Позиционные и непозиционные системы счисления

Одно и то же число можно представить по-разному.

Например, число четыре можно представить в виде слова “четыре”, изобразить его по-древнеримски – IV, или договориться, что число обозначается соответствующим количеством палочек – | | | |.

Способ представления чисел называется системой счисления.

Системы счисления бывают двух видов – позиционные, в которых “вклад” каждой цифры в число зависит от ее номера разряда (позиции) в записи числа, и непозиционные – все остальные.

Примером позиционной системы является общепринятая десятичная система, непозиционной – римская.

Представление целых неотрицательных чисел

В позиционных системах значение записи целого числа определяется по следующему правилу: пусть $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ — запись числа A, a_i – цифры, тогда

$A = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0$ (1),

где p — целое число большее 1, которое называется основанием системы счисления .

Для того, чтобы при заданном p любое неотрицательное целое число можно было бы записать по формуле (1) и притом единственным образом, числовые значения различных цифр должны быть различными целыми числами, принадлежащими отрезку от 0 до p-1.

Пример: 1) Десятичная система p = 10

цифры: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

число $3635 = 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

2) Троичная система p = 3

цифры: 0,1,2

число $121_3 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$

Замечание: нижним индексом в записи числа обозначается основание системы счисления, в которой записано число. Для десятичной системы индекс можно не писать.

Представление отрицательных и дробных чисел

Во всех позиционных системах для записи отрицательных чисел так же как и в десятичной системе используется знак ‘–‘.

Для отделения целой части числа от дробной используется запятая.

Значение записи $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$, $a_{-1} a_{-2} \ldots a_{m-2} a_{m-1} a_m$ числа A определяется по формуле, являющейся обобщением формулы (1):

$$A = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0 + a_{-1} \cdot p^{-1} + a_{-2} \cdot p^{-2} + \ldots + a_{m-2} \cdot p^{-(m-2)} + a_{m-1} \cdot p^{-(m-1)} + a_m p^{-m} \quad (2),$$

Пример:

$36{,}6 = 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$

Перевод чисел из произвольной системы счисления в десятичную

Следует понимать, что при переводе числа из одной системы счисления в другую количественное значение числа не изменяется, а меняется только форма записи числа, так же как при переводе названия числа, например, с русского языка на английский.

Перевод чисел из произвольной системы счисления в десятичную выполняется непосредственным вычислением по формуле (1) для целых и формуле (2) для дробных чисел.

Перевод чисел из десятичной системы счисления в произвольную

Перевести число из десятичной системы в систему с основанием p – значит найти коэффициенты в формуле (2). Иногда это легко сделать простым подбором.

Например, пусть нужно перевести число 23,5 в восьмеричную систему. Нетрудно заметить, что

$23{,}5 = 16+7+0{,}5 = 2\cdot 8+7+4/8 = 2\cdot 8^1+7\cdot 8^0+4\cdot 8^{-1} = 27{,}4_8$.

Понятно, что не всегда ответ столь очевиден.

В общем случае применяется способ перевода отдельно целой и дробной частей числа.

Для перевода целых чисел применяется следующий алгоритм (полученный на основании формулы (1)):

1. Найдем частное и остаток от деления числа на p. Остаток будет очередной цифрой a_i (j=0,1,2 …) записи числа в новой системе счисления.
2. Если частное равно нулю, то перевод числа закончен, иначе применяем к частному пункт 1.

<u>Замечание 1.</u> Цифры a_i в записи числа нумеруются справа налево.

<u>Замечание 2</u>. Если p>10, то необходимо ввести обозначения для цифр с числовыми значениями, большими или равными 10.

<u>Пример:</u>

Перевести число 165 в семеричную систему счисления.

165:7 = 23 (остаток 4) => $a_0 = 4$

23:7 = 3 (остаток 2) => $a_1 = 2$

3:7 = 0 (остаток 3) => $a_2 = 3$

Выпишем результат: $a_2a_1a_0$, т.е. 324_7.

Выполнив проверку по формуле (1), убедимся в правильности перевода:

$324_7=3\cdot 7^2+2\cdot 7^1+4\cdot 7^0=3\cdot 49+2\cdot 7+4 = 147+14+4 = 165$.

Для перевода дробных частей чисел применяется алгоритм, полученный на основании формулы (2):

1. Умножим дробную часть числа на p.
2. Целая часть результата будет очередной цифрой a_m (m = –1,–2, –3 …) записи числа в новой системе счисления. Если дробная часть результата равна нулю, то перевод числа закончен, иначе применяем к ней пункт 1.

Замечание 1. Цифры a_m в записи числа располагаются слева направо в порядке возрастания абсолютного значения m.

Замечание 2. Обычно количество дробных разрядов в новой записи числа ограничивается заранее. Это позволяет выполнить приближенный перевод с заданной точностью. В случае бесконечных дробей такое ограничение обеспечивает конечность алгоритма.

Пример 1:

Перевести число 0,625 в двоичную систему счисления.

