Здесь ведь как с дыркой от бублика. Скажем ли мы: "внутри нет ничего", или будем утверждать: "есть дырка", - все это сплошные абстракции, и вкус бублика от них не изменится.

В **Толковом словаре русского языка** В С.И.Ожегова и Н.Ю.Шведовой дается такое определение: цели в нужном для нас смысле:

Цель - 2. Предмет стремления, то, что надо, желательно осуществить.

Во всемирной Интернет - энциклопедии (**Википедия)** этот термин определяется так:

Цель:

желаемый результат (предмет стремления); то, что хочется осуществить.

чётко описанное желательное состояние, которого необходимо достигнуть.

предвосхищаемый в сознании результат деятельности.

Это определение практически совпадает с определением Ожегова.

В **Большом бухгалтерском словаре,** имеется следующее определение:

Цель:

1. предмет стремления, то что надо осуществить; задача, которую необходимо решить;
2. характеристика поведения системы, направленного на достижение определенного конечного состояния.

Обычно формальным выражением Ц. является целевая функция системы. Поведение системы часто удобно описывать в терминах Ц. и средств ее достижения.

Целевая функция

Функция, связывающая цель (оптимизируемую переменную) с управляемыми переменными в задаче оптимизации.

В широком смысле **целевая функция** есть математическое выражение некоторого критерия качества одного объекта (решения, процесса и т.д.) в сравнении с другим. Цель – найти такие оценки, при которых целевая функция достигает минимума.

Важно, что критерий всегда привносится извне, и только после этого ищется правило решения, которое минимизирует или максимизирует целевую функцию.

Задачей оптимизации в математике называется задача о нахождении экстремума (минимума или максимума) вещественной функции в некоторой области. Как правило, рассматриваются области, принадлежащие $\mathbf{R}^n$ и заданные набором равенств и неравенств.

Постановка задачи оптимизации.

Для того, чтобы корректно поставить задачу оптимизации необходимо задать:

1 Допустимое множество — множество

$\mathbf{X}=\{\vec{x} \mid g_i(\vec{x}) \leq 0,\ i=1,\ldots,m\}$;

2 Целевую функцию — отображение $f: \mathbf{X} \to \mathbf{R}$;

3 Критерий поиска (max или min).

Тогда решить задачу $f(x) \to \min$ ($\vec{x} \in \mathbf{X}$) означает одно из:

1 - Показать, что $\mathbf{X} = \varnothing$.

2 - Показать, что целевая функция $f(\vec{x})$ не ограничена.

3 - Найти $\vec{x}^* \in \mathbf{X}: f(\vec{x}^*) = \min f(\vec{x})$ ($\vec{x} \in \mathbf{X}$).

4 - Если $\neg \exists\, \vec{x}^*$, то найти $\inf f(\vec{x})$.

Если минимизируемая функция не является выпуклой, то часто ограничиваются поиском локальных минимумов и максимумов: точек x_0 таких, что всюду в некоторой их окрестности $f(x) \geq f(x_0)$ для минимума и $f(x) \leq f(x_0)$ для максимума.

Если допустимое множество $\mathbf{X}=\mathbf{R}^n$, то такая задача называется задачей безусловной оптимизации, в противном случае — задачей условной оптимизации.

Полезность блага или товара — есть способность его удовлетворять какой-нибудь человеческой потребности.
Полезность блага тем выше, чем большему числу потребителей оно служит, чем настоятельнее и распространеннее эти потребности и чем лучше и полнее оно их удовлетворяет. Полезность является необходимым условием для того, чтобы какой-нибудь предмет приобрел меновую ценность. Некоторые экономисты пытались даже построить на Полезности теорию меновой ценности (см. Ценность).

Ценность — значимость (польза, полезность) некоторого множества объектов для множества живых существ.
Употребляется в нескольких смыслах:
«Ценность» — как название предмета, обозначающее признание его значимости. Разделяют «Материальные ценности» и «Духовные ценности». Известно понятие «Вечные ценности».
«Ценность» — в экономике — используется как синоним понятию «потребительная стоимость», т.е. значимость, полезность предмета для потребителя.

