Муниципальное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №3 имени Тази Гиззата г. Агрыз, Агрызского муниципального района Республика Татарстан

Проблема поиска корней многочленов

Подготовила: Сулейманова Диляра, 11 класс
Руководитель: Зарипова Р.М., учитель математики I квалификационной категории

2011 год

Содержание

1. Введение

2. Определение многочлена

3. . Нахождение корней многочленов

4. Теорема Безу

5. Схема Горнера

6. Заключение

7. Список литературы

Введение

Меню

Изучению темы «Многочлены» в программе по математике основной школы уделяется большое внимание.

За пределами школьного курса остаются некоторые методы отыскания корней многочленов, операции деления многочлена на многочлен. В связи с этим школьники лишены возможности решить некоторые алгебраические уравнения высших степеней (в том числе возвратные, однородные), приемы решения которых тесно связаны с отысканием корней многочленов. Между тем, такие задания встречаются в экзаменационных работах.

Поэтому целью моей работы стало нахождение формул и методов решения уравнений высших степеней, нахождение корней которых связано с отысканием корней многочленов.

Определение многочлена

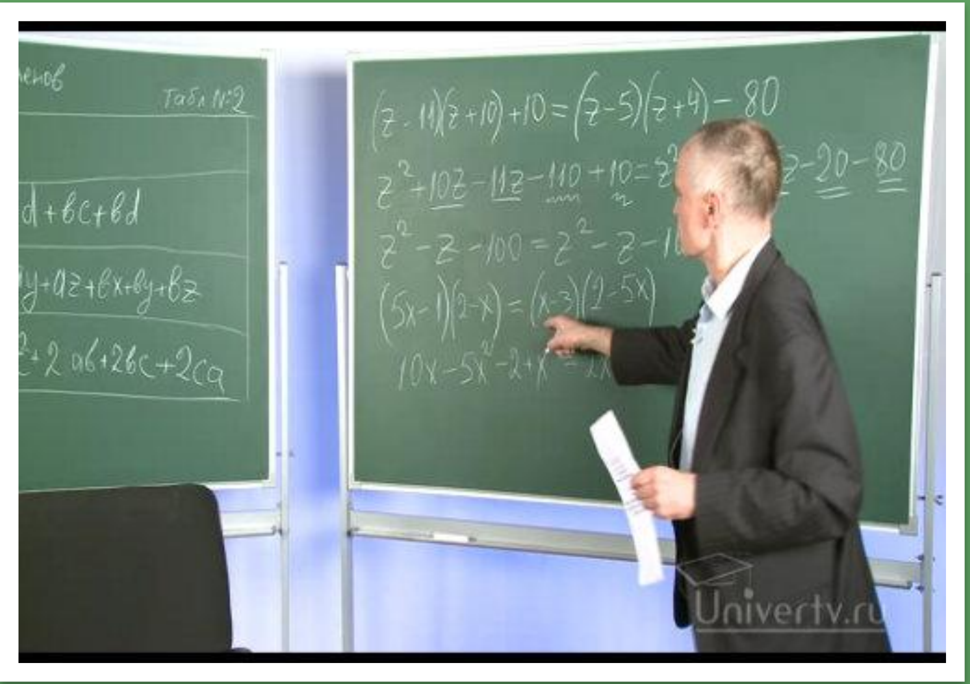
В школьной алгебре одночленом от некоторой буквы ***x*** называется алгебраическое выражение вида ax^m, где ***a*** - некоторое число, ***x*** - буква, ***m*** - целое неотрицательное число. Одночлен ax^0 отождествляется с числом *a*, так что числа рассматриваются как одночлены. Подобные одночлены складываются по правилу

$ax^m + bx^m = (a+b)x^m$, называемому приведением подобных членов.

Многочленом или полиномом называется алгебраическая сумма одночленов. Поэтому любой полином можно записать в канонической форме

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

с расположением членов в порядке убывания показателей.



Нахождение корней многочлена

Мен ю

1. В общем случае решение квадратных уравнений сводится к нахождению дискриминанта:

Формула дискриминанта: **$D = b^2 – 4ac$**

В общем случае корни уравнения равны: **$x_{1,2} = -b \pm \sqrt{D} / 2a$**

Очевидно, в случае с нулевым дискриминантом, оба корня равны **$x_{1,2} = -b / 2a$**

Например: **$x^2 + 3x – 4 = 0$**

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$$

Ответ: **1, 4**

2. Теорема Виета:

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение с единичным коэффициентом при старшем члене: $x^2 + px + q = 0$.

В этом случае целесообразно применять теорему Виета, которая позволяет получить относительно корней уравнения следующую систему уравнений :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Например: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 6, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 = 6 \\ 2 + 3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: 2,3

Франсуа́ Вие́т (1540 — 13 февраля 1603) — французский математик, основоположник символической алгебры. По образованию и основной профессии — юрист.

