

Позиционные и непозиционные системы счисления

Одно и то же число можно представить по-разному. Например, число четыре можно представить в виде слова “четыре”, изобразить его по-древнеримски – IV, или договориться, что число обозначается соответствующим количеством палочек – ||||.

Способ представления чисел называется **системой счисления**.

Системы счисления бывают двух видов – **позиционные**, в которых “вклад” каждой цифры в число зависит от ее номера разряда (позиции) в записи числа, и **непозиционные** – все остальные.

Примером позиционной системы является общепринятая десятичная система, непозиционной – римская.

Представление целых неотрицательных чисел

В позиционных системах значение записи целого числа определяется по следующему правилу: пусть $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$ — запись числа A , a_i — цифры, тогда

$$A = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0 \quad (1),$$

где p — целое число большее 1, которое называется основанием системы счисления.

Для того, чтобы при заданном p любое неотрицательное целое число можно было бы записать по формуле (1) и притом единственным образом, числовые значения различных цифр должны быть различными целыми числами, принадлежащими отрезку от 0 до $p-1$.

Пример: 1) Десятичная система $p = 10$

цифры: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

число $3635 = 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

2) Троичная система $p = 3$

цифры: 0,1,2

число $121_3 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$

Замечание: нижним индексом в записи числа обозначается основание системы счисления, в которой записано число. Для десятичной системы счисления индекс можно не писать.

Представление отрицательных и дробных чисел

Во всех позиционных системах для записи отрицательных чисел так же как и в десятичной системе используется знак '-'.
Для отделения целой части числа от дробной используется запятая.

Значение записи $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$,
 $a_{-1} a_{-2} \dots a_{m-2} a_{m-1} a_m$ числа A определяется по формуле, являющейся обобщением формулы (1):

Значение записи $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$,
 $a_{-1} a_{-2} \dots a_{m-2} a_{m-1} a_m$ числа A определяется по формуле, являющейся обобщением формулы (1):

$$A = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0 + a_{-1} \cdot p^{-1} + a_{-2} \cdot p^{-2} + \dots + a_{m-2} \cdot p^{-(m-2)} + a_{m-1} \cdot p^{-(m-1)} + a_m \cdot p^{-m} \quad (2),$$

Пример:

$$36.6 = 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$$

Перевод чисел из произвольной системы счисления в десятичную

Следует понимать, что при переводе числа из одной системы счисления в другую **количественное значение числа не изменяется**, а меняется только **форма** записи числа, так же как при переводе названия числа, например, с русского языка на английский.

Перевод чисел из произвольной системы счисления в десятичную выполняется непосредственным вычислением по формуле (1) для целых и формуле (2) для дробных чисел.

Перевод чисел из десятичной системы счисления в произвольную

Перевести число из десятичной системы в систему с основанием p – значит найти коэффициенты в формуле (2). Иногда это легко сделать простым подбором.

Например, пусть нужно перевести число 23,5 в восьмеричную систему. Нетрудно заметить, что

$$23,5 = 16 + 7 + 0,5 = 2 \cdot 8 + 7 + 4/8 = 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^{-1} = 27,4_8.$$

Понятно, что не всегда ответ столь очевиден.

В общем случае применяется способ перевода отдельно целой и дробной частей числа.

Для перевода целых чисел применяется следующий алгоритм
(полученный на основании формулы (1)):

1. Найдем частное и остаток от деления числа на p . Остаток будет очередной цифрой a_j ($j=0,1,2 \dots$) записи числа в новой системе счисления.
2. Если частное равно нулю, то перевод числа закончен, иначе применяем к частному пункт 1.

Замечание 1. Цифры a_j в записи числа нумеруются справа налево.

Замечание 2. Если $p > 10$, то необходимо ввести обозначения для цифр с числовыми значениями, большими или равными 10.

Пример:

Перевести число 165 в семеричную систему счисления.

$$165:7 = 23 \text{ (остаток 4)} \Rightarrow a_0 = 4$$

$$23:7 = 3 \text{ (остаток 2)} \Rightarrow a_1 = 2$$

$$3:7 = 0 \text{ (остаток 3)} \Rightarrow a_2 = 3$$

Выпишем результат: $a_2 a_1 a_0$, т.е. 324_7 .

Выполнив проверку по формуле (1), убедимся в правильности перевода:

$$324_7 = 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 3 \cdot 49 + 2 \cdot 7 + 4 = 147 + 14 + 4 = 165.$$

Для перевода дробных частей чисел применяется алгоритм, полученный на основании формулы (2):

1. Умножим дробную часть числа на p .
2. Целая часть результата будет очередной цифрой a_m ($m = -1, -2, -3 \dots$) записи числа в новой системе счисления. Если дробная часть результата равна нулю, то перевод числа закончен, иначе применяем к ней пункт 1.

Замечание 1. Цифры a_m в записи числа располагаются слева направо в порядке возрастания абсолютного значения m .

Замечание 2. Обычно количество дробных разрядов в новой записи числа ограничивается заранее. Это позволяет выполнить приближенный перевод с заданной точностью. В случае бесконечных дробей такое ограничение обеспечивает конечность алгоритма.