Функция полезности — экономическая модель для определения предпочтений экономических субъектов. Основоположным условием концепта функции полезности является рациональное поведение потребителя, выражающееся в выборе из многочисленных альтернатив именно тех, которые выводят его на более высокий уровень полезности. В микроэкономике концепт функции полезности служит для объяснения поведения потребителей и производителей, в то время как в макроэкономике им пользуются для изображения предпочтений государственных интересов. Первая производная функции полезности по количеству определённого блага $\partial U / \partial Ci$ называется предельной полезностью этого блага. Предельная полезность выражает, сколько дополнительной полезности приносит дополнительная единица блага *i*. Предельная полезность, равная 0, означает достижение насыщенности.

Терминология в алгебраических системах и моделях

Алгебраической системой (или просто системой) называется объект **A=**<A,Ω_F,Ω_P>, состоящий из трех множеств: непустого множества A, множества <u>операций</u> $\Omega_F = \{F_0, \ldots, F_\xi, \ldots\}$ и множества <u>предикатов</u> $\Omega_P = \{P_0, \ldots, P_\eta, \ldots\}$, заданных на множестве A.

Множество A называется **носителем** или **основным множеством** системы A.

В отличие от других операций и предикатов, которые могут быть определены на множестве A, операции F_i и предикаты P_j называются **основными** или **главными.** Значения главных нульарных операций системы называются **главными** или **выделенными элементами** этой системы.

Объединяя множества ,Ω_F и Ω_P системы A и полагая Ω = ,$\Omega_F \cup \Omega_P$, мы можем записать систему A более кратко: **A=**<A,Ω>. Очень часто множество Ω называют **сигнатурой**.

Алгебраическая система **A=**<A,Ω> называется **алгеброй**, если $\Omega_P = \varnothing$, и **моделью** или **реляционной системой**, если $\Omega_F = \varnothing$.

n-арная **операция** на *A* - это отображение прямого произведения *n* экземпляров множества в само множество $A^n \to A$. По определению, *0*-арная операция — это просто выделенный элемент множества. Чаще всего рассматриваются унарные и бинарные операции, поскольку с ними легче работать. Но в связи с нуждами топологии, алгебры, комбинаторики постепенно накапливается техника работы с операциями большей арности.

Операция — отображение, ставящее в соответствие одному или нескольким элементам множества (аргументам) другой элемент (значение). Термин **операция** как правило применяется к арифметическим или логическим операциям, в отличие от термина оператор, который чаще применяется к некоторым отображением множества на себя, имеющим замечательные свойства

Предикат (*n*-местный, или *n*-арный) — это функция с множеством значений {0,1} (или «ложь» и «истина»), определённая на *n*-й декартовой степени множества *M*. Таким образом, каждый набор элементов множества *M* он характеризует либо как «истинный», либо как «ложный».

Предикат можно связать с математическим отношением: если *n*-ка принадлежит отношению, то предикат будет возвращать на ней 1.

<u>Высказыванием</u> называется утверждение, о котором совершенно точно можно сказать, истинно оно или ложно. Если использовать термин "высказывание", то можно дать другое определение термину "предикат".

Выражение с n переменными, определенными на заданных областях, которое становятся высказыванием при любой подстановке допустимых значений переменных, называется <u>n-местным предикатом.</u>

Предикаты часто записывают в виде P(x), Q(x,y).

Прямое или **декартово произведение** множеств — множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары элементов исходных двух множеств. Данное понятие употребляется не только в теории множеств, но также в алгебре, топологии и прочих разделах математики благодаря тому, что прямое произведение часто наследует структуры (алгебраические, топологические и т. д.), существующие на перемножаемых множествах.

Сейчас термин **отображение** чаще всего называют **функцией**. Нестрогое определение: **функция** — это «закон», по которому каждому элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y.

Теоретико-множественное определение: **функция** или **отображение** — это кортеж множеств $F = (f, X, Y)$, обладающий следующими свойствами:

$f \subseteq X \times Y$ (декартово произведение X и Y)

$\forall (x,y) \in f, \forall (x',y') \in f, \quad x = x' \to y = y'.$

$\forall x \in X \ \exists y \in Y : (x,y) \in f.$

Для обозначения отображения используются такие формулы:

$F = (f, X, Y), F{:}X \to Y$ для отображения F множества X в множество Y.

