И Н Т Е Г Р И Р О В А Н Н Ы Й   У Р О К
(математика - информатика)
в 11-х классах
УЧИТЕЛЬ: ПАРФЕНОВА ЕЛЕНА ПЕТРОВНА.

"ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТОРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ".

Цели и задачи:

- сформировать у учащихся понятия о дифференциальных уравнениях, решении дифференциальных уравнений. На примере математического моделирования показать межпредметные коммуникации между информатикой, физикой, математикой, обществознанием, географией. Научить применять полученную математическую модель на практике.

ХОД УРОКА.

УЧИТЕЛЬ:

Понятие о дифференциальных уравнениях.

1. Вспомните, какие уравнения называются иррациональными, показательными. Что значит решить уравнение?

   Дифференциальные уравнения - это уравнения, в которых неизвестной является функция, стоящая под знаком производной. Как вы думаете, сколько может быть решений у дифференциального уравнения?

2. Решением дифференциальных уравнений занимается раздел высшей математики "Дифференциальные уравнения". Мы с вами рассмотрим простейшие дифференциальные уравнения и их решения.

Приведем пример дифференциального уравнения из курса физики. Второй закон Ньютона

$F = m * a$, где F - сила, m - масса, a - ускорение.

Вспомним физический смысл производной: это скорость изменения функции. Значит

$a(t) = v'(t)$, а $v(t) = x'(t)$. Следовательно,

$a(t) = x''(t)$ и $F = m * x''(t)$. Т.е. $x''(t) = F/m$.

3. Решить дифференциальное уравнение - это значит найти все неизвестные функции, обращающие данное уравнение в тождество.

4. Решение № 568 (а,б), 569 стр. 256 учебника "Алгебра и начала анализа" 10-11 под ред. Колмогорова А.Н.

Группа 1 (Орлова О.)

- Устный рассказ и газета о Лейбнице и Ньютоне.

5. Рассмотрим другое дифференциальное уравнение из курса физики и решим его.

При вертикальном движении под действием силы тяжести ускорение равно ускорению свободного падения, т.е. h''(t) = g. Значит

h'(t) = g * t + c (1)

h (t) = + c* t +c (2)

Найдем с и с из начальных условий h(0) = h и v(0) = v.

Из (1) h'(t) = v(t), следовательно, v(t) = g * t + c, v(0) = c, c1 = v0.

Из (2) h(0) = h, h = v * 0 + c, следовательно, c2 = h0.

Т.е. h(t) = gt^2/2 + v0 * t + h0.

Группа 3 (Каиров А.) – слайды презентации.

Дифференциальное уравнение показательного роста и показательного убывания.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $f'(x) = k * f(x)$, где k - некоторая константа. Это уравнение показательного роста и показательного убывания.

Решение многих задач физики, техники, биологии и социальных наук сводится к задаче нахождения функций, удовлетворяющих этому дифференциальному уравнению.

Решим это уравнение. Рассмотрим $f(x) = y$, $y' = k*y$.

Исходя из определения производной, имеем

$$dy/dx = k * y$$

$$dy = k * y * dx$$

$$dy/y = k * dx$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения, получим

$$\ln |y| = k * x + c,$$

$$y = e^{(kx+c1)} \quad , \text{ или } y = e^{kx} * e^{c1} \quad , \text{ или } y = c*e^{kx}$$

$$f(x) = c * e,$$

где с - постоянная. Т.к. с произвольно, у дифференциального уравнения бесконечно много решений.

Проверка: $f'(x) = c * k * e^{kx}$ $\qquad$ $c * k * e^{kx} = k * c * e^{kx}$.

Учитель.

Замечание. В приведенных выше рассуждениях мы предполагали, что функция f определена и удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению на всей числовой прямой. В конкретных задачах часто приходится рассматривать функции, удовлетворяющие данному уравнению только на некотором промежутке. Естественно, что в таком случае решение данного дифференциального уравнения будет давать общее решение задачи только на промежутке, на котором выполняется данное дифференциальное уравнение.

