светлана Петровна

СИНГУЛЯРНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАДКИХ И РАЗРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Кандидатская диссертация

Руководитель:
профессор кафедры уравнений
математической физики,
доктор физ.-мат. наук
ЛОМОВЦЕВ Федор Егорович

Минск, 2010

Вы
ход

СОДЕРЖАНИЕ

- **АКТУАЛЬНОСТЬ**
- **ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ**
- **ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ**
- **ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ**
- **НУЧНАЯ ГИПОТЕЗА**
- **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**
- **НАУЧНАЯ НОВИЗНА**
- **ПОЛОЖЕНИЯ ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ**

Вы
ход

АКТУАЛЬНОСТЬ

В теории уравнений с частными производными особое место занимают вырождающиеся и сингулярные гиперболические уравнения второго порядка. Большинство вырождающихся уравнений сводится к сингулярным. Абстрактной моделью таких уравнений является обобщенное уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Нестационарные процессы акустики, вибрации, упругости и т.д. при гладко и резко изменяющимися граничными режимами и их типами моделируются обобщенными ДОУ Эйлера-Пуассона-Дарбу с переменными областями определения гладких и разрывных операторов и сингулярными гиперболическими уравнениями в частных производных с гладкими и разрывными коэффициентами в уравнениях .

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ:

- ✔Разработка новых технических приемов, обобщающих известный метод энергетических неравенств исследования дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения, на сингулярные гиперболические дифференциально-операторные уравнения

- ✔Доказательство существования, единственности и устойчивости сильных решений обобщенного ДОУ Эйлера-Пуассона-Дарбу с переменными областями определения гладких и разрывных операторов и сингулярных гиперболических уравнений в частных производных с гладкими и разрывными коэффициентами

ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ:

Сингулярные гиперболические дифференциально-операторные уравнения с переменными областями определения

ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ:

Корректность задачи Коши для сингулярных гиперболических дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения операторных коэффициентов

НУЧНАЯ ГИПОТЕЗА:

Пусть *H*-гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. На ограниченном интервале $]0,T[\subset R$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\frac{B(t)}{t}\frac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)+B_1(t)\frac{du(t)}{dt}+A_1(t)u(t)=f(t),\ t\in\,]0,T[, \qquad (1),$$

$$u\big|_{t=0}=0,\quad \frac{du}{dt}\Big|_{t=0}=0 \qquad (2),$$

где $f(t)$ и $u(t)$ функции переменной *t* со значениями в *H* и $A(t)$ – линейные самосопряженные неограниченные операторы в *H* с зависящими от *t* областями определения $D(A(t)),\ t\in[0,T]$, $B(t)$ – замкнутые операторы в *H* с зависящими от *t* областями определения $D(B(t)),\ t\in[0,T]$.

Вы
ход

Предполагаем, что если операторы $A(t)$, $B(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t)$ удовлетворяют условиям А1-В3, тогда рассматриваемая задача Коши корректна

А1. При каждом $t \in [0,T]$ для операторов $A(t)$ выполняется оценка

$$\left(A(t)u,u\right) \ge c_1 |u|^2, \quad \forall u \in D\left(A(t)\right) \quad c_1 > 0$$

А2. Обратные операторы $A^{-1}(t) \in B\left(\left[0,T\right], L(H)\right)$ операторов $A(t)$ сильно непрерывны по t в H и при всех $t \in [0,T]$ имеют в H сильную производную, которая удовлетворяет неравенству

$$-\left((dA^{-1}(t)/dt)g,g\right) \le c_2\left(A^{-1}(t)g,g\right) \quad \forall g \in H, \quad c_2 \ge 0.$$

А3. При почти всех $t \in [0,T]$ операторы $dA^{-1}(t)/dt$ имеют в H ограниченную сильную производную $d^2A^{-1}(t)/dt^2 \in L_\infty\left(]0,T[, L(H)\right)$, для которой

$$\left|\left((d^2A^{-1}(t)/dt^2)g,v\right)\right| \le c_3|g|\left(A^{-1}(t)v,v\right)^{1/2} \quad \forall g,v \in H, \quad c_3 \ge 0.$$

Вы
ход

B1. При каждом $t \in [0,T]$ для операторов $B(t)$ выполняется оценка

$$-\mathrm{Re}\big(B(t)u,u\big) \le c_4 t|u|^2 \quad \forall u \in D\big(B(t)\big), \quad c_4 \ge 0$$

B2. При почти всех t справедливы неравенства

$$\big|B_1(t)u\big| \le c_5|u|, \quad \big|A_1(t)u\big| \le c_6\big|A^{1/2}(t)u\big| \quad \forall u \in D\big(A(t)\big), \quad c_5, c_6 \ge 0,$$

где $A^{1/2}(t)$ – квадратный корень операторов $A(t)$.