3. Вынесение общего множителя за скобки:

Это преобразование является непосредственным следствием распределительного закона ac + bc = c(a + b).

Пример: решить уравнение $12\ y^3 – 20\ y^2 = 0$.

Решение. Имеем: $\mathbf{12\ y^3 – 20\ y^2 = 4\ y^2 \cdot 3y – 4\ y^2 \cdot 5 = 4\ y^2 (3\ y – 5)}$,

тогда $\mathbf{4\ y^2 (3\ y – 5) = 0}$,

отсюда $\mathbf{4\ y^2 = 0}$ **или** $\mathbf{(3\ y – 5) = 0}$; y=0 или y=5/3.

Ответ: **y = 0** и **y = 5/3.**

4. Способ группировки:

Этот способ заключается в том, что слагаемые многочлена можно сгруппировать различными способами на основе сочетательного и переместительного законов. Общий множитель можно вынести за скобку и исходный многочлен окажется представленным в виде произведения.

Пример: $\mathbf{x^3 – 8x^2 + 3x – 24 = 0}$,

$\mathbf{(x^3 +3x) −(8x^2+24) = 0}$,

$\mathbf{x(x^2+3) - 8(x^2+3) =0}$,

$\mathbf{(x-8)\ (x^2+3) =0}$,

$\mathbf{x=8}$ **или** $\mathbf{(x^2+3)\neq 0}$.

Ответ: 8

5. Использование формул сокращенного умножения:

Меню

1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
4	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6	$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7	$(a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Пример. Разложить на множители многочлен **$x^4 - 1$.**

Решение. Имеем: $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) =$

$(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$. $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) = 0$,

отсюда $x = -1$, $x = 1$, $(x^2 + 1) \neq 0$.

Ответ: 1, -1.

6. Метод введения новой переменной:

Меню

Пример. Решить уравнение $x(x-1)(x-2)(x-3) = 24$.

Решение. Заметив, что $x(x-3) = x^2 - 3x$, а $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, перепишем уравнение в виде $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 24$.

Введя новую переменную $y = x^2 - 3x$, преобразуем уравнение к виду $y(y+2) = 24$ и, далее, $y^2 + 2y - 24 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения служат числа **4** и **-6**.

Возвращаясь к переменной х, мы должны решить два уравнения:

$$x^2 - 3x = 4; \qquad x^2 - 3x = -6.$$

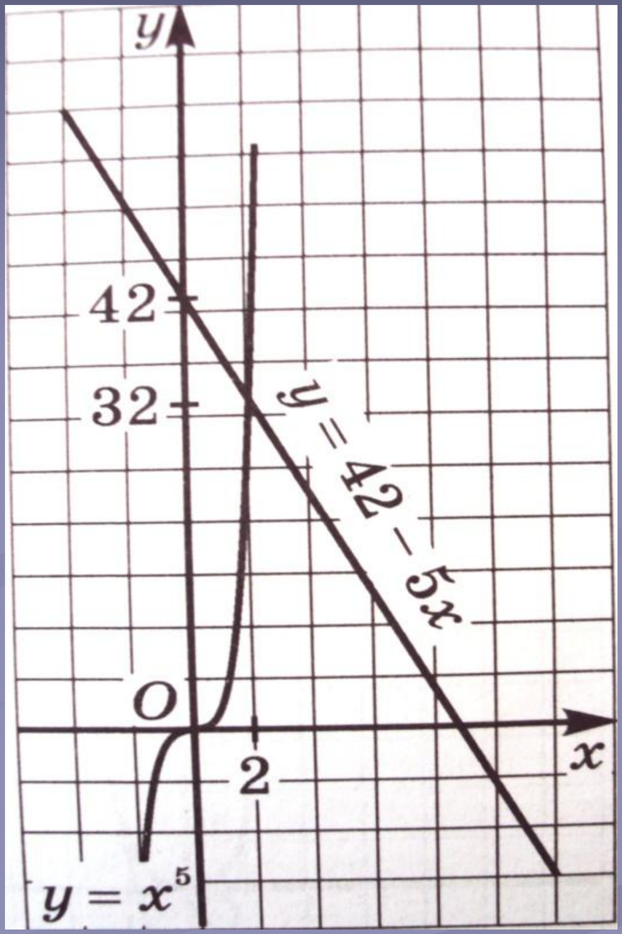
Из первого уравнения находим $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: **4; -1**.

7. Функционально-графический метод:

Меню

- <u>Пример</u>. $x^5 + 5x - 42 = 0$.
- *Решение*. Преобразуем уравнение к виду $x^5 = 42 - 5x$.
- Поскольку функция $y = x^5$ возрастает, а функция
- $y = 42 - 5x$ убывает, то уравнение $x^5 = 42 - 5x$ имеет
- только один корень
- (рис.; масштабы на осях координат различные),
- и этот корень нетрудно подобрать: $x = 2$.
- *Ответ*: 2.



