

Муниципальное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №3 имени Тази Гиззата г. Агрыз, Агрызского муниципального района Республика Татарстан

Проблема поиска корней многочленов



Подготовила: Сулейманова Диляра, 11 класс
Руководитель: Зарипова Р.М., учитель математики
I квалификационной категории

2011 год

Содержание

1. Введение

2. Определение многочлена

3. Нахождение корней многочленов

4. Теорема Безу

5. Схема Горнера

6. Заключение

7. Список литературы

Введение

Изучению темы «Многочлены» в программе по математике основной школы уделяется большое внимание.

За пределами школьного курса остаются некоторые методы отыскания корней многочленов, операции деления многочлена на многочлен. В связи с этим школьники лишены возможности решить некоторые алгебраические уравнения высших степеней (в том числе возвратные, однородные), приемы решения которых тесно связаны с отысканием корней многочленов. Между тем, такие задания встречаются в экзаменационных работах.

Поэтому целью моей работы стало нахождение формул и методов решения уравнений высших степеней, нахождение корней которых связано с отысканием корней многочленов.



Определение многочлена

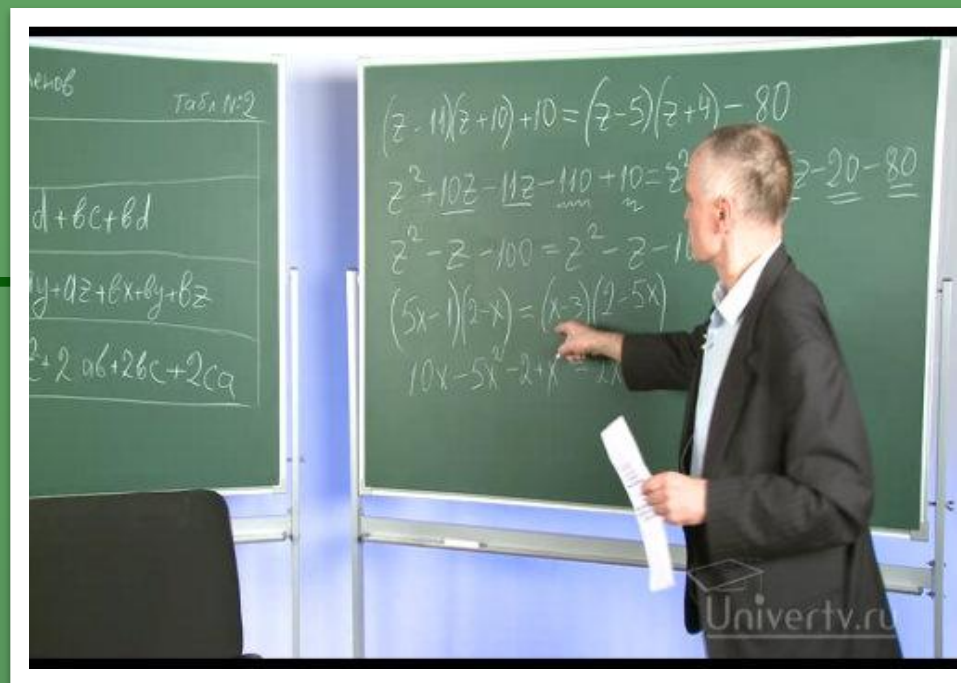
В школьной алгебре одночленом от некоторой буквы x называется алгебраическое выражение вида ax^m , где a - некоторое число, x - буква, m - целое неотрицательное число. Одночлен ax^0 отождествляется с числом a , так что числа рассматриваются как одночлены. Подобные одночлены складываются по правилу $ax^m + bx^m = (a+b)x^m$, называемому приведением подобных членов.

Многочленом или полиномом называется алгебраическая сумма одночленов. Поэтому любой полином можно

записать в канонической форме

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

с расположением членов в порядке убывания показателей.