Пример 1:

Перевести число 0,625 в двоичную систему счисления.

$$0,625 \cdot 2 = 1,25 \text{ (целая часть 1)} \Rightarrow a_{-1} = 1$$

$$0,25 \cdot 2 = 0,5 \text{ (целая часть 0)} \Rightarrow a_{-2} = 0$$

$$0,5 \cdot 2 = 1,00 \text{ (целая часть 1)} \Rightarrow a_{-3} = 1$$

$$\text{Итак, } 0,625_{10} = 0,101_2$$

Выполнив проверку по формуле (2), убедимся в правильности перевода:

$$0,101_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 1/2 + 1/8 = 0,5 + 0,125 = 0,625.$$

Пример 2:

Перевести число 0,165 в четверичную систему счисления, ограничившись четырьмя четверичными разрядами.

$$0,165 \cdot 4 = 0,66 \text{ (целая часть 0)} \Rightarrow a_{-1} = 0$$

$$0,66 \cdot 4 = 2,64 \text{ (целая часть 2)} \Rightarrow a_{-2} = 2$$

$$0,64 \cdot 4 = 2,56 \text{ (целая часть 2)} \Rightarrow a_{-3} = 2$$

$$0,56 \cdot 4 = 2,24 \text{ (целая часть 2)} \Rightarrow a_{-4} = 2$$

Итак, $0,165_{10} \approx 0,0222_4$

Выполним обратный перевод, чтобы убедиться, что абсолютная погрешность не превышает 4^{-4} :

$$0,0222_4 = 0 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2} + 2 \cdot 4^{-3} + 2 \cdot 4^{-4} = 2/16 + 2/64 + 2/256 = \\ 1/8 + 1/32 + 1/128 = 21/128 = 0,1640625$$

$$|0,1640625 - 0,165| = 0,00094 < 4^{-4} = 0,00390625$$

Перевод чисел в систему счисления с кратным основанием

Пусть p и q – основания двух систем счисления.

Будем называть эти системы системами счисления с кратными основаниями, если $p = q^n$ или $q = p^n$, где n – натуральное число.

(Так, например, системы счисления с основаниями 2 и 8 являются системами счисления с кратными основаниями.)

Пусть $p = q^n$ и требуется перевести число из системы счисления с основанием q в систему счисления с основанием p .

Разобьем целую и дробную части записи числа на группы по n последовательно записанных цифр влево и вправо от запятой. Если количество цифр в записи целой части числа не кратно n , то надо дописать слева соответствующее количество нулей. Если количество цифр в записи дробной части числа не кратно n , то нули дописываются справа.

Каждая такая группа цифр числа в старой системе счисления будет соответствовать одной цифре числа в новой системе счисления.

Пример:

Переведем 1100001,1112 в четверичную систему счисления.

Дописав нули и выделив пары цифр, получим 01100001,11102.

Теперь выполним перевод отдельно каждой пары цифр, пользуясь пунктом «Перевод чисел из одной произвольной системы в другую»:

$$01_2 = 1_{10} = 1_4$$

$$10_2 = 2_{10} = 2_4$$

$$00_2 = 0_{10} = 0_4$$

$$01_2 = 1_{10} = 1_4$$

$$11_2 = 3_{10} = 3_4$$

$$10_2 = 2_{10} = 2_4$$

Итак, $1100001,111_2 = 01100001,1110_2 = 1201,32_4$.

Пусть теперь требуется выполнить перевод из системы с большим основанием q , в систему с меньшим основанием p , т.е.

$$q = p^n.$$

В этом случае одной цифре числа в старой системе счисления соответствует n цифр числа в новой системе счисления.

Пример: Выполним проверку предыдущего перевода числа:

$$1201,32_4 = 1100001,1110_2 = 1100001,111_2$$

В таблице приведены значения цифр в наиболее часто используемых системах счисления.

Двоичная, восьмеричная, и шестнадцатеричная системы счисления.

В какой системе счисления лучше записывать числа – это вопрос удобства и традиций. С технической точки зрения, в ЭВМ удобно использовать двоичную систему, так как в ней для записи числа используются только две цифры 0 и 1, которые можно представить двумя легко различимыми состояниями “нет сигнала” и “есть сигнал”.

Человеку, напротив, неудобно иметь дело с двоичными записями чисел из-за того, что они более длинные, чем десятичные и в них много повторяющихся цифр.

Поэтому, при необходимости работать с машинными представлениями чисел используют восьмеричную или шестнадцатеричную системы счисления. Основания этих систем – целые степени двойки, и поэтому числа легко переводятся из этих систем в двоичную и обратно.

В шестнадцатеричной системе есть цифры с числовыми значениями 10, 11, 12, 13, 14, 15. Для их обозначения используют первые шесть букв латинского алфавита.

Приведем таблицу чисел от 0 до 16, записанных в системах счисления с основаниями 10, 2, 8 и 16.

Число в десятичной системе счисления	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
В восьмеричной	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20
В двоичной	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
В шестнадцатеричной	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

Для записи **шестнадцатеричных цифр** можно использовать также строчные латинские буквы **a-f**.

Пример:

Переведем число

$1101010010101010100,11_2$

в шестнадцатеричную систему счисления.

Воспользуемся кратностью оснований систем счисления

$$16=2^4$$

Сгруппируем цифры по четыре, дописав слева и справа нужное количество нулей

$0001101010010101010100,1100_2$

сверяясь с таблицей, получим:

$1A9554,C_{16}$