B3. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $B(t)$ подчинены операторам $A^{1/2}(t)$ и

$$-\mathrm{Re}\big(B(t)u, A(t)u\big) \le c_7 t\big(A(t)u,u\big) \quad \forall u \in D(A(t)), \quad c_7 \ge 0.$$

В H при всех t ограничены операторы $B(t)(dA^{-1}(t)/dt)$ и

$$\Big|\Big(B(t)\big(dA^{-1}(t)/dt\big)g,h\Big)\Big| \le c_8 t|g|\Big(A^{-1}(t)h,h\Big)^{1/2} \quad \forall g,h \in H, \quad c_8 \ge 0$$

НАУЧНАЯ НОВИЗНА:

- ✔Усовершенствованы технические приемы исследования дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения
- ✔Получены новые и имеющие большое научное значение результаты в теории дифференциально-операторных уравнений

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ:

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Теорема 1. *Если выполняются условия A1, A2, B1, B2 и множество* $D(L)$ *плотно в* **H** *, то имеет место следующее неравенство*

$$\|u\|_E \le c_9 \left\|\overline{L}u\right\|_F \quad \forall u \in D\left(\overline{L}\right), \quad c_9 = 2Exp\left(c_6T + \max\{c_2, 2(c_4 + c_5)\}T\right)$$

Вы
ход

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Теорема 2. *Если выполняются условия A1-A3 и B1-B2, тогда для каждого* $f \in F$ *сильное решение* $u \in E$ *задачи Коши (1), (2) существует, единственно и*

$$\left\| u \right\|_E \le c_9 \left\| f \right\|.$$

Вы
ход

В области $G =]0,l[\times]0,T[$ переменных x и t рассматривается сингулярное гиперболическое уравнение в частных производных

$$u_{tt} + t^{-1}\left(b_1(x)u_x + b_2(x)u\right)_t - \left(a(x)u_x\right)_x + b_3(x,t)u_t + a_1(x,t)u_x + a_2(x,t)u = f(x,t)\ (1^*)$$

с переменными по времени граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \beta(t)u(l,t), \quad t \in [0,T], \quad (2^*)$$

и однородными начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \quad u_x(x,0) = 0, \quad x \in [0,l]. \quad (3^*)$$

Вы
ход

Гильбертовым пространством H будет $L_2(0,l)$.

Уравнение (1*) является частным случаем уравнения (1) для каждого $t\in[0,T]$ при следующих операторах:

$$A(t)u=-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad A(t):L_2(0,l)\supset D(A(t))\to L_2(0,l),$$

$$D(A(t))=\left\{u\in W_2^2(0,l):u\Big|_{x=0}=0,\left[u_x+\beta(t)u\right]\Big|_{x=l}=0\right\},$$

,

$$B(t)u=b_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(x)u, D\left(B(t)\right)=W_2^1(0,l),$$

$$B_1(t)u=b_3(x,t)u, D\left(B_1(t)\right)=L_2(0,l),$$

$$A_1(t)u=a_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x,t)u, D\left(A_1(t)\right)=W_2^1(0,l).$$

Здесь коэффициенты уравнения $a(x) \geq a_0 > 0$, $\forall x \in [0,l]$,

$b_1(0) = 0, \quad b_1(l) \geq 0, \qquad a(x),\ b_1(x) \in C^{(1)}\left[0,l\right], \quad b_2(x) \in C^{(2)}\left[0,l\right],$

$b_3(x,t), a_i(x,t) \in C\left(\overline{G}\right), i = 1,2$, и граничных условий

$\beta(t) \in C^{(2)}\left[0,l\right]$ и $0 \leq \beta(t) \leq c_{10} t^{\alpha}, \alpha \geq 1, \left|\beta'(t)\right| \leq c_{11} t^{\gamma}, \gamma \geq 1, \quad t \in [0,T]$

$$a'(x)b_2'(x) + a(x)b_2''(x) \leq 0, \qquad a(x)b_1'(x) - b_1(x)a'(x) + 2a(x)b_2(x) \geq 0,$$

$2b_2(x) - b_1'(x) \geq 0, \quad 2\beta(t)b_2(l) + b_2'(l) \geq 0$ для всех $\left\{x,t\right\} \in \overline{G}$.

Вы
ход

Теорема 3. ***Если коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют указанным выше требованиям, то для любой функции*** $f \in L_2(G)$ ***начально-краевая задача (1*)-(3*) имеет единственное сильное решение*** $u \in E(G)$***, для которого справедлива оценка***

$$\int_G |u_t(x,t)|^2 dxdt + \int_0^T \left\| A^{1/2}(t)u \right\| dt \le c_9 \int_G |f(x,t)|^2 dxdt,\ c_9 > 0,$$

где гильбертово пространство $E(G)$ ***– замыкание множества всех функций*** $u \in W_2^2(G)$***, удовлетворяющих условиям (2) и (3), по норме левой части этой оценки и выражение***

$$\left\| A^{1/2}(t)u \right\|^2 = \left(1+\beta(t)\right)^{-1} a(l)\left(|u_x(l)|^2 + \beta(t)|u(l)|^2\right) + \int_0^l a(x)|u_x|^2 dx.$$

Вы
ход

ПОЛОЖЕНИЯ ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ:

- ✔ Доказательство теорем существования, единственности и устойчивости сильных решений обобщенного ДОУ Эйлера-Пуассона-Дарбу с переменными областями определения гладких и разрывных операторов и сингулярных гиперболических уравнений с гладкими и разрывными коэффициентами

- ✔ Установление корректности разрешимости новых смешанных задач для сингулярных гиперболических уравнений в частных производных с зависящими от времени граничными условиями

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Вы
ход