Нахождение корней многочлена

1. В общем случае решение квадратных уравнений сводится к нахождению дискриминанта:

Формула дискриминанта: $D = b^2 - 4ac$

В общем случае корни уравнения равны: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Очевидно, в случае с нулевым дискриминантом, оба корня равны $x_{1,2} = -b/2a$

Например: $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

Ответ: 1, 4

2. Теорема Виета:

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение с единичным коэффициентом при старшем члене: $x^2 + px + q = 0$.

В этом случае целесообразно применять теорему Виета, которая позволяет получить относительно корней уравнения следующую систему уравнений :

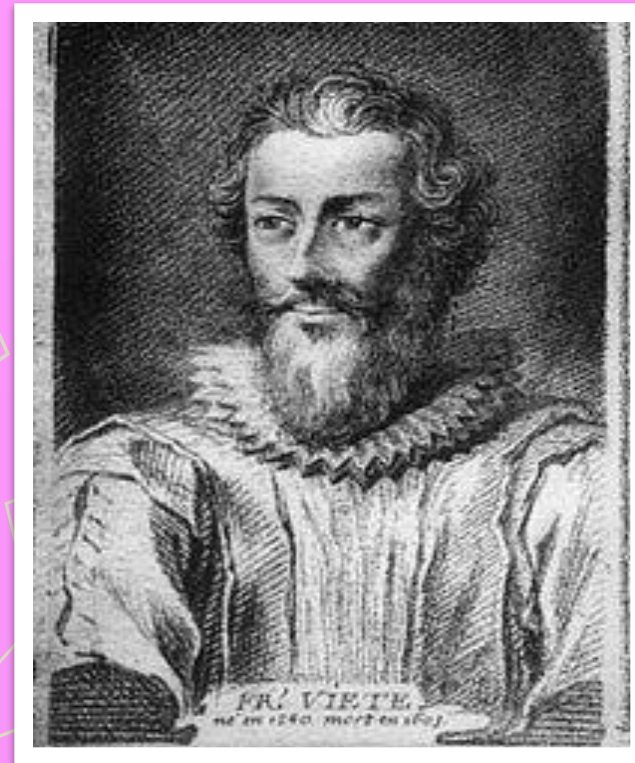
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Например: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 6, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 = 6 \\ 2 + 3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: 2,3



Франсуа Виёт (1540 — 13 февраля 1603) — французский математик, основоположник символической алгебры. По образованию и основной профессии — юрист.

3. Вынесение общего множителя за скобки:

Это преобразование является непосредственным следствием распределительного закона $ac + bc = c(a + b)$.

Пример: решить уравнение $12y^3 - 20y^2 = 0$.

Решение. Имеем: $12y^3 - 20y^2 = 4y^2 \cdot 3y - 4y^2 \cdot 5 = 4y^2(3y - 5)$,
тогда $4y^2(3y - 5) = 0$,

отсюда $4y^2 = 0$ или $(3y - 5) = 0$; $y=0$ или $y=5/3$.

Ответ: $y = 0$ и $y = 5/3$.

4. Способ группировки:

Этот способ заключается в том, что слагаемые многочлена можно сгруппировать различными способами на основе сочетательного и переместительного законов. Общий множитель можно вынести за скобку и исходный многочлен окажется представленным в виде произведения.

Пример: $x^3 - 8x^2 + 3x - 24 = 0$,
 $(x^3 + 3x) - (8x^2 + 24) = 0$,
 $x(x^2 + 3) - 8(x^2 + 3) = 0$,
 $(x - 8)(x^2 + 3) = 0$,
 $x = 8$ или $(x^2 + 3) \neq 0$.

Ответ: 8

5. Использование формул сокращенного умножения:

1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
4	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7	$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Пример. Разложить на множители многочлен $x^4 - 1$.

Решение. Имеем: $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$. $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) = 0$,
отсюда $x = -1, x = 1, (x^2 + 1) \neq 0$.