0,625·2 = 1,25 (целая часть 1) => a_{-1} =1

0,25·2 = 0,5 (целая часть 0) => a_{-2} = 0

0,5·2 = 1,00 (целая часть 1) => a_{-3} = 1

Итак, $0{,}625_{10} = 0{,}101_2$

Выполнив проверку по формуле (2), убедимся в правильности перевода:

$0{,}101_2=1\cdot 2^{-1}+0\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-3}=1/2+1/8 = 0{,}5+0{,}125 = 0{,}625.$

Пример 2:

Перевести число 0,165 в четверичную систему счисления, ограничившись четырьмя четверичными разрядами.

$0{,}165 \cdot 4 = 0{,}66$ (целая часть 0) => $a_{-1}=0$

$0{,}66 \cdot 4 = 2{,}64$ (целая часть 2) => $a_{-2}= 2$

$0{,}64 \cdot 4 = 2{,}56$ (целая часть 2) => $a_{-3}= 2$

$0{,}56 \cdot 4 = 2{,}24$ (целая часть 2) => $a_{-4}= 2$

Итак, $0{,}165_{10}$ » $0{,}0222_4$

Выполним обратный перевод, чтобы убедиться, что абсолютная погрешность не превышает 4^{-4}:

$0{,}0222_4 = 0 \cdot 4^{-1}+2 \cdot 4^{-2}+2 \cdot 4^{-3}+2 \cdot 4^{-4} = 2/16+2/64+2/256 = 1/8+1/32+1/128 = 21/128 = 0{,}1640625$

$|0{,}1640625–0{,}165| = 0{,}00094 < 4^{-4} = 0{,}00390625$

Перевод чисел в систему счисления с кратным основанием

Пусть p и q – основания двух систем счисления.

Будем называть эти системы системами счисления с кратными основаниями, если $p = q^n$ или $q = p^n$, где n – натуральное число.

(Так, например, системы счисления с основаниями 2 и 8 являются системами счисления с кратными основаниями.)

Пусть $p = q^n$ и требуется перевести число из системы счисления с основанием q в систему счисления с основанием p.

Разобьем целую и дробную части записи числа на группы по n последовательно записанных цифр влево и вправо от запятой. Если количество цифр в записи целой части числа не кратно n, то надо дописать слева соответствующее количество нулей. Если количество цифр в записи дробной части числа не кратно n, то нули дописываются справа.

Каждая такая группа цифр числа в старой системе счисления будет соответствовать одной цифре числа в новой системе счисления.

Пример:

Переведем 1100001,1112 в четверичную систему счисления.

Дописав нули и выделив пары цифр, получим 01100001,11102.

Теперь выполним перевод отдельно каждой пары цифр, пользуясь пунктом «*Перевод чисел из одной произвольной системы в другую*»:

$01_2=1_{10}=1_4$

$10_2=2_{10}=2_4$

$00_2=0_{10}=0_4$

$01_2=1_{10}=1_4$

$11_2=3_{10}=3_4$

$10_2=2_{10}=2_4$

Итак, $1100001{,}111_2 = 01100001{,}1110_2 = 1201{,}32_4$.

Пусть теперь требуется выполнить перевод из системы с большим основанием q, в систему с меньшим основанием p, т.е.

$q = p^n$.

В этом случае одной цифре числа в старой системе счисления соответствует n цифр числа в новой системе счисления.

Пример: Выполним проверку предыдущего перевода числа:

$1201{,}32_4 = 1100001{,}1110_2=1100001{,}111_2$

В таблице приведены значения цифр в наиболее часто используемых системах счисления.

Двоичная, восьмеричная, и шестнадцатеричная системы счисления.

В какой системе счисления лучше записывать числа – это вопрос удобства и традиций. С технической точки зрения, в ЭВМ удобно использовать двоичную систему, так как в ней для записи числа используются только две цифры 0 и 1, которые можно представить двумя легко различимыми состояниями “нет сигнала ” и “есть сигнал”.

Человеку, напротив, неудобно иметь дело с двоичными записями чисел из-за того, что они более длинные, чем десятичные и в них много повторяющихся цифр.

Поэтому, при необходимости работать с машинными представлениями чисел используют восьмеричную или шестнадцатеричную системы счисления. Основания этих систем – целые степени двойки, и поэтому числа легко переводятся из этих систем в двоичную и обратно.

В шестнадцатеричной системе есть цифры с числовыми значениями 10,11,12, 13,14,15. Для их обозначения используют первые шесть букв латинского алфавита.

Приведем таблицу чисел от 0 до 16, записанных в системах счисления с основаниями 10, 2, 8 и 16.

Число в десятичной системе счисления	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
В восьмеричной	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20
В двоичной	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
В шестнадцатеричной	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

Для записи шестнадцатеричных цифр можно использовать также строчные латинские буквы a-f.

Пример:

Переведем число

$110101001010101010100,11_2$

в шестнадцатеричную систему счисления.

Воспользуемся кратностью оснований систем счисления

$16=2^4$

Сгруппируем цифры по четыре, дописав слева и справа нужное количество нулей

$000110101001010101010100,1100_2$

сверяясь с таблицей, получим:

$1A9554,C_{16}$