Теорема Безу

Этье́нн Безу́ (31 марта 1730, Немур —
- 27 сентября 1783, Бас-Лож близ Фонтенбло) — французский математик, член Парижской академии наук (1758).

Теорема: ***При делении многочлена n-й степени относительно x на двучлен (x-a) остаток равен значению делимого при x=a***.

(Буква а может обозначать любое действительное или мнимое число, т. е. любое комплексное число.)

<u>При решении уравнений с помощью теоремы Безу необходимо:</u>

- Найти все целые делители свободного члена;
- Из этих делителей найти хотя бы один корень уравнения (а);
- Левую часть уравнения разделить на (x-a);
- Записать в левой части уравнения произведение делителя и частного;
- Решить полученное уравнение.

Меню

Пример: Найти корни уравнения $x^4+4x^2-5=0$.

Среди делителей свободного члена число **1** является корнем данного уравнения, а это значит, что по следствию 2 из теоремы Безу многочлен x^4+4x^2-5 делится на $(x-1)$ без остатка:

значит $x^4+4x^2-5=(x-1)(x^3+x^2+5x+5)$.

Среди делителей свободного члена многочлена x^3+x^2+5x+5, $x=-1$ является его корнем, а это значит, что по следствию 2 из теоремы Безу x^3+x^2+5x+5 делится на $(x+1)$ без остатка:

значит $x^3+x^2+5x+5=(x+1)(x^2+5)$.

Отсюда $x^4+4x^2-5=(x-1)(x+1)(x^2+5)$.

(x^2+5) на множители не раскладывается, т.к. действительных корней не имеет, поэтому

$$(x-1)(x+1)(x^2+5)=0$$

$(x-1)=0$ или $(x+1)=0$ или $(x^2+5)=0$

$x=1$ $\qquad$ $x=-1$ $\qquad$ $x^2\neq-5$

Ответ: **1; -1.**

Схема Горнера

Горнер Джордж Уильямс (11 октября 1821 — 1905) - английский математик, работал в области алгебры. В 1819 опубликовал способ приближенного вычисления вещественных корней многочлена, который назвал способом Руффини — Горнера. Этот способ был известен китайцам еще в 13 в. Именем Горнера названа схема деления многочлена на двучлен (x — a).

Пусть $\boldsymbol{p(x) = bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f}$. Разделив $\boldsymbol{p(x)}$ на $\boldsymbol{x - a}$, получим $\boldsymbol{p(x) = (x - a)q(x) + r}$, где $\boldsymbol{q(x)}$ – некоторый многочлен третьей степени, коэффициенты которого нам пока неизвестны: $\boldsymbol{q(x) = kx^3 + mx^2 + nx + s}$. Итак,

$\boldsymbol{bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = (kx^3 + mx^2 + nx + s)(x - a) + r}$. (1)

Раскрыв скобки в правой части тождества (1), получим:

$\boldsymbol{bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = kx^4 + (m - ka)x^3 + (n - ma)x^2 + (s - na)x + r - sa}$.

Неопределенные коэффициенты ***k, m, n, s, r*** связаны с известными коэффициентами ***a, b, c, d, e, f*** следующими соотношениями:

	b	c	d	e	f
a	k=b	m=ka+c	n=ma+d	s=na+e	r=sa+f

Пример. Найти корни уравнения $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$.

Решение: Находим делители свободного члена **±1; ± 2; ± 3; ± 6.**
Здесь, **a = 1 (x - 1 = x – a),** а коэффициенты многочлена-делимого равны соответственно **1, 4, 1, -6**. Строим таблицу для применения схемы Горнера:

	1	**4**	**1**	**- 6**
1	**1**	**1 · 1 + 4 = 5**	**5 · 1 + 1 = 6**	**6 · 1 + (-6) = 0**

Итак, коэффициенты частного – числа **1, 5, 6**, а остаток **r = 0**.
Значит, $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$.
Отсюда: $x - 1 = 0$ **или** $x^2 + 5x + 6 = 0$,
$x = 1$ $x_1 = -2$; $x_2 = -3$.

Ответ: **1, -2, -3**.

Заключение

Меню

Теорема Безу находит применение при рассмотрении одной из важнейших задач математики – решении уравнений.

Схема Горнера же удобна тем, что при ее применении нужно использовать меньшее, чем при делении многочлена на многочлен «уголком», число арифметических операций, и вообще она более компактна.

Данный материал можно использовать, на элективных курсах, на допол е учащихся к ЕГЭ.

Список литературы

1 . «Математика 7», Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Москва «Просвещение», 2007.

2. «Математика 8», Г.В.Дорофеев С.Б. Суворова, Москва «Просвещение» 2006.

3. « Алгебра и начала математического анализа 11 кл».: В двух частях. Учебник и задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2009.