Множество X называется **областью определения** отображения F.

Множество Y называется **областью значений** отображения F.

$(x,y) \in f, y=F(x)$

Элементы x называют **аргументами функции**, а соответствующие элементы y — **значениями функции.**

В математике **кортеж —** последовательность конечного числа элементов. Многие математические объекты формально определяются как кортежи. Например, граф определяется как кортеж (V,E), где V — это набор вершин, а E — подмножество $V \times V$, обозначающее рёбра.

Отношение — математическая структура, которая формально определяет свойства различных объектов и их взаимосвязи. Отношения обычно классифицируются по количеству связываемых объектов (арность) и собственным свойствам (симметричность, транзитивность и пр.).

Формальное определение **отношения.**

n-местным (n-арным) отношением, заданным на множествах $M_1,M_2,\ldots,M_n$, называется подмножество прямого произведения этих множеств.

Иногда понятие отношения определяется только для частного случая $M=M_1=M_2=\ldots=M_n$ для отношения R. Тогда факт принадлежности n-ки этому отношению можно записать как:

$<x_1,x_2,\ldots,x_n> \in R$

Формулы и первичные символы

Следует рассмотреть, какие первичные символы могут использоваться при записи формул в алгебраической системе. Это прежде всего числа, переменные, символы арифметических операций: +, -, * *(умножить), /(разделить); символы логических операций:* $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ *(если то),* $\leftrightarrow$ *(тогда и только тогда, равнозначность, эквивалентность); символы операций отношения:* $<$, $>$, $=$, $\neq$, $\leq$, $\geq$*; кванторы предикатов:* $\forall$ *(для всех),* $\exists$ *(существует); символы операций над множествами:* $\cap$, $\cup$, $\subset$, $\not\subset$, $\subseteq$, $\in$, $\notin$, $\Rightarrow$ *(если то),* $\Leftrightarrow$ *(тогда и только тогда, равнозначность, эквивалентность) ; круглые скобки (,) для определения последовательности выполнения операций; и др.*

Примеры записи и чтения

<u>Высказывание</u> $\forall xP(x)$ означает, что область истинности предиката P(x) совпадает с областью значений переменной *x*.

(«Его можно читать так: Для все значений x высказывание P(x) верно»).

Высказывание $\exists xP(x)$ означает, что область истинности предиката P(x) непуста.

(«Его можно читать так: Существует x при котором высказывание P(x) верно»).

Пример записи высказывания с использованием предикатов:

$A=B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

Квадратные скобки [ ] задают область определения.

Здесь приведена аксиома равенства двух множеств A и B.

Аксиома читается так: Множества A и B равны, тогда и только тогда, когда для всех x в области определения выполняется условие: x принадлежит A тогда и только тогда, когда x принадлежит B.

Другой пример. Определение <u>декартова произведения</u> через предикаты.

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

Определение читается так: Декартово произведение множеств A и B - это множество (фигурные скобки) пар (x,y) таких, что x принадлежит A и y принадлежит B.

Формальная (аксиоматическая) теория

Формальная (аксиоматическая) теория, формальное исчисление — это понятие, разработанное в рамках формальной логики в качестве основы для формализации теории доказательства. Формальная теория — разновидность дедуктивной теории, где множество теорем выделяется из множества формул путем задания множества аксиом и правил вывода.

Определение

Формальная теория T— это:

- конечное множество A символов, образующих **алфавит**;
- конечное множество F слов в алфавите A, $F \subset A^*$, которые называются **формулами**;
- подмножество B формул, $B \subset F$, которые называются **аксиомами**;
- множество $\boldsymbol{R}$ отношений R на множестве формул, $R \in \boldsymbol{R}$, $R \subset F^{n+1}$, которые называются **правилами вывода**.

Можно сказать, что формальная теория T это четверка:

$$T=<A, F, B, \mathbf{R}>$$

где A – алфавит,

F – множество формул, $F \subset A^*$;

B – множество аксиом, $B \subset F$;

$\mathbf{R}$ *– множество правил вывода,* $R \in \mathbf{R}$, $R \subset F^{n+1}$.

Множество символов A может быть конечным или бесконечным. Обычно для образования символов используют конечное множество букв, к которым при необходимости приписываются в качестве индексов целые числа или выражения.