Смысл данного дифференциального уравнения заключается в том, что скорость изменения функции в точке x пропорциональна значению самой функции в этой точке. Это уравнение часто встречается при решении задач.

Тема нашего урока "Математическое моделирование исторических процессов". На уроках информатики мы с вами рассматривали этапы решения задач на ЭВМ.

Группа 2 (Журтова Э.) – этапы решения задач на ЭВМ. Математическая модель.

1. Постановка задачи.
2. Построение формализованной модели.
3. Построение алгоритма.
4. Исполнение алгоритма.
5. Анализ результатов.
6. Ответ.

- Четко сформулировать задачу - это, значит, высказать те предположения, которые позволят в море информации об изучаемом явлении или объекте выудить исходные данные, определить, что будет служить результатом, и какова связь между исходными данными и результатом. Все это: предположения, исходные данные, результаты и связи между ними - называют моделью задачи.
- Искусство составления моделей как раз и заключается в том, чтобы, не переусложнив модель, учесть в ней все существенное и отбросить второстепенное. Не в этом ли состоит искусство вообще? Ведь, пожалуй, каждый вид искусства, будь то живопись скульптура, театр, - это создание моделей жизненных явлений с использованием присущих ему выразительных средств.

- Составить хорошую модель задачи - дело не простое. Даже если решить эту задачу предстоит вам самим. А если модель надо будет объяснить компьютеру? В этом случае придется учитывать "способности" ЭВМ. Если, скажем, ЭВМ "умеет" только вычислять, то, высказывая предположения, нужно позаботиться о том, чтобы исходные данные и результаты были числами, а связи между ними - математическими соотношениями. Выполнив такой "перевод" задачи на язык математики, вы получите модель, которую обычно называют математической моделью.
- Вообще, какую бы жизненную задачу ни взялся решать человек, первым делом он строит модель - иногда осознанно, а иногда и нет. Ведь бывает так - вы напряженно ищите выход из трудной ситуации, пытаясь нащупать, за что можно ухватиться. И вдруг приходит озарение... Что же произошло? Это сработало замечательное свойство нашего разума - умение безотчетно, словно по какому-то волшебству, уловить самое важное, превратить информационный хаос в стройную модель стоящей перед человеком задачи.

- Математическая модель не тождественна историческому объекту, а является приближенным описанием его наиболее существенных свойств на языке математических понятий, в том числе, и дифференциальных уравнений. Еще Г. Галилей говорил, что книга природы написана на языке математики. Как и всякий результат процесса познания, математическая модель исторического процесса всегда имеет относительный характер. Она выступает как относительная истина, как некоторое приближение к абсолютной исторической истине.
- Построение математической модели исторического объекта позволяет поставить задачу его изучения, как математическую.
- В качестве математических моделей исторических явлений и процессов, протекающих в пространстве и во времени выступают, как правило, дифференциальные уравнения и системы этих уравнений.
- В качестве примера рассмотрим одну из простейших моделей роста численности населения в заданном регионе (КБР).
- Пусть $Y = Y(t)$ - численность населения, живущего или жившего на ограниченной территории в момент времени $t \in [\ t, T\ ]$.
- Допустим, что средняя скорость роста населения на одного человека (коэффициент прироста) - k
- $k = kp - kc$, где kp - коэффициент рождаемости, kc - коэффициент смертности.
- Прирост населения за время $\Delta t = t – t0$ $Y = kY \Delta t$

Разделим на Δt

$y/ \Delta t = kY$

При $\Delta t \to 0$ в левой части - производная $Y' = kY$

$Y = Y e$ - решение этого дифференциального уравнения, где Y - численность населения в начальный момент времени t, t - текущий момент времени.

$y(t) = y * e^{\wedge}k\Delta t$ - дискретная модель.