Ответ: 1, -1.

6. Метод введения новой переменной:

Пример. Решить уравнение $x(x-1)(x-2)(x-3) = 24$.

Решение. Заметив, что $x(x-3) = x^2 - 3x$, а $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, перепишем уравнение в виде $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 24$.

Введя новую переменную $y = x^2 - 3x$, преобразуем уравнение к виду $y(y+2) = 24$ и, далее, $y^2 + 2y - 24 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения служат числа 4 и -6.

Возвращаясь к переменной x , мы должны решить два уравнения:

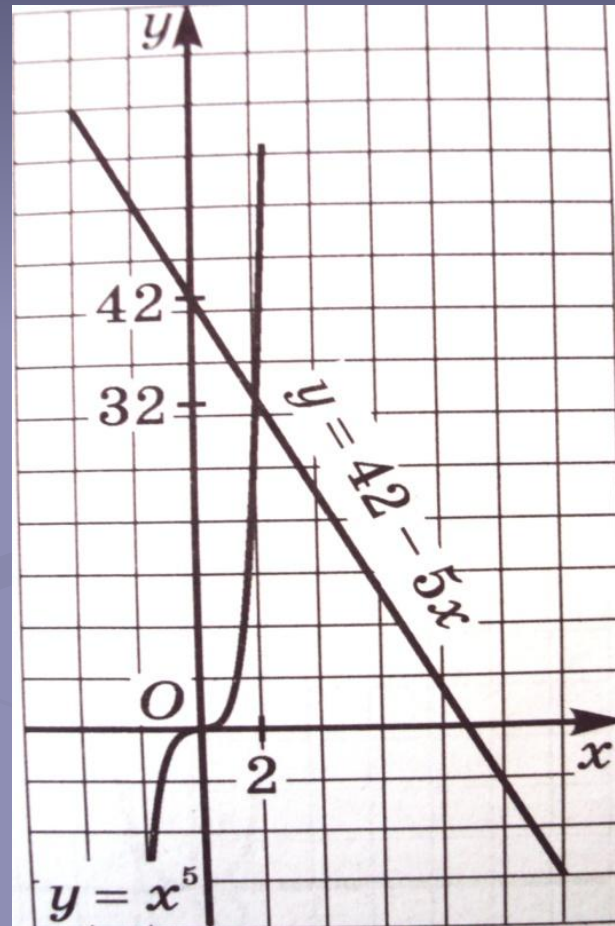
$$x^2 - 3x = 4; \quad x^2 - 3x = -6.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: 4; -1.

7. Функционально-графический метод:

- Пример. $x^5 + 5x - 42 = 0$.
- *Решение.* Преобразуем уравнение к виду $x^5 = 42 - 5x$.
- Поскольку функция $y = x^5$ возрастает, а функция $y = 42 - 5x$ убывает, то уравнение $x^5 = 42 - 5x$ имеет только один корень (рис.; масштабы на осях координат различные), и этот корень нетрудно подобрать: $x = 2$.
- *Ответ:* 2.



Теорема Безу

Этьенн Безу́ (31 марта 1730, Немур —
- 27 сентября 1783, Бас-Лож близ
Фонтенбло) — французский
математик, член Парижской академии
наук (1758).



Теорема: *При делении многочлена n -й степени относительно x на двучлен $(x-a)$ остаток равен значению делимого при $x=a$.*

(Буква a может обозначать любое действительное или мнимое число, т. е. любое комплексное число.)

При решении уравнений с помощью теоремы Безу необходимо:

- Найти все целые делители свободного члена;
- Из этих делителей найти хотя бы один корень уравнения (a);
- Левую часть уравнения разделить на $(x-a)$;
- Записать в левой части уравнения произведение делителя и частного;
- Решить полученное уравнение.

Пример: Найти корни уравнения $x^4+4x^2-5 = 0$.