Множество формул F обычно задаётся индуктивным определением, например, с помощью формальной грамматики. Как правило, это множество бесконечно. Множества A и F в совокупности определяют ***язык*** *или* ***сигнатуру*** *формальной теории.*

Множество аксиом B может быть конечным или бесконечным. Если множество аксиом бесконечно, то, как правило, оно задаётся с помощью конечного числа ***схем*** *аксиом и правил порождения конкретных аксиом из схемы аксиом. Обычно аксиомы делятся на два вида:* ***логические аксиомы*** *(общие для целого класса формальных теорий) и* ***нелогические*** *или* ***собственные аксиомы*** *(определяющие специфику и содержание конкретной теории).*

Множество правил вывода ***R****, как правило, конечно.*

Математическая формула (от лат. *formula* — уменьшительное от forma — образ, вид) — всякая символическая запись (в виде выражения, равенства или неравенства), содержащая какую-либо информацию. По сути это символьные выражения либо точного, либо приближенного, либо неверного соответствия между математическими выражениями.
Аксиома (др.-греч. ἀξίωμα — утверждение, положение) или **постулат** — утверждение (факт), принимаемое истинным без доказательства, а также как «фундамент» для построения доказательств.
Теорема (др.-греч. θεώρημα — «зрелище, вид; взгляд; представление, положение») — утверждение, для которого в рассматриваемой теории существует доказательство (иначе говоря, вывод). Частным случаем теорем являются аксиомы, которые принимаются истинными без всяких доказательств или обоснований. Для аксиом доказательством служит пустой вывод.
В математических текстах теоремами обычно называют только достаточно важные утверждения. При этом требуемые доказательства обычно кем-либо найдены (исключение составляют в основном работы по логике, в которых изучается само понятие доказательства, а потому в некоторых случаях теоремами называют даже неопределённые утверждения). Менее важные утверждения-теоремы обычно называют **леммами**, предложениями, следствиями, условиями и прочими подобными терминами. Утверждения, о которых неизвестно, являются ли они теоремами, обычно называют **гипотезами**.

Материя — фундаментальное физическое понятие, связанное с любыми объектами, существующими в природе, <u>о которых можно судить благодаря ощущениям</u>.

В математике **доказательством** называется цепочка логических умозаключений, показывающая, что при каком-то наборе аксиом и правил вывода верно некоторое утверждение. В зависимости от контекста, может иметься в виду доказательство в рамках некоторой формальной системы (построенная по специальным правилам последовательность утверждений, записанная на формальном языке) или текст на естественном языке, по которому при желании можно восстановить формальное доказательство. Доказанные утверждения в математике называют теоремами (в математических текстах обычно подразумевается, что доказательство кем-либо найдено; исключения из этого обычая в основном составляют работы по логике, в которых исследуется само понятие доказательства); если ни утверждение, ни его отрицание ещё не доказаны, то такое утверждение называют гипотезой. Иногда в процессе доказательства теоремы выделяются доказательства менее сложных утверждений, называемых леммами.

Заключение

Из выше сказанного можно сделать вывод, что формальную теорию можно охарактеризовать, используя следующие главные компоненты:

- Основные символы (алфавит);

- правила образования слов (формул);

- аксиомы;

- правила вывода.

Множество основных символов содержит символы для обозначения констант, операторов и т.д. Из этих символов, согласно правилам образования, строятся утверждения (формулы).

Первичные утверждения, истинность которых принимается без доказательства, называются аксиомами системы.

В соответствии с правилами вывода из истинных утверждений выводятся новые истинные утверждения – теоремы.

Если требуется доказать истинность утверждения в той или иной формальной системе, то соответствующее доказательство представляет собой такую последовательность утверждений, в которой:
каждое утверждение является аксиомой или его можно получить из одного или более предыдущих утверждений с помощью ряда правил вывода;
последнее утверждение является тем утверждением, которое надо доказать.
Для сокращения длины доказательств используют следующие приёмы:
а) утверждения, ранее доказанные как теоремы, вставляются в доказательства без доказательства их истинности;
б) некоторые достаточно очевидные утверждения могут быть опущены (использованы неявно).