Пусть численность населения изменяется через z лет (1, 2, 3, ... лет), тогда

$Y (t + z) = Y*e^{\wedge}k(t+z-t0)$

$Y (t + z) = Y*e^{\wedge}(k(t-t0)+kz)$

$Y (t + z) = Y*e^{\wedge}k(t-t0)*e^{\wedge}kz$

Следовательно, $Y (t + z) = Y(t) * e^{\wedge}kz$.

Учитель

Из этой формулы следует, что численность населения возрастает в геометрической прогрессии со знаменателем e^kx, тогда как время t возрастает в арифметической прогрессии с разностью z. Это замечено еще в 18 веке Мальтусом (английский экономист и священник). По его мнению, средства существования могут возрастать только в арифметической прогрессии и что рано или поздно их станет недостаточно.

Группа 4 (Батов А.) – публикация и устный рассказ.

Т. Мальтус (1798 г.) первый ввел модель неограниченного роста. Опираясь на эту модель, он пытался обосновать неизбежность войн и других кризисных явлений социально-политической жизни человеческого общества. Он ввел понятие демографического давления как показателя превышения численности населения, проживающего на данной территории, над возможностью данной территории обеспечить это население продовольствием. Из его рассуждений делался вывод о необходимости постоянного расширения жизненного пространства, и этот вывод использовался для построения и оправдания расовых и (или) националистических теорий.

Проанализируем эту ситуацию с позиции модельного подхода. В модели неограниченного роста в качестве существенных принимались только биологические факторы. Но если живые организмы образуют сообщества (стада, стаи и т.п.), то вступают в силу иные факторы, характерные для данного сообщества. Их можно было бы назвать социальными, хотя термин "социальные" обычно применяют к сообществам людей. Что касается человека, то для него одним из важнейших социальных факторов является развитие науки и производства. Скажем, за счет применения удобрений с той же сельскохозяйственной территории стали снимать в несколько раз больший урожай, а значит, та же территория способна прокормить большее население, чем прежде.

Поэтому, с точки зрения информатики состоятельность применения модели неограниченного роста к человеческому обществу состоит уже в том, что учтены не все существенные факторы, а сама модель применяется не в той области, где она является адекватной, - в области социально-политической, а не чисто биологической.

И эта модель относительна, т.к. уравнение

$$Y' = k*Y$$

не учитывает известный биологический факт: всякий вид (в том числе и человеческий), став слишком многочисленным, сам ограничивает свой собственный рост. Кроме того не учтены следующие факты: миграция населения, войны, природные условия и т.д. Например, в 1999 г. очень мало детей в возрасте 7 лет пришли в 1 класс в нашу школу. Как вы думаете, с чем это связано?

Группа 5 (Шогенов А.) – web-сайт

Анализ численности населения в разные годы в КБР.

Решить следующую задачу и сравнить полученные данные с табличными.

Пусть Y(t) - численность населения в определенные годы в КБР:

Y(1975) = 647,8 тыс.

Y(1980) = 681,1 тыс.

Y(1985) - ?

РЕШЕНИЕ.

1). Y(1980+5) = Y(1980)*e = 681,1*e , e - ?

2). Y(1975+5) = Y(1975)*e

681,1 = 647,8*e

e = 681,1 : 647,8

e = 1,0514047

3). Y(1985) = 681,1*1,0514047 = 718,15 тыс. человек.

Группа 3 (Каиров А.) – презентация

- Составить программу на языке Basic расчёта численности населения на предстоящий год и отладить её на компьютере. Сделать вывод.

Ответ на ОПВ

«Без математики не постичь глубин философии, без философии не постичь глубин математики, без обеих не постичь ничего».

Рордас-Демулен (фр. философ)

Домашнее задание.

п.44, № 568 (а,в); 570. Учебние «Алгебра и начала анализа 10-11» под. ред. А.Н. Колмогорова.