Среди делителей свободного члена число 1 является корнем данного уравнения, а это значит, что по следствию 2 из теоремы Безу многочлен x^4+4x^2-5 делится на $(x-1)$ без остатка:

$$\text{значит } x^4+4x^2-5 = (x-1)(x^3+x^2+5x+5).$$

Среди делителей свободного члена многочлена x^3+x^2+5x+5 , $x=-1$ является его корнем, а это значит, что по следствию 2 из теоремы Безу x^3+x^2+5x+5 делится на $(x+1)$ без остатка:

$$\text{значит } x^3+x^2+5x+5 = (x+1)(x^2+5).$$

$$\text{Отсюда } x^4+4x^2-5 = (x-1)(x+1)(x^2+5).$$

(x^2+5) на множители не раскладывается, т.к. действительных корней не имеет, поэтому

$$(x-1)(x+1)(x^2+5)=0$$

$$(x-1)=0 \text{ или } (x+1)=0 \text{ или } (x^2+5)=0$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

$$x^2 \neq -5$$

Ответ: 1; -1.



Схема Горнера

Горнер Джордж Уильямс (11 октября 1821 — 1905) - английский математик, работал в области алгебры. В 1819 опубликовал способ приближенного вычисления вещественных корней многочлена, который назвал способом Руффини — Горнера. Этот способ был известен китайцам еще в 13 в. Именем Горнера названа схема деления многочлена на двучлен $(x - a)$.

Пусть $p(x) = bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$. Разделив $p(x)$ на $x - a$, получим $p(x) = (x - a)q(x) + r$, где $q(x)$ – некоторый многочлен третьей степени, коэффициенты которого нам пока неизвестны: $q(x) = kx^3 + mx^2 + nx + s$.

Итак,

$$bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = (kx^3 + mx^2 + nx + s)(x - a) + r. \quad (1)$$

Раскрыв скобки в правой части тождества (1), получим:

$$bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = kx^4 + (m - ka)x^3 + (n - ma)x^2 + (s - na)x + r - sa.$$

Неопределенные коэффициенты k, m, n, s, r связаны с известными коэффициентами a, b, c, d, e, f следующими соотношениями:

	b	c	d	e	f
a	$k=b$	$m=ka+c$	$n=ma+d$	$s=na+e$	$r=sa+f$

Пример. Найти корни уравнения $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$.

Решение: Находим делители свободного члена $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

Здесь, $a = 1$ ($x - 1 = x - a$), а коэффициенты многочлена-делимого равны соответственно **1, 4, 1, -6**. Строим таблицу для применения схемы Горнера:

	1	4	1	- 6
1	1	$1 \cdot 1 + 4 =$ 5	$5 \cdot 1 + 1 =$ 6	$6 \cdot 1 + (-6)$ = 0

Итак, коэффициенты частного – числа **1, 5, 6**, а остаток $r = 0$.

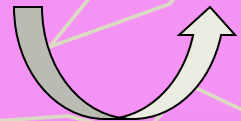
Значит, $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$.

Отсюда: $x - 1 = 0$ или $x^2 + 5x + 6 = 0$,

$$x = 1$$

$$x_1 = -2; x_2 = -3.$$

Ответ: **1, -2, -3**.



Заключение

Теорема Безу находит применение при рассмотрении одной из важнейших задач математики – решении уравнений.

Схема Горнера же удобна тем, что при ее применении нужно использовать меньшее, чем при делении многочлена на многочлен «уголком», число арифметических операций, и вообще она более компактна.

Данный материал можно использовать на элективных курсах, на дополнительных занятиях учащихся к ЕГЭ.



Список литературы

1. «Математика 7», Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Москва «Просвещение», 2007.
2. «Математика 8», Г.В.Дорофеев С.Б. Суворова, Москва «Просвещение» 2006.
3. « Алгебра и начала математического анализа 11 кл».: В двух частях. Учебник и задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2009.

